Analyse numérique TD1

Exercice 1 Ecriture en base b des réels.
Soit $b \geq 2$ un entier. Le but de ce problème est de montrer que tout nombre réel $x \in [0,1[$ admet une unique décomposition de la forme

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k b^{-k} \tag{$*$}$$

où $(d_k)_{k\geq 1}$ est une suite à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ qui ne stationne pas en $b-1$. Dans tout le problème, on notera $[x]$ la *partie entière* du nombre x, c'est-à-dire, le plus grand entier inférieur ou égal à x. C'est l'unique entier m vérifiant $m \leq x < m+1$.

1. **Unicité.** Le but de cette question est de montrer que la décomposition $(*)$ est unique. On introduit la suite $a_n = [b^n x]$, $n \geq 0$.
   (a) Montrer que si $(d_k)_{k\geq 1}$ est une suite à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ qui ne stationne pas en $b-1$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
   $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} d_k b^{n-k} < 1$$
   (b) En déduire que si x s'écrit sous la forme $(*)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$a_n = \sum_{k=1}^{n} d_k b^{n-k} \quad \text{et} \quad d_n = a_n - b a_{n-1}.$$
   Conclure à l'unicité de la décomposition.
2. **Existence.** Le but est maintenant d'établir l'existence d'une décomposition de la forme $(*)$. On considère à nouveau la suite $a_n = [b^n x]$, $n \geq 0$ et on *définit* la suite $(d_n)_{n\geq 1}$ par la formule $d_n = a_n - b a_{n-1}$.
   (a) Montrer que $d_n \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$.
   (b) Vérifier que pour tout $n \geq 1$,
   $$\frac{a_n}{b^n} = \sum_{k=1}^{n} d_k b^{-k}.$$
   (c) Montrer que
   $$\frac{a_n}{b^n} \leq x < \frac{1+a_n}{b^n}.$$
   (d) Conclure que $x = \sum_{k=1}^{+\infty} d_k b^{-k}$.
   (e) Montrer que la suite $(d_k)_{k\geq 1}$ ne stationne pas en $b-1$.
3. Dans cette question, on s'intéresse au développement en base b des nombres rationnels.
   (a) Montrer que si x a un développement en base b *périodique* (c'est-à-dire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $p \geq 1$ tel que $d_{n+p} = d_n$, pour tout $n \geq n_0$) alors x est un nombre rationnel.
   (b) Soit $x = p/q \in [0,1[$ un rationnel. On note $r_0 = p$ et pour tout $n \geq 1$, on note q_n et r_n le quotient et le reste dans la division de $b r_{n-1}$ par q. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x = \sum_{k=1}^{n} q_k b^{-k} + \frac{r_n b^{-n}}{q}$. En conclure que $x = \sum_{k=1}^{+\infty} q_k b^{-k}$ est le développement de x en base b. En déduire que le développement en base b de x est périodique.