Analyse numérique TD2

Exercice 1 On considère le polynôme $f(x) = (x-1)^3(x-2)(x-3)$. On prend $a_0 < 1$ et $b_0 > 3$, et on considre les suites $a_n \leq b_n$ construites par la méthode de dichotomie. On suppose que ces suites ne sont pas stationnaires à partir d'une certain rang. Vers quel zéro de f la méthode de dichotomie ne converge-t-elle jamais ?

Exercice 2 Soit I un intervalle fermé et $f : I \to I$ une fonction continue.

1. Montrer que si I est borné, alors f possède au moins un point fixe dans I.
2. Montrer que si f est k-contractante avec $k \in [0, 1[$, alors f possède un unique point fixe dans I.

Exercice 3 Quelques techniques générales pour étudier une suite récurrente. On suppose que $f : I \to I$ est une application définie sur un intervalle stable I. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$.

1. On suppose que $f(x) \geq x$, pour tout $x \in I$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. On suppose que la fonction f est croissante sur I. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
3. On suppose que f est décroissante sur I. Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et varient en sens contraire.

Exercice 4 Suites récurrentes.
Etudier les suites récurrentes suivantes :

1. $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = 1 + u_n^2/4$;
2. $u_0 \in [0, 2]$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = (4 - u_n^2)/3$;
3. $u_0 \in [0, 1]$ et pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = (1 - u_n)^2$.

Exercice 5 Newton global. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ s'annulant en un unique point α. On suppose que f' et f'' ne s'annulent en aucun point. Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite associée à la méthode de Newton, $x_{n+1} = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, converge vers α.

Exercice 6 On suppose qu'une suite x_n converge vers $\alpha \in \mathbb{R}$ et que cette convergence est d'ordre 2, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ telle que $|x_{n+1} - \alpha| \leq C|x_n - \alpha|^2, n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $k_o \in \mathbb{N}$,

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{C} \left(C|x_{k_o} - \alpha|\right)^{2^{n-k_o}}, \qquad \forall n \geq k_o$$

Exercice 7 La méthode de Héron : approximation d'une racine carrée. Soient a et b des réels strictement positifs. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant $u_0 = b$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Vérifier que cette suite récurrente est la méthode de Newton associée la fonction $f(x) = x^2 - a$.
2. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer sa limite.
3. Montrer que

$$\frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \left(\frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}\right)^2.$$

En déduire l'expression de u_n en fonction de n, puis un encadrement de $u_n - \sqrt{a}$.