Analyse numérique TD3

Exercice 1.
Construire le polynôme d'interpolation pour les valeurs suivantes.

x	0	2	3	4
y	7	11	28	63

Exercice 2. Construction du polynôme de Lagrange - Tables d'interpolation.
Soit P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ relativement aux $n+1$ points équidistants

$$x_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$

On note $h = (b-a)/n$ le pas de discrétisation et $f_i = f(x_i)$.

1. Démontrer les relations suivantes permettant de calculer les différences divisées :

$$f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] = \frac{\Delta^k f_i}{k! h^k},$$

   où Δ est l'opérateur de différence finie en avant : $\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$,

2. Rappeler la formule de Newton du polynôme d'interpolation P_n. Montrer que si $x = x_0 + sh$ avec $s \in [0,n]$ alors P_n s'écrit sous la forme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k f_0}{k!} s(s-1)\cdots(s-k+1).$$

3. Représenter la table de Newton pour le calcul pratique de $\Delta^k f_0$.

Exercice 3. Erreur d'interpolation Soit P_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ relativement à $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots x_n$ de $[a,b]$. On rappelle que l'erreur d'interpolation peut être majorée de la manière suivante

$$E_n(f) = \|f - P_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}\|_\infty,$$

où $\pi_{n+1}(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_n)$ et $\|g\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |g(x)|$.
On se propose de déterminer une majoration de $\|\pi_{n+1}\|_\infty$ dans le cas où les points x_i sont équidistants : $x_i = a + ih$ avec $h = \frac{b-a}{n}$. On écrit

$$|\pi_{n+1}(x_0 + sh)| = h^{n+1} |s(s-1)\cdots(s-n)|, \qquad \forall s \in [0,n]$$

et on pose $\varphi(s) = |s(s-1)\cdots(s-n)|$.

1. Montrer que $\varphi(n-s) = \varphi(s)$, et en déduire que $\max_{[0,n]} \varphi(s) = \max_{[0,n/2]} \varphi$.
2. Montrer que $\varphi(s-1) > \varphi(s)$ pour tout $s \in [1, n/2]$ et en déduire que $\max_{[0,n]} \varphi(s) = \max_{[0,1]} \varphi$.

3. Montrer que φ atteint son maximum sur $[0,1]$ en un unique point s_n. Montrer que s_n vérifie
$$\frac{1}{s_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i - s_n}.$$
4. Montrer que
$$\frac{1}{s_n} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq \ln(n)$$
Conclure que $s_n \to 0$, quand $n \to \infty$.
5. Montrer que
$$\max_{[0,n]} \varphi \leq \frac{n!}{\ln(n)}$$
6. A l'aide de la formule de Stirling pour $n!$ montrer qu'il existe C_1 tel que
$$\|\pi_{n+1}\|_\infty \leq \frac{C_1}{\sqrt{n}\ln n}\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}.$$
7. On admet qu'il existe aussi C_2 tel que
$$\|\pi_{n+1}\|_\infty \geq \frac{C_2}{\sqrt{n}\ln n}\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}.$$
Comparer avec la majoration démontrée en cours pour l'interpolation aux points de Tchebychev sur $[a,b]$.

Exercice 4. Interpolation d'Hermite

1) Soient $\alpha_i, i = 1,\dots,4$ quatre réels. Montrer qu'il existe un unique polynôme $p \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant :
$$p(0) = \alpha_1,\ p'(0) = \alpha_2,\ p(1) = \alpha_3,\ p'(1) = \alpha_4. \tag{1}$$
2) Calculer les quatre polynômes $p_i \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant les relations (1) avec respectivement
$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)_i = (1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,1,0),\ (0,0,0,1).$$
En déduire que le polynôme de la question 1) s'écrit comme combinaison linéaire des p_i
$$p(x) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i p_i(x).$$
3) Soit f une fonction de $C^4([0,1])$ et p_f le polynôme de la question précédente obtenu avec les valeurs
$$\alpha_1 = f(0),\ \alpha_2 = f'(0),\ \alpha_3 = f(1),\ \alpha_4 = f'(1).$$
Montrer que pour tout $x \in]0,1[$ il existe $\xi_x \in]0,1[$ tel que
$$f(x) - p_f(x) = \frac{\pi(x)}{4!} f^{(4)}(\xi_x) \text{ où } \pi(x) = x^2(x-1)^2. \tag{2}$$
On étudiera la fonction $F(t) = f(t) - p_f(t) - [f(x) - p_f(x)]\frac{\pi(t)}{\pi(x)}$.