Analyse numérique TD4

Exercice 1. Analyse élémentaire de la méthode des trapèzes.
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. On note $M = \sup_{[a,b]} |f''|$.

1. Soient $a \leq \alpha < \beta \leq b$; on définit $g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ comme la fonction affine sur $[\alpha,\beta]$ coïncidant avec f aux points α et β. Montrer qu'on a les inégalités suivantes :
$$g(t) \leq f(t) + \frac{M}{2}(t-\alpha)(\beta-t), \qquad \forall t \in [\alpha,\beta].$$
et
$$f(t) - \frac{M}{2}(t-\alpha)(\beta-t) \leq g(t), \qquad \forall t \in [\alpha,\beta].$$
Indication : on pourra étudier la convexité des fonctions $t \mapsto f(t) \pm \frac{M}{2}t^2$.

2. En déduire que
$$\left| \int_\alpha^\beta f(t)\,dt - (\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} \right| \leq \frac{M(\beta-\alpha)^3}{12}.$$

3. On approche l'intégrale de f par la méthode des trapèzes :
$$T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2},$$
où $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$, $k \in \{0,\ldots,n\}$.
Expliquer la formule donnant T_n et montrer que
$$\left| \int_a^b f(t)\,dt - T_n(f) \right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

4. On s'intéresse maintenant à la méthode des rectangles :
$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$
Déduire de la question précédente qu'on a le développement asymptotique suivant
$$R_n(f) = \int_a^b f(t)\,dt + (b-a)\frac{f(a)-f(b)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 2. Analyse élémentaire de la méthode de Simpson
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[a,b]$. On note $M = \sup_{[a,b]} |f^{(4)}|$.

1. Vérifier que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, on a
$$\int_\alpha^\beta P(t)\,dt = \frac{\beta-\alpha}{6}\left(P(\alpha) + 4P\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + P(\beta)\right).$$
2. Montrer que pour tout $a \leq \alpha < \beta \leq b$
$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt - \frac{\beta-\alpha}{6}\left(f(\beta) + f(\alpha) + 4f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\right)\right| \leq \frac{M}{2880}(\beta-\alpha)^5.$$
Indication : On posera $c = (\alpha+\beta)/2$ et on considérera la fonction
$$F(t) = \int_{c-t}^{c+t} f(u)\,du - \frac{t}{3}(f(c-t) + f(c+t) + 4f(c)), \qquad \forall 0 \leq t \leq \frac{\beta-\alpha}{2}.$$
On montrera que $F(0) = F'(0) = F''(0) = 0$ et que $F^{(3)}(t) \leq \frac{2Mt^2}{3}$. On en déduira que $|F(t)| \leq \frac{Mt^5}{90}$ puis le résultat.
3. La méthode de Simpson consiste à calculer
$$S_n(f) = \frac{b-a}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_k) + 4f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) + f(x_{k+1})\right),$$
avec $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que
$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - S_n(f)\right| \leq \frac{M(b-a)^5}{2880n^4}.$$

Exercice 3.
Soit f une fonction de classe C^∞. On considère $I(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$ que l'on souhaite approcher par la formule de quadrature
$$J(f) = \alpha f(0) + \beta f(2/3).$$
Déterminer α et β pour que J soit de degré de précision le plus élevé possible.

Exercice 4.
On considère la formule de quadrature suivante :
$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx \simeq 2(\lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1)),$$
avec $1 \leq x_0 < x_1 \leq 1$ et $\lambda_0, \lambda_1 \geq 0$ et tels que $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$.

1. Déterminer $x_0, x_1, \lambda_0, \lambda_1$ de façon à ce que le degré de précision soit le plus élevé possible.
2. Déterminer le degré de précision.
3. Calculer L_2 le 3 ème polynôme de Legendre (polynômes orthogonaux pour le produit scalaire $\int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx$).
4. Déterminer la formule de quadrature associée aux deux racines de L_2.
5. Justifier que le degré est supérieur ou égal à 3 grâce à la division euclidienne par L_2.

Exercice 5.
Pour les deux exercices ci-dessus, calculer le noyau de Peano correspondant puis exprimer l'erreur de quadrature pour des fonctions suffisamment régulières.

Exercice 6.
Soient $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in C^\infty([a, b])$. Soit la formule de quadrature

$$J(f) = (b-a)(\alpha f(a) + \beta f(a/3 + 2b/3))$$

exacte pour les polynômes de degré au plus 2.

1. A l'aide des exercices 1 et 3, de $\phi(x) = (1-x)a + xb = a + x(b-a)$ et en posant $g(x) = f(\phi(x))$ montrer que l'erreur de quadrature $E(f) = \int_a^b f(x)dx - J(f)$ vérifie $E(f) = C(b-a)^4 f^{(3)}(\eta)$. pour $\eta \in]a, b[$ et $C > 0$.
2. On considère la subdivision équidistante de l'intervalle $[a, b]$:

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

ainsi que $y_i = a + 2ih/3$ pour $i = 0, \ldots, n$. Construire une formule de quadrature composée qui utilise les valeurs de $f(x_i)$ et $f(y_i)$ pour $i = 0, \ldots, n$. Estimer l'erreur dans cette formule. Vérifier que l'erreur tend vers 0 pour n tendant vers $+\infty$.