Analyse numérique TD5

Exercice 1. Résolutions explicites de quelques équations différentielles
A. Résoudre sur I les équations différentielles linéaires d'ordre 1 suivantes :

1. $(t^2+1)y' + 2y = 1$, avec $I = \mathbb{R}$.
2. $|t|y' + (t-1)y = t^2$, avec $I = \mathbb{R}$.

B. Trouver les solutions du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} u' = 4u - 2v \\ v' = u + v \end{cases}$$

C. Vérifier que la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle suivante :

$$(\mathrm{E}) \qquad y' = -y^2 + \frac{y}{t} - \frac{1}{t^2}$$

En déduire toutes les solutions de (E) sur $]0,+\infty[$.

Exercice 2. Lemme de Gronwall
Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue et $c \in [a,b]$ on suppose qu'il existe $A, B \geq 0$ telles que

$$\varphi(t) \leq A + B\left|\int_c^t \varphi(u)du\right|.$$

Montrer que pour tout $t \in [a,b]$, $\varphi(t) \leq Ae^{B|t-c|}$.
(**Indication** Considérer pour $t \geq c$ la fonction $F(t) = A + B\int_c^t \varphi(u)du$)

Exercice 3. Schéma de Heun
Pour l'approximation de la solution du problème (P)

$$(P) \quad \begin{cases} y' = f(t,y) \qquad t \in [0,R] \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

où f est continue sur $[0,R] \times \mathbb{R}$ et K-lipschitzienne en y, on considère le schéma (S)

$$(S) \quad \begin{cases} y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h) \\ y_0 = \alpha \end{cases}$$

avec

$$\phi(t,y,h) = \frac{1}{2}f(t,y) + \frac{1}{2}f(t+h, y+hf(t,y)).$$

1) Montrer que le schéma est consistant
2) Le schéma est-il stable ?
3) Déterminer l'ordre du schéma.

Exercice 4. Schéma d'Euler implicite
Pour résoudre l'équation

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & t \in [0,T] \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

avec f continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}$ et K-lipschitzienne en y, on considère le schéma

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_{n+1}).$$

1) Montrer que ce schéma se met sous la forme $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, G(t_n, y_n, h))$ où $G(t_n, y_n, h)$ est la solution de l'équation $y = y_n + hf(t_n, y)$.
2) Montrer que ce schéma est stable et consistant.
3) Quel est l'ordre du schéma ?