Analyse numérique TP3

Exercice 1.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, l'objet de cet exercice est de mettre en oeuvre différentes méthodes de quadrature pour le calcul de

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

1. Programmer les formules composées des trapèzes et de Simpson.
2. Observer la vitesse de convergence de l'erreur en fonction du pas h de la discrétisation.

Exercice 2. Programmer la méthode composée des rectangles. Déterminer la vitesse de convergence pour les fonctions $f_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_i(x) = x^i(1-x)^i \cos(x), \qquad \forall x \in [0,1], \qquad i \in \{0,1,2,3\}.$$

Expliquer le phénomène observé.

Exercice 3. Programmer la méthode de Romberg. Etudier la vitesse de convergence sur quelques exemples.

Rappels :
Formule des trapèzes :

$$T(h) = h\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

Formule de Simpson :

$$S(h) = \frac{h}{6}\left(f(a) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+(2i+1)\frac{h}{2}\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(a+(2i)\frac{h}{2}\right) + f(b)\right)$$

Méthode de Romberg :
Pour tout $1 \leq n \leq p$, on pose :

$$A_{n,1} = \frac{b-a}{2^{n-1}}\left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{2^{n-1}-1} f\left(a+k\frac{b-a}{2^{n-1}}\right) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

Puis, on calcule $A_{n,m}$, pour $2 \leq m \leq p$, et $m \leq n \leq p$, par la formule

$$A_{n,m} = \frac{4^{m-1}A_{n,m-1} - A_{n-1,m-1}}{4^{m-1}-1}.$$