Université Marne-la-Vallée
L3 Analyse complexe- 2009/2010

Feuille d'exercices 1 : Séries entières

Exercice 1.

A/

1. Vérifier que pour toute famille de réels $(u_{k,l})$, $k, l \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{k,l} u_{k,l} = \sup_{l}(\sup_{k} u_{k,l}) = \sup_{k}(\sup_{l} u_{k,l})$$

2. En déduire que, si $v_{i,j} \geq 0$, $\forall i$ et j,

$$\sum_{i\geq 0}\left(\sum_{j\geq 0} v_{i,j}\right) = \sum_{j\geq 0}\left(\sum_{i\geq 0} v_{i,j}\right) \tag{1}$$

Indication: on pourra introduire pour $k, l \in \mathbb{N}$,

$$u_{k,l} = \sum_{i\leq k}\sum_{j\leq l} v_{i,j}$$

B/ On suppose que $v_{i,j} \in \mathbb{C}$, $\forall i, j$ et que

$$\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} |v_{i,j}| \quad < \quad \infty. \tag{2}$$

Vérifier que pour chaque i, la série $\sum_{j\geq 0} v_{i,j}$ converge et que la série $\sum_{i\geq 0}\left(\sum_{j\geq 0} v_{i,j}\right)$converge.
Vérifier que pour chaque j, la série $\sum_{i\geq 0} v_{i,j}$ converge et que la série $\sum_{j\geq 0}\left(\sum_{i\geq 0} v_{i,j}\right)$ converge.
Montrer enfin que

$$\sum_{i\geq 0}\left(\sum_{j\geq 0} v_{i,j}\right) = \sum_{j\geq 0}\left(\sum_{i\geq 0} v_{i,j}\right) \tag{3}$$

Indication: on pourra d'abord considérer le cas où $v_{i,j} \in \mathbb{R}$ et remarquer que $v_{i,j} = v^+_{i,j} - v^-_{i,j}$.

Exercice 2. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et soit R son rayon de convergence. Montrer que

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

Exercice 3. Soit une série entière $\sum a_n z^n$ et sa série dérivée $\sum n a_n z^{n-1}$. Montrer qu'elles ont même rayon de convergence.

Exercice 4. Calculer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum \dfrac{z^n}{n2^n}$, $\sum(\log n) z^{2n}$, $\sum(2-ni)^n z^n$, $\sum \dfrac{(-1)^n}{1\times 3\times \ldots (2n-1)} z^n$.

2. $\sum(1+a^n)z^n$, a est un nombre complexe tel que $|a| \neq 1$.

3. $\sum a^{\sqrt{n}}z^n$, a est un réel strictement positif.

4. $\sum z^{n!}$.

5. $\sum a_n z^n$ dans les cas suivants :

$$a_n = \frac{a^n n!}{n^n}, (a>0), \quad a_n = [1+\frac{1}{n}]^n, \quad a_n = \frac{n^2}{3^n+n}, \quad a_n = n^{\ln n}.$$

Exercice 5. Etudier la convergence des séries entières suivantes, sans oublier la convergence sur le bord du disque de convergence :

$$1) \quad \sum \frac{1}{n}z^n, \quad 2) \quad \sum \frac{(n+1)^2}{2^n}z^n, \quad 3) \quad \sum \frac{3^n}{n!}z^n, \quad 4) \quad \sum \frac{z^n}{n^3},$$

Exercice 6. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{z^{4n-2}}{2n-1}$. Soit f la fonction définie sur $D(0,R)$ par $f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^{4n-2}}{2n-1}$. Calculer $f'(z)$. En déduire $f(x)$ pour $x \in]-R,R[$.

Exercice 7. Développer en série entière les fonctions suivantes en précisant le rayon de convergence de la série obtenue.
a) $\frac{1}{2-x}$, $\frac{1}{(2-x)^2}$, $\log(3+x)$, $\log(1+2x^2)$,
b) $\dfrac{3-x}{(2-x)^2}$, $\dfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$, $\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)^2}$, $\dfrac{1}{x^2-2x+2}$.
c) $e^x \sin x$, $(\cos x)^3$

Exercice 8. Soit f une fonction développable en série entière sur $D(0,r)$. On suppose que $f(0)=0$. Montrer qu'il existe une fonction g développable en série entière sur $D(0,r)$ telle que $g(z) = f(z)/z$ pour tout $z \neq 0$ sur $D(0,r)$.

Exercice 9. Pour $n \geq 3$ on définit la fonction f_n par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{(n+1)(n-2)}$. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[-1,1]$ puis calculer $\sum_{n\geq 3} f_n(x)$ pour tout x dans $[-1,1]$.

Exercice 10. Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme des séries entières réelles suivantes :

$$1) \quad \sum_{n\geq 0}(n^2+n+1)z^n, \quad 2) \quad \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{n!}z^n, \quad 3) \quad \sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}nz^{2n+1},$$

Exercice 11. On considère l'équation différentielle

$$f''(z) + zf'(z) + f(z) = 1$$

où $f(0)=a$ et $f'(0)=b$, a et b sont deux nombres complexes fixés. On cherche les solutions développables en série entière en 0. On note donc a_n les coefficients du développement en série entière en 0 d'une solution éventuelle.
1) Déterminer une relation entre a_2 et a_0 ainsi qu'une relation de récurrence entre a_{n+2} et a_n pour $n \geq 1$.

2) En déduire les expressions de a_{2n} et a_{2n+1} en fonction de a et b. Vérifier que la série entière ainsi obtenue est bien convergente sur $\mathbb{C}$.
3) On suppose que $a = b = 0$. Vérifier que $f(z) = 1 - \exp(\frac{-z^2}{2})$.

Exercice 12. Soit f la fonction analytique sur $D(0,1)$ définie par $f(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$.
Donner une expression simple de $f'(z)$. Calculer le développement en série entière de f' au voisinage de $-1/2$. En déduire le développement en série entière de f au voisinage de $-1/2$.

Exercice 13. Démontrer l'égalité pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = e + e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!}.$$

Exercice 14. On considère la fonction $f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$.

1. Montrer que la fonction f est analytique au voisinage de 0. Vérifier que les coefficients du développement en série entière de f, au voisinage de 0, s'écrivent sous la forme :

$$a_k = \sum_{p, 0 \leq 2p \leq k} (-1)^{k-p} C_{k-p}^{p}.$$

2. En décomposant f en éléments simples, montrer que

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k \equiv 0\,[3] \\ -1 & \text{si} \quad k \equiv 1\,[3] \\ 0 & \text{si} \quad k \equiv 2\,[3] \end{cases}$$

Exercice 15. Cours.

1. En s'inspirant de la première partie de l'exercice précédent, montrer que si f est une fonction analytique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$, alors $\frac{1}{f}$ est analytique en tout point de l'ensemble

$$U' = U \setminus \{z \in U, f(z) = 0\}.$$

2. Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{C}$. Montrer que si $f : U \to V$ et $g : V \to \mathbb{C}$ sont des fonctions analytiques, alors $g \circ f$ est une fonction analytique sur U.

On sait que toute fonction analytique sur U est holomorphe sur U. On remarquera que les résultats de cet exercice se démontrent très simplement si on admet de plus que toute fonction holomorphe est analytique (voir suite du cours).