Université Paris-Est Marne-la-Vallée
L3-Analyse complexe 2009/2010

Feuille d'exercices 2 : Holomorphie et conditions de Cauchy-Riemann

Exercice 1. Fonctions analytiques et extrémums locaux. Cours. Soit f une fonction analytique sur un ouvert U.

1. Montrer que si $|f|$ admet un maximum local en un point $a \in U$, alors elle est constante sur un voisinage de a.
2. Que peut-on dire si $|f|$ admet un minimum local qui n'est pas un zéro de f ?
3. Trouver les points de $\mathbb{C}$ où la fonction
$$g(z) = \left| \frac{z^3}{3} - z + 1 \right|$$
admet un extremum local.
4. Soit $h(z) = z^2 - z$. Trouver le maximum et le minimum de $|h(z)|$ sur le disque $\overline{D}(0,1)$, calculer f' aux points où le maximum et le minimum sont atteints.

Exercice 2. On identifie le plan complexe à $\mathbb{R}^2$. Quelle est l'image par l'application exponentielle des ensembles suivants :

a) une droite,
b) un pavé $[a, b] \times [c, d]$,
c) l'intérieur du triangle de sommet $(0, 0), (1, 0), (0, 2\pi)$.

Exercice 3. Parmi les applications suivantes lesquelles sont holomorphes ?
$$f_1(z) = \frac{z}{1-z}, \quad f_2(z) = |z|^2, \quad f_3(z) = \overline{z}, \quad f_4(z) = \frac{e^z}{z^2+1}.$$

Exercice 4. On considère la fonction $G : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ définie par $G(x+iy) = P(x, y)+iQ(x, y)$, où pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$
$$P(x, y) = \frac{e^x\,(x \cos y + y \sin y) - x}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad Q(x, y) = \frac{e^x\,(-y \cos y + x \sin y) + y}{x^2 + y^2}.$$
Montrer que G est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ et qu'on peut la prolonger en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Exercice 5. Conditions de Cauchy-Riemann Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application différentiable ; démontrer que f est holomorphe si et seulement si elle vérifie la condition suivante, dite *condition de Cauchy-Riemann* :
$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}.$$
On pose $P = \mathrm{Re}(f)$ et $Q = \mathrm{Im}(f)$; montrer que la condition de Cauchy-Riemann s'écrit aussi :
$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

Application. Dire pour chacune des applications suivantes si elle est holomorphe :
$$f(x, y) = x^4y^5 + ixy^3, \quad g(x, y) = y^2 \sin(x) + iy, \quad h(x, y) = \sin^2(x + y) + i \cos^2(x + y).$$

Exercice 6. Que dire d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$?

On admettra dans l'exercice suivant qu'une fonction holomorphe est analytique et par conséquent de classe C^∞. Ce résultat sera démontré en cours.

Exercice 7. Fonctions holomorphes et fonctions harmoniques Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$; une fonction $h : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2 est dite *harmonique* si elle vérifie

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0.$$

1. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe ; montrer que la fonction $h = \mathrm{Re}(f)$ est harmonique sur Ω.
2. On suppose $\Omega = \mathbb{C}$; montrer que toute fonction harmonique est la partie réelle d'une fonction holomorphe.
3. Montrer que si f est holomorphe sur un ouvert Ω et $f(z) \neq 0$, pour tout z, alors $h = \ln(|f|)$ est harmonique.