Université Marne-la-Vallée
L3 Analyse complexe- 2009/2010

Feuille d'exercices 3 : Intégrales curvilignes et Primitives

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes et dessiner les chemins correspondants.

$\int_\gamma z^2\,dz$ où $\gamma(t) = e^{2im\pi t}, t \in [0,1]$.
$\int_\gamma z\,dz$ où $\gamma(t) = tz_0 + (1-t)z_1, \quad z_0, z_1 \in \mathbb{C}, t \in [0,1]$.
$\int_\gamma e^z\,dz$ où $\gamma(t) = t^2, t \in [0,1]$.

Exercice 2. On se place sur $P = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. On note log la détermination principale du logarithme. Etant donné un chemin γ, tracé dans P, d'origine a et d'extrémité b, calculer $\int_\gamma \log z\,dz$ (On pourra calculer la dérivée de $z\log z$).

Exercice 3. Soient un chemin γ, et une suite (F_n) de fonctions complexes continues sur γ. Montrer que si la suite donnée converge uniformément vers F, on a l'égalité suivante :

$$\int_\gamma F(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma F_n(z)\,dz.$$

Exercice 4. Soient un chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ et φ une fonction complexe continue sur le support de γ. Montrer que la fonction F définie par

$$F(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(u)}{u-z}\,du$$

est holomorphe sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\gamma(t); t \in [0,1]\}$. Montrer qu'on a de plus en tout point $z \in \Omega$:

$$F^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{\varphi(u)}{(u-z)^{n+1}} du.$$

Exercice 5. Etant donnés deux nombres réels a, b ($a < b$) , on pose pour $z \notin [a,b]$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{t-z} dt.$$

1. Vérifier que f est analytique en tout point extérieur à $[a,b]$.
2. Soit x un nombre réel vérifiant $a < x < b$. Etant donné $\varepsilon > 0$, calculer $f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon)$, puis calculer $\lim_{\varepsilon\to 0} (f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon))$. En déduire que f n'est pas prolongeable par continuité aux points de $[a,b]$.

Exercice 6. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin fermé et soit $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{\gamma(t); t \in [a,b]\}$. Pour $t \in [a,b]$, on pose

$$h(t) \ = \ \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds.$$

1. Si $g(t) = e^{-h(t)}(\gamma(t) - z_0)$, calculer $g'(t)$, $g(a)$ et $g(b)$.
2. Montrer que $e^{-h(b)} = 1$. En déduire que $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) \in \mathbb{Z}$.
3. Montrer que la fonction Ind_γ est continue sur le complémentaire du support de γ.
4. Montrer que la fonction Ind_γ est nulle sur la composante connexe non bornée du complémentaire du support de γ.

Exercice 7. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $f = k^2$ avec k holomorphe. Montrer que $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz \in 2\mathbb{Z}$ pour tout chemin fermé γ sur lequel f ne s'annule pas (procéder comme dans l'exercice précédent).

Exercice 8. Soient a et b deux points de $D(0,1)$.

1. Montrer que $\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_\gamma \frac{dz}{z-b}$ pour tout lacet γ à support dans $D(0,1)^c$.
2. Montrer que la fonction $f(z) = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}$ admet une primitive g telle que $e^{g(z)} = \frac{z-a}{z-b}$ sur $\overline{D}^c(0,1)$.

Exercice 9. On admet que la formule $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ est vraie pour tout $z \in [0, 2\pi]$. Montrer que cette formule est vraie pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 10. Soient Ω un domaine contenant $\mathbb{R}_+^*$ et f une fonction analytique sur Ω vérifiant $f(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $f^2(z) = z$ pour tout $z \in \Omega$.

Exercice 11. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe U. Montrer que si $fg = 0$ sur U alors $f = 0$ sur U ou $g = 0$ sur U.

Exercice 12. Soit Ω un ouvert connexe. Appelons détermination de $\sqrt{z}$ dans Ω toute fonction F, holomorphe dans Ω, et vérifiant pour tout $z \in \Omega$:

$$F^2(z) = z.$$

Montrer que si F est une détermination de $\sqrt{z}$ dans Ω, alors les seules déterminations de $\sqrt{z}$ dans Ω sont F et $-F$.
Définir de manière analogue la notion de $\sqrt[n]{z}$, où n est un entier > 1, et on montrera que sur un domaine, s'il en existe une il en existe exactement n.

Exercice 13. Principe de réflexion de Schwarz
1) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. On suppose que f est une fonction holomorphe sur $U \setminus (U \cap \mathbb{R})$ et continue sur U. Montrer que f est holomorphe sur U.
2) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ invariant par conjugaison (si $z \in U$ alors $\overline{z} \in U$). On appelle

$$U_+ = \{z \in U | \mathrm{Im}(z) > 0\} \text{ et } U'_+ = \{z \in U | \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$$

Soit $f : U'_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue, holomorphe sur U_+ et prenant des valeurs réelles sur $U \cap \mathbb{R}$. Montrer que $F(z) = f(z)$ si $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ et $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$ si $\mathrm{Im}(z) < 0$ définit un prolongement holomorphe de f à U.