Université Marne-la-Vallée
L3 - Analyse complexe 2009/2010

Feuille d'exercices 4.
Principe du maximum - Théorème de Liouville - Formule de Cauchy

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose que

$$\lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = 0.$$

1. Montrer que $|f|$ atteint son maximum global. En déduire que f est la fonction nulle.
2. **Une preuve du théorème de d'Alembert.** Soit P un polynôme non constant à coefficients complexes ; montrer que P admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.
3. Soit $\alpha \in [0, 1[$, $M \in \mathbb{R}^+$ et $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe vérifiant, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$|g(z)| \leq M(1 + |z|^\alpha).$$
Montrer que g est une fonction constante.
4. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ non constante et $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $r > 0$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > r$ et $|f(z)| < \varepsilon$.

Exercice 2. Lemme de Schwarz. Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité ouvert $D = D(0, 1)$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $|f(z)| \leq 1$ pour $z \in D$.

1. Montrer que la fonction $z \to \frac{f(z)}{z}$ peut-être prolongée en une fonction holomorphe dans D.
2. Soit $r \in]0, 1[$, montrer que $|\frac{f(z)}{z}| \leq \frac{1}{r}$ si $0 < |z| \leq r$. En déduire que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D$.
3. On suppose maintenant qu'il existe $z_0 \in D$ tel que $z_0 \neq 0$ et $|f(z_0)| = |z_0|$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in D$.

Exercice 3. Automorphismes du disque unité. Soit D le disque unité ouvert ; on dira que $f : D \to D$ est un automorphisme analytique de D si f est holomorphe, bijective et de réciproque holomorphe. Le but de l'exercice est de trouver tous les automorphismes analytiques de D. On fera appel au Lemme de Schwarz démontré dans l'exercice précédent.

1. Déterminer tous les automorphismes de D qui fixent 0.
2. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Montrer que $f_{a,b}$ définie par
$$f_{a,b}(z) = \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}, \quad \forall z \in D$$
est un automorphisme de D.
3. Montrer que pour tout $\omega \in D$, il existe des nombres complexes a et b tels que $|a|^2 - |b|^2 = 1$ et $f_{a,b}(\omega) = 0$.
4. Déterminer tous les automorphismes de D.

Exercice 4. En utilisant les inégalités de Cauchy, montrer que si F est une fonction entière (c.a.d. de la forme $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in \mathbb{C}$), supposée bornée, alors F est constante.

Exercice 5. Sur le cercle unité $\gamma(t) = e^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$ calculer l'intégrale :

$$I = \int_\gamma \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{4})^6} dz$$

Exercice 6. Soit le circuit circulaire : $\gamma(t) = Re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$. On se propose de calculer l'intégrale :

$$I(a) = \int_\gamma \frac{e^z}{z^2 + a^2}\, dz,$$

dans laquelle a est un nombre complexe tel que $|a| \neq R$.

1. On suppose $a = 0$. Vérifier que

   $$e^z = 1 + z + z^2\phi(z),$$

   où ϕ est holomorphe dans $\mathbb{C}$. En déduire $I(0)$.
2. On suppose $a \neq 0$. Calculer $I(a)$ (on distinguera le cas $|a| > R$ et le cas $|a| < R$).

Exercice 7. Calculer l'intégrale :

$$I_R = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{1 + z^2} dz,$$

dans laquelle R est un nombre réel > 1 et Γ_R est la réunion du segment d'extrémités $-R$ et R et du demi-cercle γ_R de centre 0 et de rayon R d'extrémités R et $-R$ situé dans le demi-plan supérieur $\{z \in \mathbb{C}/\mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. En déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{e}.$$