Université Marne-la-Vallée
L.3 Analyse complexe - 2009/2010

Feuille d'exercices 5 : Théorème des résidus

Exercice 1. (Logarithmes généralisés.) Soient Ω un ouvert étoilé et f une fonction holomorphe dans Ω qui ne prend jamais la valeur zéro. Il s'agit de montrer qu'il existe une fonction holomorphe, définie sur Ω, telle que

$$\forall z \in \Omega, \qquad \exp\left(g(z)\right) = f(z) \tag{1}$$

1. Montrer que la fonction $\frac{f'}{f}$ est holomorphe dans Ω. En déduire qu'elle admet une primitive g telle que $\exp\left(g(z_0)\right) = f(z_0)$ (où $z_0 \in \Omega$ fixé).
2. Conclure en considérant la fonction $G(z) = f(z)\exp\left(-g(z)\right)$.

Exercice 2. Calculer les résidus $Res(f,a)$, où a décrit les pôles de f:

a) $f(z) = \dfrac{e^{2z}}{(1+z)^4}$, b) $f(z) = \dfrac{e^z}{(\pi + z^2)}$,

c) $f(z) = \dfrac{1}{z^4+z^2+1}$, d) $f(z) = \dfrac{z(z+1)}{(z^2+1)^2}$.

Exercice 3. Calculer, par la méthode des résidus, les intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+x^2+1}dx,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(\cos x - \sqrt{2})^2}dx, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{a+\cos x}dx \text{ pour } a > 1, \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\sin\theta}\left(= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}\right) \text{ pour } |a| > |b|,$$

Exercice 4. Soit F une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ vérifiant $\max_{\theta\in[0,\pi]} |F(Re^{i\theta})| \to 0$ lorsque $R \to +\infty$.

1. (Lemme de Jordan) Montrer que, pour tout $a > 0$,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} e^{iaz}F(z)dz = 0,$$

où $\Gamma_R : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ est le chemin donné par $\Gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$.

2. En utilsant le chemin $C_R = \gamma_R \cup \Gamma_R$, où $\gamma_R : [-R,R] \to \mathbb{C}$, $\gamma_R(t) = t$, calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{i\pi x}}{x^2+2x+5}dx.$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin\pi x}{x^2+2x+5}dx.$

3. Calculer de la même manière

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+1)^2}\, dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\pi x}{x^4+x^2+1}dx.$$

Exercice 5. Soit R une fraction rationnelle sans pôle réel tel que $\deg(R) < 0$.
On souhaite calculer

$$I = \int_0^{+\infty} xR(x^4)dx.$$

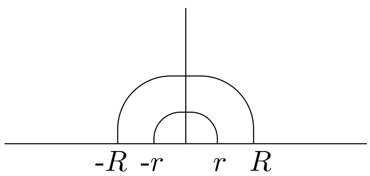
Montrer que cela peut se faire par la méthode des résidus en intégrant sur le contour formé du bord du quart du disque : $\{0 < \arg(z) < \frac{\pi}{2}, |z| < a\}$.
Application : calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^8}dx.$$

Exercice 6. Soit $r > 0$, on note par C_r le demi-cercle de $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon r paramétré par $\varphi(t) = re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$. Etant donnée une fonction f continue sur $\{z \in \mathbb{C} \ /0 < |z| < r_0\}$ ($r_0 > 0$). Pour $r < r_0$, on pose $I_r(f) = \displaystyle\int_{C_r} f(z)dz$ et $I(f) = \lim_{r\to 0} I_r(f)$ (si cette limite existe).

1. (a) Montrer que $I(f) = i\pi$ lorsque $f(z) = \frac{1}{z}$.
   (b) Montrer que $I(f) = 0$ si f admet une limite en 0.
   (c) On suppose que f est méromorphe sur $\mathbb{C}$, admettant un nombre fini de pôles et 0 est un pôle simple de f. Montrer que $I(f) = i\pi\mathrm{Res}(f, 0)$.

2. Soient $a, b \in]0, +\infty[$ et on pose $f(z) = \dfrac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)}$
   (a) Calculer $I(f)$.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)}dx$ en utilisant le contour



Exercice 7. Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\log x)^2}{x^2+1}dx.$$