Préparation au Capes 2010-2011
Intégration - Séries - Suites et séries de fonctions

N. Gozlan

12 septembre 2010

Chapitre 1

Intégration

1.1 Fonctions continues par morceaux

Dans le cadre du programme du capes, la notion d'intégrale

$$\int_I f(t)\,dt$$

est définie pour les fonctions f *continues par morceaux*, définies sur un intervalle I *quelconque* et à *valeurs réelles ou complexes*.

Rappelons qu'une subdivision d'un segment $[a, b]$ est un vecteur $(t_0, t_1, \ldots, t_N)$, $N \geq 1$ dont les coordonnées vérifient

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b.$$

Définition 1.1.1 (Continuité par morceaux sur un segment)**.** *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est dite continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, s'il existe une subdivision $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = b$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à $]t_i, t_{i+1}[$ se prolonge en une fonction continue sur $[t_i, t_{i+1}]$, pour chaque i.*

Lorsque dans la définition précédente, on impose à la restriction de f aux intervalles $]t_i, t_{i+1}[$ d'être constante, on dit que la fonction f est une *fonction en escalier.*

Proposition 1.1.2. *Toute fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ est la somme d'une fonction continue sur $[a, b]$ et d'une fonction en escalier sur $[a, b]$.*

Démonstration. Laissée en exercice. $\square$

Définition 1.1.3 (Continuité par morceaux sur un intervalle)**.** *Soit I un intervalle quelconque ; on dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux sur I, si pour tout segment $J \subset I$, la restriction de f à J est continue par morceaux sur J.*

Proposition 1.1.4. *L'ensemble noté $\mathcal{CM}(I, \mathbb{C})$ des fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^I$ (espace vectoriel de toutes les fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$).*

Démonstration. Laissée en exercice $\square$

1.2 Intégration sur un segment

Dans cette section, on rappelle la définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un *segment.* Nous n'effectuerons pas la construction proprement dite, qui sans être difficile, est néanmoins un peu technique. On renvoie le lecteur à un cours de première année de classe préparatoire MPSI.

1.2.1 Sommes de Riemann

Définition 1.2.1.
• *Une* subdivision pointée *du segment* $[a,b]$ *est un couple* (u,v) *formé d'une subdivision* $u = (t_0, t_1, \dots, t_N)$ *de* $[a,b]$ *et d'un vecteur* $v = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$ *dont les coordonnées vérifient* $x_i \in [t_i, t_{i+1}]$, *pour chaque* $i \in \{0, \dots, N-1\}$.
• *Soit* (u,v) *une subdivision pointée de* $[a,b]$ *; la* somme de Riemann *de* f *associée à* (u,v) *est par définition*

$$\sigma(f,u,v) = \sum_{i=0}^{N-1} (t_{i+1} - t_i) f(x_i).$$

Rappelons qu'on appelle *pas* de la subdivision $u = (t_0, \dots, t_N)$ le nombre $\delta(u) = \max_i (t_{i+1} - t_i)$.

Définition et Théorème 1.2.2. *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *une fonction continue par morceaux ; il existe un unique élément* $S \in \mathbb{C}$ *vérifiant : pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\eta > 0$ *tel que pour toute subdivision pointée* (u,v) *de* $[a,b]$, *on ait :*

$$\delta(u) \leq \eta \Rightarrow |S - \sigma(f,u,v)| \leq \varepsilon.$$

Le nombre S *est appelé l'intégrale de* f *sur* $[a,b]$ *et est noté* $S = \int_a^b f(t)\,dt$.

Autrement dit, l'intégrale de f est le nombre dont s'approchent toutes les sommes de Riemann de f quand le pas de la subdivision tend vers 0.

Proposition 1.2.3. *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ *est continue par morceaux*

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt, \quad \mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt$$

$$\text{et} \quad \overline{\int_a^b f(t)\,dt} = \int_a^b \overline{f(t)}\,dt.$$

1.2.2 Propriétés de base

Elles sont listées dans le théorème suivant :

Théorème 1.2.4. *Soient* $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ *deux fonctions continues par morceaux.*

1. **Linéarité**
$$\int_a^b \alpha f + \beta g\,dt = \alpha \int_a^b f\,dt + \beta \int_a^b g\,dt.$$

2. **Relation de Chasles** *Si* $c \in [a,b]$,
$$\int_a^b f\,dt = \int_a^c f\,dt + \int_c^b f\,dt.$$

3. **Positivité** *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *et* $f \geq 0$, *alors* $\int_a^b f\,dt \geq 0$.

Démonstration. Ces propriétés sont héritées des sommes de Riemann. Montrons par exemple la première. Si (u,v) est une subdivision pointée de $[a,b]$, on a clairement

$$\sigma(\alpha f + \beta g, u, v) = \alpha\sigma(f,u,v) + \beta\sigma(g,u,v).$$

Soit $\varepsilon > 0$; il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour toute subdivision (u,v) avec $\delta(u) \leq \eta$, on ait

$$\left|\int_a^b f\,dt - \sigma(f,u,v)\right| \leq \varepsilon.$$

Il existe aussi $\eta_2 > 2$, tel que pour toute subdivision (u, v) avec $\delta(u) \leq \eta_2$ on ait

$$\left|\int_a^b g\,dt - \sigma(g, u, v)\right| \leq \varepsilon.$$

Donc, si $\delta(u) \leq \eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, on a

$$\begin{aligned}\left|\alpha \int_a^b f\,dt + \beta \int_a^b g\,dt - \sigma(\alpha f + \beta g, u, v)\right| &= \left|\alpha \int_a^b f\,dt + \beta \int_a^b g\,dt - (\alpha\sigma(f, u, v) + \beta\sigma(g, u, v))\right| \\ &\leq |\alpha| \left|\int_a^b f\,dt - \sigma(f, u, v)\right| + |\beta| \left|\int_a^b g\,dt - \sigma(g, u, v)\right| \\ &= (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon.\end{aligned}$$

Comme ε est arbitraire, on conclut par définition de l'intégrale de la fonction continue par morceaux $\alpha f + \beta g$ que

$$\int_a^b \alpha f + \beta g\,dt = \alpha \int_a^b f\,dt + \beta \int_a^b g\,dt.$$

La preuve des autres propriétés est sur le même modèle. □

Une conséquence immédiate de la positivité de l'intégrale est sa croissance :

$$f \leq g \Rightarrow \int_a^b f\,dt \leq \int_a^b g\,dt.$$

La proposition suivante précise la condition de positivité :

Proposition 1.2.5. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux positive. Si f prend une valeur strictement positive en un point où elle est continue, alors $\int_a^b f\,dt > 0$.*

En conséquence directe :
- Une fonction f positive et continue par morceaux est d'intégrale nulle sur $[a, b]$ si et seulement si f est nulle sur $[a, b]$ sauf en un nombre fini de points.
- Une fonction f positive et continue est d'intégrale nulle sur $[a, b]$ si et seulement si f est identiquement nulle sur $[a, b]$.

Démonstration. Si f est continue en $x_o \in [a, b]$ avec $f(x_o) > 0$, alors en prenant $\varepsilon = f(x_o)/2$ dans la définition de la continuité, on obtient $\eta > 0$, tel que pour tout $x \in [a, b]$ tel que $|x - x_o| \leq \eta$, on a $-f(x_o)/2 \leq f(x) - f(x_o) \leq f(x_o)/2$. En particulier,

$$f(x) \geq \frac{f(x_o)}{2}, \quad \forall x \in [a, b] \cap [x_o - \eta, x_o + \eta].$$

Soit h la fonction en escalier valant $f(x_o)/2$ sur le segment $J = [a, b] \cap [x_o - \eta, x_o + \eta]$ et 0 en dehors de ce segment. On a alors $f \geq h$ et donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_a^b f\,dt \geq \int_a^b h\,dt = \frac{f(x_o)}{2}\ell > 0$$

où ℓ est la longueur du segment J. □

L'inégalité triangulaire vérifiée par le module des nombres complexes a pour conséquence le résultat suivant

Proposition 1.2.6 (Inégalité triangulaire intégrale)**.** *Pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, on a*

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$; comme la fonction f est continue par morceaux, il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour toute subdivision pointée (u, v) vérifiant $\delta(u) \le \eta_1$, on ait

$$\left| \int_a^b f\, dt - \sigma(f, u, v) \right| \le \varepsilon.$$

La fonction $|f|$ est aussi continue par morceaux, donc il existe η_2 tel que pour toute subdivision pointée (u, v) vérifiant $\delta(u) \le \eta_1$, on ait

$$\left| \int_a^b |f|\, dt - \sigma(|f|, u, v) \right| \le \varepsilon.$$

Prenons une subdivision (u, v) avec $\delta(u) \le \min(\eta_1, \eta_2)$. On a, par l'inégalité triangulaire,

$$\left| \int_a^b f\, dt \right| \le |\sigma(f, u, v)| + \varepsilon.$$

et

$$\sigma(|f|, u, v) \le \int_a^b |f|\, dt + \varepsilon.$$

Mais, par l'inégalité triangulaire,

$$|\sigma(f, u, v)| = \left| \sum_{i=0}^{N-1} (t_{i+1} - t_i) f(c_i) \right| \le \sum_{i=0}^{N-1} (t_{i+1} - t_i)\, |f(c_i)| = \sigma(|f|, u, v).$$

Finalement, on obtient

$$\left| \int_a^b f\, dt \right| \le \int_a^b |f|\, dt + 2\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on en déduit l'inégalité voulue. $\square$

1.2.3 Intégration et dérivation

Intégrales et primitives

Soit I un intervalle quelconque ; si f est une fonction continue par morceaux sur I, pour tout segment $J = [a, b] \subset I$, l'intégrale de f sur J ($\int_J f\, dt = \int_a^b f\, dt$) est bien définie. Rappelons également la convention suivante : si $a, b \in I$ avec $a > b$, on pose par définition $\int_a^b f\, dt = -\int_b^a f\, dt$. Avec cette convention, la relation de Chasles

$$\int_a^b f\, dt = \int_a^c f\, dt + \int_c^b f\, dt.$$

est vraie pour tous $a, b, c \in I$.

Proposition 1.2.7. *Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I, et $a \in I$. La fonction $F : I \to \mathbb{C} : x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ est continue. De plus, en tout point $x \in I$ où f est continue, la fonction F est dérivable et vérifie $F'(x) = f(x)$.*

Démonstration. Supposons f continue en $x_o \in I$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_o| \le \eta$ on ait $|f(x) - f(x_o)| \le \varepsilon$. Prenons $x \in I \cap]x_o, x_o + \eta]$, on a

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(x_o) - (x - x_o) f(x_o)| &= \left| \int_a^x f(t)\, dt - \int_a^{x_o} f(t)\, dt - (x - x_o) f(x_o) \right| \\
&= \left| \int_{x_o}^x f(t) - f(x_o)\, dt \right| \\
&\le \int_{x_o}^x |f(t) - f(x_o)|\, dt \\
&\le (x - x_o)\varepsilon.
\end{aligned}$$

On voit de même que si $x \in I \cap [x_o - \eta, x_o[$, on a $|F(x) - F(x_o) - (x - x_o)f(x_o)| \leq (x_o - x)\varepsilon$. Dans tous les cas, on conclut que si $x \in I \cap [x_o - \eta, x_o + \eta] \setminus \{x_o\}$, on a

$$\left| \frac{F(x) - F(x_o)}{x - x_o} - f(x_o) \right| \leq \varepsilon.$$

Cela prouve que F est dérivable en x_o de dérivée $f(x_o)$. En particulier, si f est continue sur I tout entier, alors F est dérivable sur I tout entier. On laisse au lecteur le soin de montrer que si f est continue par morceaux, F est continue. On pourra, par exemple, utiliser le fait qu'une fonction continue par morceaux sur un segment est la somme d'une fonction continue et d'une fonction en escalier. $\square$

Rappelons qu'on dit qu'une fonction dérivable $F : I \to \mathbb{C}$ est une *primitive* de $f : I \to \mathbb{C}$, si

$$F'(x) = f(x),$$

pour tout $x \in I$.

Corollaire 1.2.8. *Si f est une fonction continue sur I et $a \in I$, alors les primitives de f sur I sont les fonctions de la forme $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$, où $C \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. Les fonctions de la forme $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C$ sont des primitives de f sur I d'après la proposition précédente. Réciproquement, si G est une primitive de f sur I, alors $G - F$ est une fonction de dérivée nulle et donc constante. $\square$

Formules d'intégration

Voyons les répercussions pratiques de ces résultats sur le calcul d'intégrales.
Tout d'abord, pour calculer $\int_a^b f(t)\,dt$, où $f : I \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, il suffit de trouver une primitive F de f et d'utiliser la formule

$$\int_a^b f(t)\,dt = [F]_a^b,$$

où $[F]_a^b := F(b) - F(a)$.
En particulier, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a la formule

$$\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a).$$

Une autre technique souvent utile est l'intégration par partie :

Corollaire 1.2.9 (Formule d'intégration par partie)**.** *Soient $u, v : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$; pour tous $a, b \in I$, on a la formule d'intégration par partie :*

$$\int_a^b u'v\,dt = [uv]_a^b - \int_a^b uv'\,dt.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $(uv)' = u'v + uv'$ et donc

$$[uv]_a^b = \int_a^b (uv)'\,dt = \int_a^b u'v\,dt + \int_a^b uv'\,dt.$$

$\square$

Enfin, on peut calculer une intégrale en effectuant un changement de variable :

Proposition 1.2.10. *Soit $\varphi : J \to I$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue ; alors pour tous $a, b \in J$, on a*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f \circ \varphi(t)\varphi'(t)\,dt$$

Démonstration. La fonction f étant continue sur I elle admet au moins une primitive F sur I. D'après la formule de dérivation d'une composée de fonctions, on a

$$\frac{d}{dt}\left(F \circ \varphi\right)(t) = f \circ \varphi(t)\varphi'(t).$$

Donc en intégrant sur J, on obtient

$$F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(F \circ \varphi\right)(t)\,dt = \int_a^b f \circ \varphi(t)\varphi'(t)\,dt.$$

Or comme F est une primitive de f, on a

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)),$$

ce qui achève la preuve. □

Exemple. Les intégrales de Wallis. On pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,dt.$$

On va établir plusieurs propriétés de ces intégrales très classiques.

• Calculs des premières valeurs.

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,dt = \frac{\pi}{2} \qquad W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\,dt = [\sin]_0^{\pi/2} = 1.$$

• La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive.
En effet, pour tout $t \in [0, \pi/2]$,

$$\cos^n(t) \geq \cos^{n+1}(t) \geq 0,$$

d'où le résultat en intégrant entre 0 et $\pi/2$.
• Formules de récurrence.
Soit $n \geq 2$;

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}(t)(1 - \sin^2(t))\,dt = W_{n-2} - \int_0^{\pi/2} \Big(\cos^{n-2}(t)\sin(t)\Big)\sin(t)\,dt.$$

Ensuite on intègre par partie la dernière intégrale en posant $u' = \cos^{n-2}\sin$ et $v = \sin$, on obtient (après calculs)

$$W_n = W_{n-2} - \frac{1}{n-1}W_n.$$

ou encore

$$W_n = \frac{n-1}{n}W_{n-2}.$$

• La suite $I_n = nW_nW_{n-1}$, $n \geq 1$ est constante égale à $\pi/2$.
En effet, on vient de voir que $nW_n = (n-1)W_{n-2}$, donc en multipliant cette égalité par W_{n-1}, on obtient $I_n = I_{n-1}$. Il suffit ensuite de calculer $I_1 = \pi/2$.
• On a l'équivalent

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

En effet, comme W_n est décroissante, on a $W_n \leq W_{n-1}$. Mais, d'après la relation de récurrence, on a aussi $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2} \geq \frac{n-1}{n} W_{n-1}$ (par décroissance). On a donc

$$\frac{n-1}{n} W_{n-1} \leq W_n \leq W_{n-1}.$$

On en déduit que $W_n \sim W_{n-1}$ lorsque $n \to +\infty$. Comme on sait par ailleurs que $nW_nW_{n-1} = \pi/2$, on conclut que $nW_n^2 \sim \pi/2$, lorsque $n \to +\infty$, ce qui donne le résultat.
• Formules explicites.
Pour $n = 2p$, en itérant la relation de récurrence, on obtient

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} W_{2(p-1)} = \cdots = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{(2p)(2(p-1))\cdots 2} W_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

Pour $n = 2p+1$, on obtient de la même manière

$$W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

1.3 Intégration sur un intervalle quelconque

Dans cette section, nous étendons la définition de l'intégrale à des fonctions continues par morceaux à valeurs réelle ou complexes et définies sur un *intervalle I quelconque.* Dans tout ce qui suit, I sera un intervalle non vide, dont nous désignerons la borne inférieure par a et la borne supérieure par b (appartenant à $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).

1.3.1 Intégrale des fonctions positives

Définitions

Définition 1.3.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux et positive ; on dit que f est* intégrable sur *I s'il existe un nombre $M > 0$ tel que pour tout segment J inclus dans I, on ait $\int_J f\,dt \leq M$. L'*intégrale de f sur I *notée $\int_I f\,dt$ est alors définie par*

$$\int_I f\,dt = \sup\left\{\int_J f\,dt \ ; J \subset I \ \textit{segment}\right\}.$$

Voyons deux reformulations de la définition précédente. Pour énoncer la première, nous aurons besoin de la définition suivante :

Définition 1.3.2. *Une* suite exhaustive *de segments de I est par définition une suite croissante $(J_n)_n$ de segments inclus dans I dont la réunion est l'intervalle I tout entier.*

Il est facile de voir qu'il existe toujours au moins une suite exhaustive.

Proposition 1.3.3 (Reformulation 1)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux et positive et $(J_n)_n$ une suite exhaustive de segments de I ; il y a équivalence entre*

1. *La fonction f est intégrable sur I,*
2. *La suite $\left(\int_{J_n} f\,dt\right)_n$ est majorée,*
3. *La suite $\left(\int_{J_n} f\,dt\right)_n$ converge.*

Dans ce cas, on a

$$\int_I f\,dt = \sup_n \int_{J_n} f\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f\,dt$$

Démonstration.
(1) $\Rightarrow$ (2). Immédiat, d'après la définition.
(2) $\Rightarrow$ (3). En effet, comme f est positive et la suite J_n est croissante, on en déduit que la suite $\int_{J_n} f\,dt$ est croissante. Pour converger, il lui suffit donc d'être bornée.
(3) $\Rightarrow$ (1). Soit J un segment de I. Ecrivons $J = [a, b]$. Comme $\cup_{n\in\mathbb{N}} J_n = I$, il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tel que $a \in J_{n_1}$ et $b \in J_{n_2}$. Posons $n_o = \max(n_1, n_2)$. Comme la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a $J_{n_1} \subset J_{n_o}$ et $J_{n_2} \subset J_{n_o}$, et donc J_{n_o} contient a et b. Enfin, comme J_{n_o} est un segment, on a $J = [a, b] \subset J_{n_o}$. La suite $\int_{J_n} f\,dt$ étant convergente, elle est majorée par un certain $M > 0$. On a $\int_J f\,dt \le \int_{J_{n_o}} f\,dt \le M$. Cela prouve que la fonction f est intégrable.

L'inégalité
$$\int_I f\,dt \ge \sup_n \int_{J_n} f\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f\,dt$$
est immédiate. Le dernier argument montre qu'on a aussi (en prenant $M = \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f\,dt$)
$$\int_I f\,dt \le \lim_{n\to+\infty} \int_{J_n} f\,dt,$$
d'où l'égalité attendue. □

Proposition 1.3.4 (Reformulation 2)**.** *Soient $f : I \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux et positive et c un point quelconque de I ; posons $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, pour tout $x \in I$. Les propositions suivantes sont équivalentes*

1. *La fonction f est intégrable,*
2. *La fonction F est bornée,*
3. *La fonction F a des limites finies en a et en b.*

Dans ce cas, on a
$$\begin{aligned}\int_I f(t)\,dt &= \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x)\\ &= \lim_{x\to a} \int_x^c f(t)\,dt + \lim_{x\to b} \int_c^x f(t)\,dt.\end{aligned}$$

Démonstration.
(1) $\Rightarrow$ (2). Comme f est intégrable, il existe $M > 0$, tel que pour tout segment $J \subset I$, $\int_J f\,dt \le M$. En particulier, si $x \ge c$, $F(x) = \int_{[c,x]} f\,dt \le M$ et si $x \le c$, $F(x) = -\int_{[x,c]} f\,dt \ge -M$. Par suite, $|F|$ est majorée par M sur I.
(2) $\Rightarrow$ (3). La fonction F est croissante sur I. En effet, si $y \ge x$, $F(y) - F(x) = \int_x^y f\,dt \ge 0$ (car f est positive). Pour que F admette des limites finies en a et en b, il lui suffit donc d'être bornée.
(3) $\Rightarrow$ (1). La fonction F est croissante sur I. Comme F admet des limites finies aux bornes de I, F est bornée. Plus précisément, on a
$$\lim_{x\to a} F(x) \le F \le \lim_{x\to b} F(x)$$
Si $J = [\alpha, \beta] \subset J$, on a donc
$$\int_J f\,dt = \int_\alpha^\beta f\,dt = F(\beta) - F(\alpha) \le \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x). \tag{1.1}$$
Ceci étant valable pour tout segment $J \subset I$, cela prouve l'intégrabilité de f.

On a l'inégalité
$$\int_I f\,dt \ge \int_x^y f\,dt = F(y) - F(x),$$

pour tout couple $x \leq y$ de I. Donc, en passant à la limite quand $x \to a$ puis quand $y \to b$, on obtient

$$\int_I f\,dt \geq \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x).$$

Mais (**??**), montre que l'inégalité est aussi vraie dans l'autre sens, d'où l'égalité attendue. $\square$

La proposition suivante donne des exemples importants de fonctions intégrables qui servent souvent de point de comparaison pour montrer l'intégrabilité d'une fonction.

Proposition 1.3.5 (Exemples de Riemann)**.**
- *Soit $a > 0$; la fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ est intégrable sur $I = [a, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.*
- *Soient $a < b \in \mathbb{R}$; la fonction $t \mapsto 1/(b-t)^\alpha$ est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si $\alpha < 1$.*

Démonstration. Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors

$$F(x) = \int_a^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_a^x = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right)$$

La fonction F est bornée sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$. Par ailleurs, pour $\alpha = 1$, $F(x) = \int_a^x \frac{1}{t}\,dt = \log(x/a)$ n'est pas bornée sur $[a, +\infty[$. D'après le critère d'intégrabilité vu juste au dessus, on conclut que $t \mapsto 1/t^\alpha$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ si et seulement si $\alpha > 1$. L'autre exemple se traite de la même manière. $\square$

Comment prouver l'intégrabilité d'une fonction positive ?

On commence par scinder les problèmes en utilisant le lemme suivant :

Lemme 1.3.6. *Soit I un intervalle et c un point de I ; une fonction continue par morceaux $f : I \to \mathbb{R}^+$ est intégrable si et seulement si ses restrictions aux intervalles $I \cap]-\infty, c]$ et $I \cap [c + \infty[$ sont toutes les deux intégrables. Dans ce cas, on a*

$$\int_I f(t)\,dt = \int_{I\cap]-\infty,c]} f(t)\,dt + \int_{I\cap[c+\infty[} f(t)\,dt.$$

Démonstration. Découle facilement de la formulation 2 de l'intégrabilité (exercice). $\square$

Ensuite on compare f à une fonction dont l'intégrabilité est déjà connue (par exemple les fonctions $1/t^\alpha$). Le résultat de base est la proposition suivante :

Proposition 1.3.7. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues par morceaux, positives et telles que $0 \leq f \leq g$.*

1. *Si g est intégrable, alors f est intégrable.*
2. *Si f n'est pas intégrable, alors g n'est pas intégrable.*

Démonstration. Si g est intégrable sur I, il existe $M > 0$ tel que $\int_J g\,dt \leq M$ pour tout segment $J \subset I$. Comme $f \leq g$, on a, par croissance de l'intégrale, $\int_J f\,dt \leq \int_J g\,dt \leq M$. Par définition, cela prouve que f est intégrable. $\square$

Il existe plusieurs variantes du résultat précédent :

Proposition 1.3.8. *Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}^+$ ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) deux fonctions continues par morceaux et positives.*

1. *Si $f(x) = O(g(x))$ ou si $f(x) = o(g(x))$ quand $x \to b$, alors l'intégrabilité de g entraîne l'intégrabilité de f et la non-intégrabilité de f entraîne la non-intégrabilité de g.*
2. *Si $f(x) \sim g(x)$ quand $x \to b$, alors f est intégrable si et seulement si g est intégrable.*

Démonstration. (1) La relation $f = O(g)$ signifie qu'il existe M et $c \geq a$ tels que $0 \leq f(x) \leq Mg(x)$, pour tout $x \geq c$. D'après la proposition précédente, on conclut que f est intégrable sur $[c, +\infty[$. Comme f est continue par morceaux sur $[a, c]$, elle est intégrable sur ce segment. Par suite, f est intégrable sur $[a, +\infty[$. Si maintenant, $f = o(g)$, alors on a *a fortiori* $f = O(g)$. Ce qu'on vient de dire, entraîne donc l'intégrabilité de f.
(2) Si $f \sim g$, alors, en particulier, $f = O(g)$ et $g = O(f)$. L'intégrabilité d'une des deux fonctions entraîne donc l'intégrabilité de l'autre. □

En prenant $g(t) = 1/t^\alpha$ ou $g(t) = 1/(t-a)^\alpha$, on obtient le résultat suivant

Corollaire 1.3.9 (Règle du $t^\alpha f$)**.**
• *Soit f une fonction continue par morceaux et positive sur $[a, +\infty[$, $a > 0$. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $t^\alpha f \to 0$ quand $t \to \infty$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.*
• *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}$. S'il existe $\alpha < 1$ tel que $(b-t)^\alpha f(t) \to 0$ quand $t \to b^-$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.*

Exemple.
La fonction continue positive f définie pour tout $t \in]0, 1]$ par

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

est intégrable sur $]0, 1]$. En effet, lorsque $t \to 0$, on a $f(t) \to 1$. Donc $f(t) = O(1)$ lorsque $t \to 0$. La fonction constante $t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0, 1]$ car cet intervalle est *de longueur finie.* D'après le théorème de comparaison, on conclut que f est aussi intégrable sur cet intervalle.

Exemple.
Pour tout $a > 1$, la fonction continue positive

$$f(t) = t^{a-1}e^{-t}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$. Pour le démontrer, il suffit de montrer son intégrabilité sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.
• Sur $]0, 1]$. Quand $t \to 0^+$, on a $f(t) \sim \frac{1}{t^{1-a}}$. Comme $1 - a < 1$, la fonction $t \mapsto 1/t^{1-a}$ est intégrable sur $]0, 1]$. D'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, il en est donc de même pour f.
• Sur $[1, +\infty[$. Par croissance comparée,

$$t^2 f(t) = t^{a+1}e^{-t} \to 0, \quad \text{lorsque } t \to +\infty.$$

Par conséquent, $f(t) = o(1/t^2)$ lorsque $t \to +\infty$. La fonction $t \mapsto 1/t^2$ étant intégrable sur $[1, +\infty[$, f l'est aussi, par le théorème de comparaison.

Cette étude d'intégrabilité conduit à la définition suivante.

Définition 1.3.10 (La fonction Γ d'Euler.)**.** *La fonction $\Gamma :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ est définie par*

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}\, dt.$$

Exemple. Considérons la fonction f définie par

$$f(t) = \frac{e^{-t} - 1 + t}{t^{5/2}},$$

pour tout $t > 0$. Remarquons d'abord que la fonction f est positive. Cela vient de l'inégalité $e^u \geq 1 + u$ valable pour tout $u \in \mathbb{R}$. Montrons que f est intégrable sur $]0, +\infty[$. Pour cela, il

suffit de montrer qu'elle est intégrable sur $]0,1]$ et sur $[1,+\infty[$.
• Sur $[1,+\infty[$. On remarque que

$$f(t) \sim \frac{t}{t^{5/2}} = \frac{1}{t^{3/2}}, \quad \text{lorsque } t \to +\infty.$$

La fonction $t \mapsto 1/t^{3/2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. Donc, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on conclut que f est intégrable sur $[1,+\infty[$.
• Sur $]0,1]$. Ecrivons le développement limité de f en 0 :

$$f(t) = \frac{e^{-t}-1+t}{t^{5/2}} = \frac{1-t+t^2/2+o(t^2)-1+t}{t^{5/2}} = \frac{1}{2t^{1/2}} + o(1/t^{1/2}) \sim \frac{1}{2t^{1/2}},$$

quand $t \to 0^+$. La fonction $t \mapsto 1/t^{1/2}$ est intégrable sur $]0,1]$; dons, d'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on conclut que f est intégrable sur $]0,1]$.

1.3.2 Intégrales des fonctions réelles ou complexes

A présent, nous considérons des fonctions f continues par morceaux sur un intervalle I et à valeurs réelles ou complexes.

Définition 1.3.11. *Soit f une fonction continue par morceaux à valeurs réelles ou complexes ; on dit que f est intégrable si la fonction (continue par morceaux) $|f|$ est intégrable (au sens de la définition **??**).*

Pour déterminer si une fonction à valeurs complexes f est intégrable, on cherchera à appliquer les résultats de comparaison de la section précédente à la fonction $|f|$ qui est à valeurs positives.

Définition 1.3.12. *Soit f une fonction continue par morceaux à valeurs réelles ou complexes et intégrable sur I.*
• *Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, on définit l'intégrale de f sur I par la formule*

$$\int_I f\,dt = \int_I f_+\,dt - \int_I f_-\,dt,$$

où $f_+ = \max(f,0)$ et $f_- = \max(-f,0)$.
• *Si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$, on définit l'intégrale de f sur I par la formule*

$$\int_I f\,dt = \int_I \mathrm{Re}(f)\,dt + i\int_I \mathrm{Im}(f)\,dt.$$

Exemple. La fonction

$$f(t) = \frac{\cos(t)}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$. En effet, $|f(t)| = \frac{|\cos(t)|}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2} = g(t)$. Comme $g(t) = O(1/t^2)$, lorsque $t \to +\infty$ la fonction g est intégrable sur $[1,+\infty[$. Etant continue sur $[0,1]$, elle est aussi intégrable sur $[0,1]$, et par conséquent intégrable sur $[0,+\infty[$. Par parité, g est aussi intégrable sur $]-\infty,0]$, et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier. D'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on conclut que $|f|$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et donc que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

1.3.3 Propriétés de l'intégrale sur un intervalle quelconque

L'intégrale sur un intervalle quelconque hérite de la plupart des propriétés de l'intégrale sur un segment mentionnées plus haut. Récapitulons :

Théorème 1.3.13. *Soient f, g deux fonctions continues par morceaux sur I à valeurs réelles ou complexes.*

1. ***Linéarité.*** *Si f et g sont intégrables, alors pour tous α, β, la fonction $\alpha f + \beta g$ est intégrable et $\int_I \alpha f + \beta g \, dt = \alpha \int_I f \, dt + \beta \int_I g \, dt$.*
2. ***Relation de Chasles.*** *Soit $c \in I$; la fonction f est intégrable si et seulement si les restrictions de f aux intervalles $I \cap]-\infty, c]$ et $I \cap [c, +\infty[$ sont intégrables. Si c'est le cas, on a $\int_I f \, dt = \int_{I \cap]-\infty,c]} f \, dt + \int_{I \cap [c,+\infty[} f \, dt$.*
3. ***Positivité.*** *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est positive et intégrable sur I alors $\int_I f \, dt \geq 0$. Si f est supposée en plus continue, $\int_I f \, dt = 0$ si et seulement si f est identiquement nulle sur I.*
4. ***Inégalité triangulaire.*** *Si f est intégrable sur I, $|\int_I f \, dt| \leq \int_I |f| \, dt$.*
5. ***Limites d'intégrales.*** *Notons $a = \inf I$ et $b = \max I$; si f est intégrable sur I, alors pour tout $c \in I$,*

$$\int_c^x f(t) \, dt \to \int_c^b f(t) \, dt \text{ quand } x \to b \quad \text{et} \quad \int_x^c f(t) \, dt \to \int_a^c f(t) \, dt \text{ quand } x \to a.$$

   En particulier, si $a_n \to a$ et $b_n \to b$, alors

$$\int_{a_n}^{b_n} f(t) \, dt \to \int_a^b f(t) \, dt, \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

6. ***Changement de variable.*** *On suppose que f est continue sur I et que $\varphi : J \to I$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ entre les intervalles J et I. La fonction f intégrable sur I si et seulement si $f \circ \varphi \cdot \varphi'$ est intégrable sur J, et dans ce cas, on a la formule*

$$\int_I f(t) \, dt = \int_J f(\varphi(u)) |\varphi'(u)| \, du.$$

Nous omettons les preuves, toutes assez élémentaires, de ces propriétés.

Remarque 1.3.14 (Intégration par partie).
• *On prendra garde à la formule d'intégration par partie qui peut être fausse si l'on n'est pas sur un segment. Considérons en effet la fonction $f(t) = \sin(t)/t$ définie sur $I =]0, 1]$. On a vu plus haut que la fonction f était intégrable sur I. Si on effectue une intégration par partie sans prendre de précaution, on peut écrire*

$$\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} \, dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos(t)}{t^2} \, dt.$$

Or $[-\cos(t)/t]_0^1 = +\infty$ et la fonction positive $t \mapsto \cos(t)/t^2$ qui est équivalente à $1/t^2$ lorsque $t \to 0$ n'est pas intégrable. La ligne du dessus n'a donc aucun sens.
• *Si l'on doit faire une intégration par partie pour calculer une intégrale du type $\int_I u'v \, dt$, il est préférable de se ramener à un segment J inclus dans I, d'écrire la formule d'intégration par partie sur J (qui est toujours valable) puis de faire tendre les bornes du segment J vers celles de I (en utilisant le point 5 du théorème précédent).*

Exemple. Fonction Γ d'Euler.
La fonction Γ vérifie la relation :

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \quad \forall a > 1.$$

En effet, pour tout $0 < x$, une intégration par partie donne :

$$\begin{aligned}\int_0^x t^a e^{-t}\,dt &= [-t^a e^{-t}]_0^x + a\int_0^x t^{a-1}e^{-t}\,dt \\ &= -x^a e^{-x} + a\int_0^x t^{a-1}e^{-t}\,dt.\end{aligned}$$

Si $a > 1$, on sait que les fonctions $t \mapsto t^a e^{-t}$ et $t \mapsto t^{a-1}e^{-t}$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$. Par conséquent,

$$\int_0^x t^a e^{-t}\,dt \to \Gamma(a+1) \quad \text{et} \quad \int_0^x t^{a-1}e^{-t}\,dt \to \Gamma(a),$$

lorsque $x \to +\infty$ (d'après le point 5 du théorème précédent). Comme $x^a e^{-x} \to 0$, quand $x \to +\infty$, on obtient la relation fonctionnelle annoncée. En particulier, comme $\Gamma(1) = 1$, on voit sans peine que

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemple. Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt.$$

(on voit sans problème que la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est bien intégrable sur $[0, +\infty[$.)
La fonction $\varphi : t \mapsto t^2$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ entre $[0, +\infty[$ et $[0, +\infty[$. Effectuons le changement de variable $u = t^2$.

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (t^2)^{(n-1)/2} e^{-t^2} 2t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} u^{(n-1)/2} e^{-t}\,dt.$$

Donc

$$M_n = \frac{1}{2}\Gamma((n+1)/2), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On a vu plus haut que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, pour tout $a > 1$. On en déduit la relation de récurrence

$$M_n = \frac{(n-1)}{2} M_{n-2}.$$

On en tire, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$M_{2p} = \frac{2p-1}{2}\frac{2p-3}{2}\cdots\frac{1}{2}M_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p}}M_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}}\sqrt{\pi}$$

et

$$M_{2p+1} = \frac{1}{2}\Gamma(p+1) = \frac{p!}{2}.$$

Remarque 1.3.15. *Si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue par morceaux, il peut arriver que la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ait une limite quand $x \to +\infty$, sans pour autant que f soit une fonction intégrable sur $[a, +\infty[$. Dans ce cas, on parle d'*intégrale impropre. *L'exemple le plus classique est la fonction*

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$$

définie sur $[1, \infty[$. On verra que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$, mais que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

1.4 Intégrales dépendant d'un paramètre

Dans tout ce qui suit, I sera un intervalle non vide quelconque et A une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

Le but de cette section est d'étudier des fonctions de la forme

$$F(x) = \int_I f(x,t)\,dt,$$

où $f : A \times I \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I. Les fonctions F de ce type sont appelées "intégrales à paramètre".
Le premier résultat donne des conditions pour qu'une intégrale à paramètre soit continue.

Théorème 1.4.1. *Soit $f : A \times I \to \mathbb{R}$; on suppose que*

1. *Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I.*
2. *Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A.*
3. *Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable telle que*

$$\forall x \in A, \quad \forall t \in I, \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t).$$

Sous ces hypothèses, la fonction $F(x) = \int_I f(x,t)\,dt$, $x \in A$ est bien définie et est continue sur A.

Démonstration. C'est une conséquence assez simple du théorème de convergence dominée qui sera présenté à la fin du dernier chapitre de ce polycopié.
La condition $\forall x \in A, \forall t \in I, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$ entraîne que pour tout $x \in A$, la fonction continue par morceaux $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur I. La fonction F est donc bien définie sur A.
Pour montrer que F est continue sur A, nous allons utiliser la caractérisation par les suites, et montrer que pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers $a \in A$, on a $F(a_n) \to F(a)$, quand $n \to +\infty$. Posons en effet, $g_n(t) = f(a_n, t)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$. On définit ainsi une suite de fonctions. Pour tout $t \in I$, la continuité de la fonction $x \mapsto f(x,t)$, permet de conclure que $f(a_n,t) \to f(a,t)$, quand $n \to +\infty$. La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement vers la fonction $t \mapsto f(a,t)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|g_n| \leq \varphi$ et φ est intégrable. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, et conclure que $F(a_n) = \int_I g_n(t)\,dt \to \int_I f(a,t)\,dt = F(a)$. □

Passons à présent à la dérivabilité des intégrales à paramètre.

Théorème 1.4.2. *Soit $f : J \times I \to \mathbb{R}$, où J est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que :*

1. *Pour tout $x \in J$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.*
2. *Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur J, et la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux pour tout $x \in J$.*
3. *Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable telle que*

$$\forall x \in J, \quad \forall t \in I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t).$$

Sous ces hypothèses, la fonction $F(x) = \int_I f(x,t)\,dt$, $x \in J$ est dérivable sur J, et sa dérivée s'écrit

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt, \quad \forall x \in J.$$

Démonstration. Soit $x_o \in J$; pour tout $x \neq x_o$, on a

$$\frac{F(x) - F(x_o)}{x - x_o} = \int_I \frac{f(x,t) - f(x_o,t)}{x - x_o}\, dt.$$

Posons

$$h(x,t) = \frac{f(x,t) - f(x_o,t)}{x - x_o} \text{ si } x \neq x_o \quad \text{et} \quad h(x_o,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_o,t)$$

Pour tout $t \in I$ fixé, la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur J. De plus, d'après le théorème des accroissements finis,

$$|h(x,t)| \leq \sup_{z \in [x,x_o]} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(z,t) \right| \leq \varphi(t),$$

la dernière inégalité venant de l'hypothèse de domination. Comme par ailleurs la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux pour tout $x \in J$, on est en mesure d'appliquer le théorème précédent. On conclut que la fonction $H : J \to \mathbb{R}$ définie par $H(x) = \int_I h(x,t)\, dt$ est continue. En particulier, $H(x) \to H(x_o)$, lorsque $x \to x_o$, c'est à dire

$$\frac{F(x) - F(x_o)}{x - x_o} \to \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_o,t)\, dt, \quad \text{quand } x \to x_o.$$

On en déduit que $F'(x_o)$ a bien l'expression voulue. $\square$

Exemple. Dérivée de la fonction Γ.
On rappelle que Γ est la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt,$$

c'est donc l'intégrale à paramètre associée à la fonction

$$f :]1, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R} : (x,t) \mapsto t^{x-1} e^{-t}.$$

Nous allons montrer que la fonction Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$, et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a la formule

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^k t^{x-1} e^{-t}\, dt, \quad \forall x > 1. \tag{1.2}$$

Pour cela, il suffit de montrer que Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,b]$, pour tout $1 < a < b < +\infty$. Un simple calcul donne

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \ln(t)^k t^{x-1} e^{-t}.$$

Donc, si $x \in [a,b]$, on a

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) \right| \leq |\ln(t)|^k (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t}.$$

Pour tout $k \geq 0$, posons $\varphi_k(t) = |\ln(t)|^k (t^{a-1} + t^{b-1}) e^{-t}$, $t > 0$ et montrons que cette fonction est intégrable sur $]0, +\infty[$. Quand $t \to 0^+$, on voit $\varphi_k(t) = o(1/t^{1-a/2})$. En effet, par croissance comparée, $\varphi_k(t) t^{1-a/2} = |\ln(t)|^k \left(t^{a/2} + t^{b-a/2}\right) e^{-t} \to 0$, quand $t \to 0^+$. Quand $t \to +\infty$, $\varphi_k(t) = o(1/t^2)$ (toujours par croissance comparée). D'après le théorème de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on en déduit que φ_k est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$ et par suite sur $]0, +\infty[$ tout entier.

A présent, nous pouvons démontrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b]$ et vérifie (**??**).
• Pour $k = 0$. La fonction f vérifie clairement les conditions (1) et (2) du Théorème **??** et pour tout $x \in [a,b]$, $t \mapsto |f|(x,t)$ est dominée par φ_0 qui est une fonction intégrable sur $]0, +\infty[$. Donc,

d'après le Théorème **??**, on conclut que Γ est de classe $\mathcal{C}^0$ (c'est-à-dire continue) sur $[a, b]$.

• Supposons démontré que Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a, b]$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et qu'on a la formule (**??**). Montrons que Γ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Cela revient à démontrer que $\Gamma^{(k)}$ est $\mathcal{C}^1$. Pour cela, vérifions que $(x, t) \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ vérifie les hypothèses du Théorème **??**. Les conditions (1) et (2) sont faciles à vérifier, et d'après ce qu'on a vu plus haut, on a pour tout $x \in [a, b]$, $\left|\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}}(t, x)\right| \leq \varphi_{k+1}(t)$, qui est intégrable sur $]0, +\infty[$. On peut donc appliquer le Théorème **??**, et conclure que $\Gamma^{(k)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. On obtient aussi la formule (**??**) au rang $k+1$, ce qui achève la récurrence.

Chapitre 2

Séries

2.1 Introduction

Dans tout le chapitre, $(E, \| \cdot \|)$ sera un espace vectoriel normé de dimension finie. Les cas les plus fréquents seront $E = \mathbb{R}$ ou $E = \mathbb{C}$, mais on pourra rencontrer également $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ensemble des matrices de taille n.
Etant donnée une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E, on lui associe la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$U_n := \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \ldots + u_n.$$

Cette suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la *série de terme général* (u_n). On la désigne, en abrégé, par "la série $\sum u_n$."
Voici le vocabulaire employé pour l'étude de la série $\sum u_n$:

Définition 2.1.1.
- *On dit que la série* $\sum u_n$ converge *si la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*
- *On dit que la série* $\sum u_n$ diverge *si la suite* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est divergente (c'est-à-dire, non convergente).*
- *Si la série* $\sum u_n$ *est convergente et si* U *est la limite de la suite* U_n*, on écrit*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = U.$$

  Ce nombre $U = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ *s'appelle la* somme *de la série* $\sum u_n$.
- *On suppose que la série* $\sum u_n$ *est convergente. Le reste de la série* $\sum u_n$ *est la* suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par*

$$R_n := U - U_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{N} u_k =: \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

  On remarque que : le reste d'une série convergente tend vers 0.
- *On dit que la série* $\sum u_n$ *est une* série positive *si* $u_n \geq 0$ *pour tout* $n \geq 0$.

Voici maintenant un résultat évident qui permet d'écarter des séries trivialement divergentes.

Théorème 2.1.2. *Si la série* $\sum u_n$ *est convergente, alors* $u_n \to 0$*, quand* $n \to \infty$.

Démonstration. On a la relation très utile suivante :

$$u_n = U_n - U_{n-1}$$

Comme la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, on a bien que $u_n \to 0$. □

La réciproque de cette proposition est fausse. Voici un contre-exemple que l'on va traiter plus tard : $u_n = \frac{1}{n}$, pour $n \geq 1$. La suite u_n tend bien vers 0 mais la série $\sum u_n$ est divergente.

Donnons un exemple très classique de séries convergentes ou divergentes :

Proposition 2.1.3 (Séries géométriques)**.** *Soit $r \in \mathbb{C}$;*

1. *Si $|r| < 1$, la série $\sum r^n$ converge. On a de plus*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}.$$

2. *Si $|r| \geq 1$, la série $\sum r^n$ diverge.*

Démonstration. Si $|r| \geq 1$, $|r^n| = |r|^n \geq 1$, et par conséquent r^n ne tend pas vers 0. La série $\sum r^n$ est donc grossièrement divergente (son terme général ne tend même pas vers 0).
Si $|r| < 1$, tout vient de l'identité algébrique suivante :

$$(1-r)\sum_{k=0}^{n} r^k = 1 - r^{n+1}.$$

Or $|r^{n+1}| = |r|^{n+1} \to 0$; donc $\sum_{k=0}^{n} r^k \to 1/(1-r)$. □

Théorème 2.1.4 (Opérations sur les séries convergentes)**.** *Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors, pour tous nombres λ, μ, la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et on a*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

Démonstration. Cela découle directement des théorèmes d'opérations sur les suites convergentes. □

Théorème 2.1.5. *On ne modifie pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de termes. (En cas de convergence, on modifie bien sûr la somme de la série.)*

Démonstration. Supposons qu'à partir d'un certain rang $N_0 \geq 0$, on ait $u_n = v_n$. Alors, pour $n \geq N_0$,

$$U_n - V_n = \sum_{k=0}^{n}(u_k - v_k) = \sum_{k=0}^{N_0}(u_k - v_k) \ = \ \text{brave nombre fixé} .$$

Par conséquent la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. □

Enfin, terminons cette introduction en explicitant la condition de Cauchy pour les séries.
Comme E est un espace vectoriel normé de dimension finie, E est complet. Cela veut dire qu'une suite est convergente si et seulement si elle est de Cauchy. En particulier, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. On remarque que,

$$U_{n+p} - U_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k,$$

d'où le théorème suivant

Théorème 2.1.6 (Critère de Cauchy pour les séries)**.** *La série $\sum u_n$ converge si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang $N \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq N$ et $p \geq 0$ on a*

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right\| \leq \varepsilon. \tag{2.1}$$

2.2 Séries à termes positifs

Commençons par quelques généralités :

- En faisant $u_n \longleftrightarrow -u_n$, on ramène l'étude d'une série à termes négatifs à l'étude d'une série à termes positifs. Les théorèmes de ce chapitre s'appliquent, en fait, aux séries dont les termes sont de signe constant.
- On rappelle qu'on ne modifie pas la nature d'une série si on modifie un nombre fini de termes. Donc tout ce qu'on va dire s'applique aussi aux séries dont les termes sont positifs, *à partir d'un certain rang* (ou négatifs à partir d'un certain rang).
- **Observation cruciale à retenir** : si la série $\sum u_n$ est à termes positifs, alors les sommes partielles U_n forment une suite *croissante*. Par conséquent, on a, par convergence monotone :

  $$\text{La série à termes positifs } \sum u_n \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{La suite } U_n \text{ est bornée,}$$

  ou encore :

  $$\text{La série à termes positifs } \sum u_n \text{ diverge} \quad \Longleftrightarrow \quad U_n \to +\infty.$$

La proposition suivante établit la convergence ou la divergence des séries de Riemann $\sum 1/n^\alpha$ en fonction de la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.2.1 (Séries de Riemann)**.** *La série $\sum 1/n^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration.
Cas $\alpha > 1$. Appliquons l'inégalité des accroissements finis à la fonction $f(t) = \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ entre les points $n-1$ et n $(n \geq 2)$

$$\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} = f(n) - f(n-1) \leq \max_{t \in [n-1,n]} f'(t) = f'(n) = (1-\alpha)\frac{1}{n^\alpha}$$

Autrement dit,

$$0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right).$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}\sum_{k=2}^{N}\left(\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right) = 1 + \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right) \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum 1/n^\alpha$ sont donc bornées par $\alpha/(\alpha-1)$. D'après la remarque faite juste au dessus, on conclut que la série $\sum 1/n^\alpha$ est convergente.

Cas $\alpha \leq 1$. Raisonnons par l'absurde et supposons que la série $\sum 1/n^\alpha$ converge. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^\alpha$; la suite S_n vérifie alors le critère de Cauchy. Par suite, (en prenant $\varepsilon = 1/2$) il existe N tel que pour tout $n \geq N$ et tout $p \geq 0$,

$$S_{n+p} - S_n \leq 1/2.$$

En particulier, on doit avoir $S_{2n+1} - S_n \leq 1/2$, pour tout $n \geq N$. Or, pour tout $n \geq 1$

$$S_{2n+1} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k^\alpha} \geq \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{n+1} = 1.$$

On obtient donc l'inégalité $1 \leq 1/2$ - absurde. $\square$

2.2.1 Les théorèmes de comparaison pour les séries positives

Comme pour les questions d'intégrabilité des fonctions positives, la méthode la plus couramment employée pour déterminer la nature d'une série est de comparer son terme général à celui d'une série dont la nature est connue. On utilisera pour cela l'un des théorèmes de comparaison ci-dessous :

Théorème 2.2.2. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge également.*
(Ou encore, par contraposée, si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.)

Remarquons que le théorème reste évidemment vrai si l'inégalité $0 \leq u_n \leq v_n$ est vérifiée à partir d'un certain rang.

Démonstration. On a, en notant U_n et V_n les sommes partielles des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, pour tout $n \geq 0$,

$$U_n \leq V_n.$$

Si la série $\sum v_n$ converge, la suite croissante $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée (par sa limite, par exemple), et donc la suite croissante $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi majorée, donc convergente (par convergence monotone). Par définition, cela veut dire que la série $\sum u_n$ est convergente. ☐

Le résultat précédent admet plusieurs variantes

Théorème 2.2.3. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites positives.*

1. *On suppose que $u_n = O(v_n)$ quand $n \to +\infty$ (ou que $u_n = o(v_n)$ quand $n \to +\infty$) ; si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge également.*
2. *On suppose que $u_n \sim v_n$; la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum v_n$ converge.*

Démonstration. (1) La relation $u_n = O(v_n)$ signifie qu'il existe M tel que $0 \leq u_n \leq Mv_n$. La série $\sum Mv_n$ est convergente, donc, d'après le théorème précédent, la série $\sum u_n$ converge. Si $u_n = o(v_n)$, on a *a fortiori* $u_n = O(v_n)\ldots$

(2) La relation $u_n \sim v_n$ signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, on ait

$$-\varepsilon|v_n| \leq u_n - v_n \leq \varepsilon|v_n|$$

Prenons, par exemple $\varepsilon = 8$, on obtient alors l'inégalité

$$-7v_n \leq u_n \leq 9v_n.$$

On applique alors le théorème précédent et on conclut que si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge aussi. En inversant les rôles de u et v, on obtient que la réciproque. ☐

Si l'on prend pour point de comparaison les séries de Riemann, on obtient le résultat suivant appelé règle du $n^\alpha u_n$:

Corollaire 2.2.4. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs ;*

1. *S'il existe $\alpha > 1$, tel que $n^\alpha u_n \to 0$, lorsque $n \to +\infty$, alors la série à termes positifs $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $nu_n \to \infty$ lorsque $n \to +\infty$, alors la série à termes positifs $\sum u_n$ diverge.*

Démonstration. Exercice. ☐

Exemple. Déterminons la nature de la série $u_n = 2^{-\sqrt[3]{n}}$. Pour cela, étudions la suite $(n^2 u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et plus précisément le log de cette suite. On a, par croissance comparée,

$$\log(n^2 u_n) = 2\log n - \log(2)\sqrt[3]{n} \to -\infty$$

et donc $n^2 u_n \to 0$. Donc,d'après la règle du $n^2 u_n$, la série à termes positifs $\sum u_n$ est convergente.

Passons à présent au critère de d'Alembert.

Proposition 2.2.5 (Critère de d'Alembert). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs ; on suppose que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell, \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

1. *Si $0 \leq \ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.*

Remarque 2.2.6. *Il est important de comprendre que ce critère n'est pas formidable. En effet, il ne s'applique que pour des suites très caricaturales qui convergent soit très rapidement vers 0 (dans le cas $\ell < 1$) soit très rapidement vers $+\infty$ (si $\ell > 1$). Quand $\ell = 1$ (qui est le cas le plus fréquent), le critère ne dit rien et tout peut arriver comme le montre les deux exemples suivants. Pour la suite $u_n = 1/n$, on a $u_{n+1}/u_n \to 1$, et on sait que la série $\sum u_n$ diverge, mais pour la suite $u_n = 1/n^2$, on a aussi $u_{n+1}/u_n \to 1$, alors que la série $\sum u_n$ est convergente.*

Démonstration. Supposons $\ell \in [0, 1[$. Par hypothèse, il existe N tel que

$$n \geq N \;\Rightarrow\; \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq (\ell + 1)/2 := r < 1.$$

On voit par une récurrence immédiate, que

$$0 < u_n \leq r^n \frac{u_N}{r^N}$$

pour tout $n \geq N$. Par suite, $u_n = O(r^n)$, lorsque $n \to +\infty$. Comme $r < 1$, la série géométrique $\sum r^n$ est convergente. La théorème de comparaison pour les séries à termes positifs entraîne donc que la série $\sum u_n$ converge.
Supposons maintenant que $\ell > 1$. Il existe alors N tel que pour tout $n \geq N$, on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$. La suite u_n est donc croissante à partir du rang N. On a en particulier $u_n \geq u_N > 0$, pour tout $n \geq N$. La suite u_n n'est pas de limite nulle, donc la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente. ☐

Exemple. Déterminons la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(n!)^3}{(2n)!(n+2)!}.$$

On cherche à appliquer le critère de d'Alembert :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)!^3}{n!^3}\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\frac{(n+2)!}{(n+3)!} \\ &= (n+1)^3 \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}\frac{1}{n+3} \to \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Comme $1/4 < 1$, le critère de d'Alembert montre que la série $\sum u_n$ converge.

Terminons par la règle de Cauchy (qui n'est pas au programme).

Proposition 2.2.7 (Règle de Cauchy)**.** *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à termes positifs ou nuls ; on suppose que*

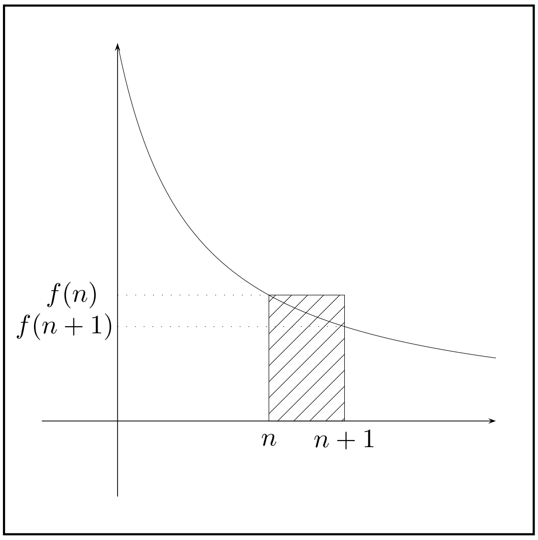
$$\sqrt[n]{u_n} \to \ell, \quad \textit{lorsque } n \to +\infty.$$

1. *Si* $\ell \in [0,1[$*, alors la série* $\sum u_n$ *converge.*
2. *Si* $\ell > 1$*, alors la série* $\sum u_n$ *diverge.*

Démonstration. Supposons $\ell \in [0,1[$ et posons $r = (\ell+1)/2 < 1$; par hypothèse, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $\sqrt[n]{u_n} \leq r$. Autrement dit, $u_n = O(r^n)$ et on conclut comme précédemment. Si $\ell > 1$, on voit que $u_n \geq 1$ à partir d'un certain rang. La série est donc grossièrement divergente. □

2.2.2 Comparaison série-intégrale

Dans ce paragraphe, c'est autant la *méthode* que le résultat qui est importante. On s'intéresse à une série à termes positifs $\sum u_n$ avec $u_n = f(n)$ où $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction positive *décroissante.*



Théorème 2.2.8. *Soit* $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ *une fonction décroissante et continue, et posons pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $u_n = f(n)$ *; la série de terme général* $0 \leq v_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt - f(n+1)$*,* $n \geq 1$*, converge.*

Démonstration. Comme f est décroissante sur $[n, n+1]$, on a

$$f(n+1) \leq f(t) \leq f(n), \quad \forall t \in [n, n+1].$$

Par croissance de l'intégrale, on conclut que $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq f(n)$, et donc que

$$0 \leq v_n \leq f(n) - f(n+1).$$

Pour montrer la convergence de la série à termes positifs $\sum v_n$, il suffit de montrer que ses sommes partielles sont majorées. Or l'inégalité ci-dessus entraîne que

$$0 \leq \sum_{k=1}^{N} v_k \leq f(1) - f(N+1) \leq f(1),$$

puisque f est à valeurs positives. □

Corollaire 2.2.9. *Sous les mêmes hypothèses, la série* $\sum u_n$ *converge si et seulement si la fonction* f *est intégrable sur* $[1, +\infty[$.

Démonstration. Remarquons que

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = \int_1^n f(t)\,dt - \sum_{k=2}^{n+1} u_k.$$

D'après le théorème précédent, la suite $(V_n)_n$ est convergente. On en tire les conclusions suivantes.
Si la série $\sum u_k$ converge, alors $\int_1^n f(t)\,dt$ converge. La suite $J_n = [1, n]$ étant une suite exhaustive de segments de $[1, +\infty[$, on en déduit que f est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Si maintenant, la fonction f est intégrable, on conclut que $\int_1^n f(t)\,dt$ possède une limite quand $n \to +\infty$, et donc que la suite $\left(\sum_{k=2}^{n+1} u_k\right)_n$ converge. Cela conduit immédiatement à la convergence de la série $\sum u_n$. $\square$

Quelques exemples d'application

• **Séries de Riemann**. La série $\sum 1/n^\alpha$ converge si et seulement si $f(t) = 1/t^\alpha$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > 1$ (voir chapitre 1).

• **Séries de Bertrand** (exercice). Déterminer pour quelles valeurs de b, la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(\log n)^b}$ converge.

• **La constante d'Euler**. On sait donc que la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ est divergente. Mais on peut dire mieux. En effet, le théorème précédent nous dit que la série de terme général $v_n = \int_n^{n+1} f(t)\,dt - f(n+1)$ converge. On en déduit facilement, en posant $H_n = \sum_{k=0}^{n} 1/k$ que la suite $H_n - \int_1^n 1/t\,dt = H_n - \log(n)$ converge. La limite de cette suite s'appelle la *constante d'Euler*. Elle est noté γ. On a donc le développement asymptotique :

$$H_n = \log(n) + \gamma + o(1), \quad \text{quand } n \to +\infty.$$

2.2.3 Etudes asymptotiques

Cette partie est au programme, mais est réservée aux problèmes difficiles. Il y a peu de chances pour que vous ayez à vous en servir à la première question d'un problème (ou alors vous avez raté quelque chose !).

Théorème 2.2.10. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites positives telles que*

$$u_n \sim v_n, \quad \textit{lorsque } n \to +\infty.$$

– *Si la série* $\sum v_n$ diverge, *on sait que la série* $\sum u_n$ *diverge aussi. En fait on a mieux : les sommes partielles d'ordre* n *(qui tendent vers* $+\infty$*) sont equivalentes :*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k, \quad \textit{lorsque } n \to +\infty.$$

– *Si la série* $\sum v_n$ converge, *on sait que la série* $\sum u_n$ *converge aussi. En fait on a mieux : les restes d'ordre* n *(qui tendent vers* 0*) sont équivalents :*

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k, \quad \textit{lorsque } n \to +\infty.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par hypothèse, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$(1-\varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon)v_n. \tag{2.2}$$

Supposons que la série $\sum v_n$ diverge. On sait que $V_n := \sum_{k=0}^{n} v_k \to +\infty$ (seul mode de divergence d'une série positive). Pour $n > N$, on somme (**??**) de $N+1$ à n, et on obtient :

$$(1-\varepsilon)(V_n - V_N) \leq U_n - U_N \leq (1+\varepsilon)(V_n - V_N).$$

Donc, en divisant par V_n, on a, pour tout $n > N$,

$$(1-\varepsilon)\left(1 - \frac{V_N}{V_n}\right) \leq \frac{U_n}{V_n} \leq (1+\varepsilon)\left(1 - \frac{V_N}{V_n}\right).$$

Or, quand $n \to \infty$, on a

$$(1+\varepsilon)\left(1 - \frac{V_N}{V_n}\right) \to (1+\varepsilon).$$

Alors, comme $1+\varepsilon < 1+2\varepsilon$, il existe $N_1 \geq N$ tel que, pour $n \geq N_1$,

$$(1-\varepsilon)\left(1 - \frac{V_N}{V_n}\right) \leq 1 + 2\varepsilon.$$

On fait le même argument avec le terme de gauche qui tend vers $1-\varepsilon > 1-2\varepsilon$: il existe $N_2 \geq N_1$ tel que, pour tout $n \geq N_2$,

$$(1-\varepsilon)\left(1 - \frac{V_N}{V_n}\right) \geq 1 - 2\varepsilon.$$

Alors, pour tout $n \geq N_2$, on a :

$$1 - 2\varepsilon \leq \frac{U_n}{V_n} \leq 1 + 2\varepsilon.$$

Cela montre bien que $U_n \sim V_n$.
Supposons maintenant que v_n converge. Ce cas est plus facile à rédiger. Pour $n \geq N$ et $p \geq n+1$, on a, en sommant (**??**) de $n+1$ à p,

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{p} v_k \leq \sum_{k=n+1}^{p} u_k \leq (1+\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{p} v_k.$$

Tout a une limite quand $p \to +\infty$ et on obtient : pour $n \geq N$,

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq (1+\varepsilon)\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

Cela montre bien que

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k, \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

□

2.3 Séries à termes dans un espace vectoriel normé de dimension finie

2.3.1 Séries absolument convergentes

Nous revenons au cadre général d'une série $\sum u_n$ dont les termes sont à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|\cdot\|)$. Bien entendu, les cas les plus importants sont $E = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{C}$.
Commençons par une mise en garde importante.

Théorème 2.3.1. *Il n'existe pas de théorème de comparaison pour les séries à termes quelconques.*

Démonstration. On prend l'exemple suivant :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}.$$

La série $\sum u_n$ est convergente. Cela découlera du théorème sur la convergence des séries alternées. La série $\sum v_n$ est divergente, car $u_n - v_n = \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge, la série $\sum v_n$ diverge, et pourtant $u_n \sim v_n$, lorsque $n \to +\infty$. ☐

Pour montrer la convergence d'une série à termes quelconques, on fera très souvent appel à la notion de convergence absolue, qui est définie ci dessous.

Définition 2.3.2. *On dit que la série $\sum u_n$ est* absolument convergente *(ACV) si la série à termes positifs $\sum \|u_n\|$ est convergente.*

Théorème 2.3.3. *Si une série $\sum u_n$ converge absolument, alors elle converge. En résumé,*

$$ACV \Rightarrow CV.$$

Démonstration. Comme E est complet, il suffit de montrer que la suite $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est de Cauchy dans E. Soit $\varepsilon > 0$; on cherche donc N tel que si $n \geq N$ et $p \geq 0$, $\|U_{n+p} - U_n\| \leq \varepsilon$. Remarquons que l'inégalité triangulaire entraîne que

$$\|U_{n+p} - U_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|u_k\|. \tag{2.3}$$

Mais comme la série $\sum \|u_n\|$ converge, la suite $S_n = \sum_{k=0}^{n} \|u_k\|$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Par suite, il existe N tel que pour tout $n \geq N$ et tout $p \geq 0$, $\sum_{k=n+1}^{n+p} \|u_k\| = |S_{n+p} - S_n| \leq \varepsilon$. On conclut que le terme de droite dans (**??**) est plus petit que ε dès que n est plus grand que N. ☐

Exemple. Déterminons la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\cos(n)}{n^2 + n + 3}.$$

Pour cela, écrivons

$$|u_n| = \frac{|\cos(n)|}{n^2 + n + 3} \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum 1/n^2$ est une série de Riemann convergente. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, on conclut de l'inégalité précédente que la série $\sum |u_n|$ converge. La série $\sum u_n$ est donc absolument convergente et donc convergente.

2.3.2 Séries alternées

Dans cette partie, les séries sont des séries à termes réels.

Définition 2.3.4. *Une série réelle alternée est une série dont les termes changent alternativement de signe. Une série $\sum u_n$ est donc alternée si en posant $a_n = |u_n| \geq 0$ on a*

$$(u_n = (-1)^n a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}) \quad ou \quad \Big(u_n = (-1)^{n+1} a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}\Big) \tag{2.4}$$

Théorème 2.3.5 (Condition suffisante de convergence d'une série alternée)**.** *Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que $|u_n|$ est décroissante et de limite nulle (ce qu'on écrira $|u_n| \downarrow 0$). Alors la série $\sum u_n$ est convergente.*

Démonstration. Sans perte de généralité, on se place dans le cas où $u_n = (-1)^n a_n$, avec $a_n = |u_n|$. On pose :

$$\alpha_n = U_{2n} \quad \text{et} \quad \beta_n = U_{2n+1}.$$

On va montrer que les suites α_n et β_n sont adjacentes.

– La suite α_n est décroissante : $\alpha_n - \alpha_{n+1} = -u_{2n+1} - u_{2n+2} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0$, car a_n est décroissante.
– La suite β_n est croissante : $\beta_{n+1} - \beta_n = u_{2n+2} + u_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$, car a_n est décroissante.
– On a de plus :

$$0 \leq \alpha_n - \beta_n = a_{2n+1} \to 0.$$

Les suites α_n et β_n sont donc bien adjacentes. On en déduit qu'elles convergent vers une même limite S. Il est facile de voir que la convergence des deux suites extraites $(U_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(U_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vers S entraîne que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers S. □

On peut affiner le résultat précédent :

Théorème 2.3.6. *Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que $a_n = |u_n| \downarrow 0$. Alors le reste $R_n = S - U_n$ est majoré en valeur absolue par a_{n+1} et est du même signe que u_{n+1}.*

Démonstration. On a vu dans la preuve ci-dessus que les suite U_{2n} et U_{2n+1} étaient adjacentes. Leur limite commune S vérifie donc

$$U_{2k+1} \leq S \leq U_{2k}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Si $n = 2k$ est pair, alors $S - U_{2k}$ est négatif (et donc du signe de u_{n+1}), et de valeur absolue majorée par $U_{2k} - U_{2k+1} = a_{2k+1} = |u_{n+1}|$.
Si $n = 2k+1$ est impair, alors $S - U_{2k+1}$ est positif, majoré par $U_{2k+2} - U_{2k+1} = a_{2k+2} = u_{n+1}$. □

Exemple. La série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

est convergente pour toute valeur du paramètre $\alpha > 0$.

Exemple. Déterminons la nature de la série de terme général

$$u_n = \log\left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}\right).$$

On remarque que

$$u_n \sim \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}.$$

Et alors ? *On ne peut rien conclure de cela* (si ce n'est que la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente). Pour pouvoir conclure, il faut continuer le DL :

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right).$$

Posons $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ et $y_n = -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)$. La série $\sum x_n$ vérifie le critère des séries alternées, donc elle converge. Par opération sur les séries, on conclut que la série $\sum u_n$ est de la même nature que la série $\sum y_n$. Examinons maintenant la série $\sum y_n$. On voit que $-y_n \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$, lorsque $n \to +\infty$. On en conclut que la suite $-y_n$ est positive à partir d'un certain rang et, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, que la série de terme général $-y_n$ converge si et seulement si la série de terme général $\sum 1/n^{2\alpha}$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha > 1/2$. En conclusion la série de terme général u_n converge si et seulement si $\alpha > 1/2$.

2.3.3 Méthode d'Abel

Cette méthode n'est pas au programme. On la présente quand même, car elle est très utile et pourrait très bien faire l'objet d'un problème. Il faut donc que vous sachiez refaire l'argument. La méthode d'Abel n'est rien d'autre que l'analogue dans un cadre discret de l'intégration par parties.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites (réelles ou complexes). On s'intéresse à la série

$$\sum a_n b_n.$$

On voudrait donner une condition *suffisante* pour que cette série converge. On va rompre la symétrie entre $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en "intégrant" la première et en "dérivant" la seconde. Posons $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$. On rappelle que pour $k \geq 1$,

$$a_k = A_k - A_{k-1}.$$

En posant $A_{-1} = 0$, cette formule est valable pour tout $k \geq 0$, et on a

$$\begin{aligned} U_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=0}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n} A_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} \quad \text{changement d'indices, en utilisant que } A_{-1} = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) A_k + A_n b_n. \tag{2.5}$$

On vient d'effectuer *la transformation d'Abel*.

A présent, on cherche une condition simple pour que la série $\sum (b_k - b_{k+1}) A_k$ converge. Comme on ne connait pas le signe de cette série, on demandera qu'elle soit absolument convergente. Si on suppose que la suite A_n est bornée (par un certain $M > 0$), il suffit de demander que la série $(b_k - b_{k+1})$ soit absolument convergente puisque :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |(b_k - b_{k+1}) A_k| = \sum_{k=0}^{n-1} |b_k - b_{k+1}||A_k| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} |b_k - b_{k+1}|.$$

De plus, si A_n est bornée, pour que le terme $A_n b_n$ qui reste ait une limite, il suffit de demander que b_n soit de limite nulle.

Théorème 2.3.7 (Théorème d'Abel)**.** *On suppose que*

1. *La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*
2. *La série $\sum (b_k - b_{k+1})$ est absolument convergente.*
3. *La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle.*

Alors la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

En pratique, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera réelle, décroissante et de limite nulle. Dans ce cas, la série $\sum (b_k - b_{k+1})$ est à termes positifs et convergente. En effet, c'est une série télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n} (b_k - b_{k+1}) = b_0 - b_n \to b_0.$$

D'ou le résultat utilisé en pratique :

Théorème 2.3.8 (Abel en pratique). *On suppose que :*

1. *La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,*
2. *La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle décroissante et de limite nulle,*

Alors la série $\sum a_k b_k$ est convergente.

Remarque 2.3.9. *On remarquera que le résultat de convergence des séries alternées est un cas particulier de ce théorème.*

2.4 Séries doubles

On s'intéresse dans cette section à des séries à double indice :

$$\sum_{i,j} u_{i,j}$$

où les $u_{i,j}$ sont réels ou complexes (ou si l'on veut dans un espace vectoriel normé).

Etant donnée une suite double $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$, on peut imaginer plusieurs procédés sommatoires. On en décrit quelques uns ci-dessous.

– **Sommation sur i puis sommation sur j.** Pour tout j fixé, on considère la série $\sum_i u_{i,j}$; si elle converge, on pose $S_j = \sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}$. Ensuite, on considère la série de terme général S_j. Si elle converge, sa somme est donc

$$S = \sum_{j=0}^{+\infty} S_j = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j} \right).$$

– **Sommation sur j puis sommation sur i.** Pour tout i fixé, on considère la série $\sum_j u_{i,j}$; si elle converge, on pose $T_i = \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}$. Ensuite, on considère la série de terme général T_i. Si elle converge, sa somme est donc

$$T = \sum_{i=0}^{+\infty} T_i = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \right).$$

– **Sommation en rectangle.** On considère la suite croissante de carrés

$$C_n = \{(i,j) \in \mathbb{N} : i \leq n, j \leq n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

et on somme sur tous les indices $(i,j) \in C_n$:

$$X_n = \sum_{(i,j)\in C_n} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} u_{i,j}.$$

On fait ensuite tendre n vers $+\infty$, et en cas de convergence, on note

$$X = \lim_{n\to+\infty} X_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} u_{i,j}.$$

– **Sommation en triangle.** On peut aussi sommer sur les triangles

$$D_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : i + j \leq n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

On pose

$$Y_n = \sum_{(i,j)\in D_n} u_{i,j} = \sum_{i+j\leq n} u_{i,j} = \sum_{p=0}^{n} \sum_{i+j=p} u_{i,j},$$

et en cas de convergence,

$$Y = \lim_{n\to+\infty} Y_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i+j\leq n} u_{i,j} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{i+j=p} u_{i,j} \right)$$

La question est de savoir si l'on a

$$S = T = X = Y.$$

C'est l'objet des résultats suivants dont nous omettrons les preuves.

Définition et Théorème 2.4.1. *Soit $(u_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}^2}$ une suite double positive. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *Pour tout j, la série $\sum_i u_{i,j}$ est convergente de somme S_j et la série $\sum_j S_j$ converge.*
2. *Pour tout i, la série $\sum_j u_{i,j}$ est convergente de somme T_i et la série $\sum_i T_i$ converge.*
3. *La suite $\left(\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} u_{i,j}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*
4. *La série de terme général $\sum_{i+j=p} u_{i,j}$ converge.*

Dans ce cas, on dit que la suite double $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, *et les quatre procédés sommatoires décrits plus haut donnent la même somme (S=T=X=Y) :*

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j} \right) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} u_{i,j} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{i+j=p} u_{i,j} \right).\end{aligned}$$

Cette valeur commune est notée $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j}$.

Définition et Théorème 2.4.2. *Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double à valeurs complexes ; on dit que $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si la suite double $(|u_{i,j}|)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable. Dans ce cas, les quatre procédés sommatoires décrits plus haut ont la même somme.*

Une conséquence importante (pour l'étude des séries entières notamment) est le théorème suivant :

Théorème 2.4.3. *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs complexes ; si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série de terme général $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$ est aussi absolument convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

La série $\sum c_n$ est appelée produit de Cauchy *des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.*

Chapitre 3

Suites et séries de fonctions

3.1 Introduction

Soient E, F deux espaces vectoriels normés complets (espaces de Banach). On va s'intéresser à des (suites d') applications $f : A \to F$ définies sur une partie A de E et à valeurs dans F.
Encore une fois, dans la plupart des problèmes ou exercices, on se placera dans le cadre moins général où $A = I$ est un intervalle de $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 3.1.1 (Convergence simple ou uniforme)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de A dans F et $f : A \to F$.*
– *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* converge simplement *sur A vers f si pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$ lorsque $n \to +\infty$.*
– *On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* converge uniformément *sur A vers f si*

$$+\infty > \alpha_n := \sup_{x\in A} \|f_n(x) - f(x)\| \to 0, \quad \textit{lorsque } n \to +\infty.$$

On a le résultat évident suivant :

Proposition 3.1.2. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f alors elle converge simplement sur A vers f.*

Remarque 3.1.3 (Quantification)**.** *Il faut bien voir la différence entre la convergence simple et la convergence uniforme :*
– *La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A si et seulement si*

$$\forall x \in A, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geq 0, \quad \textit{tel que} \quad n \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

– *La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geq 0, \quad \textit{tel que} \quad \forall x \in A, \quad n \geq N \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Dans le premier cas, le N dépend du x choisi, dans le deuxième cas, on peut trouver un N qui marche pour tous les x.

Méthode. Pour s'attaquer à un problème de convergence d'une suite de foncions, on suit en général le plan suivant :

1. On fixe x dans A et on étudie la *suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. On note $f(x)$ la limite de cette suite, si elle existe.
2. Ensuite, on étudie la *fonction* $x \mapsto \|f_n(x) - f(x)\|$ et on détermine son maximum (idéalement on calcule sa valeur).
3. Pour terminer, on étudie la *suite* $\alpha_n = \sup_{x\in A} \|f_n(x) - f(x)\|$, et on détermine si elle est de limite nulle ou non.

Exemple. La suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$. La convergence n'est pas uniforme, car $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1[} f_n(x) = 1$ qui ne tend pas vers 0.

Exemple. Considérons maintenant la suite $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n(1-x)$. Clairement f_n converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$. Cette fois-ci, la convergence est uniforme. En effet, calculons $f_n'(x) = (n-(n+1)x)x^{n-1}$. La fonction f_n' est positive sur $[0, n/(n+1)]$ et négative sur $[n/(n+1), 1]$ et s'annule au point $x_n = n/(n+1)$. Par conséquent, la fonction positive f_n atteint son maximum au point x_n. On a donc

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \to 0,$$

lorsque $n \to +\infty$. Il y a donc bien convergence uniforme.

3.2 Norme de la convergence uniforme

Le résultat suivant est important du point de vue théorique, mais assez peu utilisé en pratique.

Théorème 3.2.1 (Condition de Cauchy uniforme)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de $A \subset E$ à valeurs dans F un espace vectoriel normé et* complet*. La suite f_n converge uniformément sur A si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geq 0 \textit{ tel que } \forall n \geq N \textit{ et } p \geq 0, \quad \textit{on a } \forall x \in A : \quad \|f_{n+p}(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon. \qquad (3.1)$$

Démonstration. Il est facile de voir que la condition est nécessaire. En effet, supposons que f_n converge uniformément sur A et notons f sa limite. Pour $\varepsilon > 0$, fixé, on sait qu'il existe N tel que pour $n \geq N$ et pour $x \in A$ on a :

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

Mais alors, pour $n \geq N$ et $p \geq 0$ on a aussi, pour tout $x \in A$,

$$\|f_{n+p}(x) - f_n(x)\| \leq \|f_{n+p}(x) - f(x)\| + \|f_n(x) - f(x)\| \leq 2\varepsilon.$$

Réciproquement, supposons que la suite f_n vérifie (**??**). Alors, pour $x \in A$ fixé, la suite $f_n(x)$ est une suite de Cauchy de $(F, \|\cdot\|)$. Or $(F, \|\cdot\|)$ est supposé *complet*. La suite $f_n(x)$ a donc une limite $f(x)$ dans F. L'application $f : A \to F$ est la limite simple de f ; il reste à montrer que f_n converge uniformément vers f sur A. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe, d'après (**??**), N tel que pour pour $n \geq N$ et $p \geq 0$,

$$\|f_{n+p}(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in A.$$

Tout a une limite quand $p \to \infty$, et on obtient que pour tout $n \geq N$,

$$\|f(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in A.$$

Autrement dit,

$$\alpha_n = \sup_{x\in A} \|f(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon.$$

La suite α_n est donc de limite nulle, ce qui est précisément la définition de la convergence uniforme. ☐

Soit $\mathcal{B}(A, F)$ l'espace des applications *bornées* de A dans F. On a donc : $f \in \mathcal{B}(A, F)$ s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $\|f(x)\| \leq M$. L'espace $\mathcal{B}(A, F)$ est un espace vectoriel et sur cet espace vectoriel on peut introduire la norme :

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in A} \|f(x)\|. \qquad (3.2)$$

(Vérifiez que c'est bien une norme sur $\mathcal{B}(A,F)$). Cette norme est appelée la norme de la convergence uniforme. En effet, on a de manière évidente : pour $f_n \in \mathcal{B}(A,F)$ et $f \in \mathcal{B}(A,F)$,

f_n converge uniformément sur I vers $f \iff \|f_n - f\|_\infty \to 0 \iff f_n$ converge vers f dans $\mathcal{B}(A,F)$.

D'autre part, on a aussi :

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite de Cauchy dans } \mathcal{B}(A,F) \iff (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vérifie } (\mathbf{??}).$$

Par conséquent, le théorème précédent peut aussi s'énoncer de la manière suivante :

Théorème 3.2.2. *L'espace $\mathcal{B}(A,F)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace complet.*

Démonstration. Il y a quand même un petit détail à préciser. Soit f_n une suite de Cauchy de $\mathcal{B}(A,F)$. On sait donc, d'après le théorème, que la suite f_n converge uniformément vers une certaine $f : I \to E$. Mais il faut s'assurer que $f \in \mathcal{B}(A,F)$ (c'est-à-dire que f est bornée) pour pouvoir conclure que $f_n \to f$ dans $\mathcal{B}(A,F)$. Cela dit, c'est évident. En effet, pour un n fixé quelconque, on a : $f_n - f \in \mathcal{B}(A,F)$ par définition de la convergence uniforme. Comme $f_n \in \mathcal{B}(A,F)$ et que $\mathcal{B}(A,F)$ est un espace vectoriel, on en déduit que $f \in \mathcal{B}(A,F)$. ☐

3.3 Limites de limites : continuité et dérivabilité d'une limite de suite de fonctions

Le prochain théorème est ultra-classique. Il donne une condition *suffisante* pour qu'une limite d'applications continues soit elle-même continue.

Théorème 3.3.1 (Une limite uniforme d'applications continues est continue)**.** *On suppose que pour tout n, l'application f_n est continue sur A, et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur A vers f. Alors f est continue sur A.*

Démonstration. Soit $x_0 \in A$. Montrons que la fonction f est continue en x_0. Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$. D'après la convergence uniforme, il existe $N \geq 0$ tel que, si $n \geq N$, alors

$$\forall x \in A, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

On travaille maintenant avec cet N fixé. On a :

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0)\| &\leq \|f(x) - f_N(x)\| + \|f_N(x) - f_N(x_0)\| + \|f_N(x_0) - f(x_0)\| \\ &\leq 2\varepsilon + \|f_N(x) - f_N(x_0)\| \end{aligned}$$

On quantifie ensuite la continuité de f_N en x_0 : pour notre ε, il existe $\delta > 0$ tel que pour $x \in A$, $\|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|f_N(x) - f_N(x_0)\| \leq \varepsilon$. On a donc trouvé un δ tel que, pour $x \in A$, si $\|x - x_0\| \leq \delta$, alors

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq 3\varepsilon.$$

Cela montre bien que f est continue en x_0. ☐

Posons $\mathcal{C}(A,F)$ l'ensemble des fonctions continues sur $A \subset E$ et à valeurs dans F.

Proposition 3.3.2. *Si A est une partie* compacte *de E, alors $\mathcal{C}(A,F)$ est un sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{B}(A,F)$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que $\mathcal{C}(A,F)$ est bien inclus dans $\mathcal{B}(A,F)$, car toute fonction continue sur une partie compacte est bornée. Si $(f_n)_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{C}(A,F)$, convergeant vers $f \in \mathcal{B}(A,F)$, pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_\infty$, alors d'après le théorème précédent, on conclut que f est continue sur A et est donc élément de $\mathcal{C}(A,F)$. Cela montre la fermeture de $\mathcal{C}(A,F)$ dans $\mathcal{B}(A,F)$. ☐

Enonçons à présent le théorème de Stone-Weirstrass.

Théorème 3.3.3 (Stone-Weierstrass)**.** *Pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (resp. $f : [a, b] \to \mathbb{C}$) continue sur $[a, b]$, il existe une suite de polynômes P_n à coefficients réels (resp. complexes) convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$.*

Une autre manière d'énoncer ce théorème est de dire que l'ensemble $\mathcal{P}([a, b], \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{P}([a, b], \mathbb{C})$) des fonctions polynomiales à coefficients réels (resp. complexes) est *dense* dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$. Nous montrerons ce résultat en TD.

Le résultat suivant est d'utilisation fréquente lorsqu'on veut passer à la limite dans une intégrale.

Théorème 3.3.4 (Intégration)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un segment $[a, b]$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers f (qui est donc continue). Alors, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, dt = \int_a^b f \, dt.$$

Remarque 3.3.5. *On verra plus loin un résultat beaucoup plus fort, appelé* Théorème de convergence dominée *qui permet de passer à la limite dans une intégrale quand la convergence de f_n n'est pas uniforme.*

Démonstration. Rappelons que l'on sait déjà que f est continue sur $[a, b]$ et donc intégrable sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$ on a

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

On a donc, pour $n \geq N$,

$$\left| \int_a^b f \, dt - \int_a^b f_n \, dt \right| = \left| \int_a^b (f - f_n) \, dt \right| \leq \int_a^b |f - f_n| \, dt \leq (b - a)\varepsilon.$$

On a donc bien $\int_a^b f_n \, dt \to \int_a^b f \, dt$. □

On peut se demander si la convergence uniforme d'une suite applications f_n de classe $\mathcal{C}^1$ entraîne que la limite f est aussi de classe $\mathcal{C}^1$. En général, ce n'est pas le cas. Considérons en effet les applications $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $n \geq 1$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On observe que

$$|f_n(x) - |x|| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \frac{1/n}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

On en conclut que f_n converge uniformément vers $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$. La fonction limite $x \mapsto |x|$ est bien continue, mais n'est pas dérivable en 0.

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour pouvoir conclure que la limite d'une suite d'applications est $\mathcal{C}^1$.

Théorème 3.3.6 ($\mathcal{C}^1$-ation)**.** *On suppose que*

1. *Pour tout n, la fonction f_n est $\mathcal{C}^1$ sur I,*
2. *La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I,*
3. *La suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une certaine fonction φ.*

Alors, la fonction f est $\mathcal{C}^1$ sur I et de plus $f' = \varphi$ sur I.

Démonstration. Pour montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur I, de dérivée φ, il suffit de montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, de dérivée φ, pour tout $[a,b] \subset I$. On se donne donc $[a,b] \subset I$ et un $x \in [a,b]$. Comme f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, on a
$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt.$$
Par passage à la limite à x fixé lorsque $n \to +\infty$ (convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et convergence uniforme de $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a,x]$) on a
$$f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t)\,dt$$
et ceci pour tout $x \in [a,b]$. Comme la suite de fonctions continues $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers φ, on sait que φ est continue. Donc la fonction $x \to \int_a^x \varphi(t)\,dt$ est $\mathcal{C}^1$, de dérivée φ. On en déduit que f est $\mathcal{C}^1$ de dérivée φ. □

3.4 Séries de Fonctions. Convergence normale

Etant donnée une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur A et à valeurs dans F, on lui associe la *séries de fonctions* $\sum u_n$ définie sur A par la suite de ses sommes partielles
$$U_n(x) := \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

Définition 3.4.1. *On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement (resp. converge uniformément) sur A si la suite de fonctions $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (resp. converge uniformément) sur A.*

Ainsi une série de fonctions n'est rien d'autre qu'un certain type de suite de fonctions et on peut lui appliquer tous les théorèmes vus dans la partie précédente.

Pour étudier la convergence simple sur A de la série de fonctions $\sum u_n$, on fixe $x_0 \in A$ et on étudie la brave série $\sum u_n(x_0)$. Si la série $\sum u_n$ converge simplement sur A, alors on peut définir $U(x) := \lim_{n\to+\infty} U_n(x)$ qui est précisément la somme de la série $\sum u_n(x)$:
$$U(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) := \lim_{n\to+\infty} U_n(x).$$
On définit ainsi une fonction sur A. Par définition, la série converge uniformément sur A si $\sup_{x\in A} \|U(x) - U_n(x)\| \to 0$, lorsque $n \to +\infty$. Posons $R_n(x) = U(x) - U_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ (c'est le reste de la série de fonctions) ; la série converge donc normalement si et seulement si
$$\sup_{x\in A} \|R_n(x)\| \to 0, \qquad \text{lorsque } n \to +\infty,$$
c'est-à-dire si et seulement si la suite des restes converge uniformément vers 0.
On peut reformuler les théorèmes de la partie précédente dans le cadre des séries de fonctions.

Théorème 3.4.2. *On suppose que pour tout n, la fonction u_n est continue sur A. Si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur A vers U, alors U est continue sur A.*

Théorème 3.4.3. *On suppose que les fonctions u_n sont continues sur $[a,b]$ et que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers $U(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$. Alors, la série $\sum_k \left(\int_a^b u_k\,dx\right)$ converge et on a :*
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)\,dx.$$

Démonstration. Ici il faut simplement remarquer que pour $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \int_a^b u_k(x)\, dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} u_k(x)\, dx = \int_a^b U_n(x)\, dx,$$

et on applique le résultat sur les suites de fonctions. □

Théorème 3.4.4. *On suppose que*

1. *Pour tout n, la fonction u_n est $\mathcal{C}^1$ sur I,*
2. *La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I. On note U sa somme.*
3. *La série de fonctions $\sum u_n'$ converge uniformément sur I. On note V sa somme.*

Alors, la fonction U est $\mathcal{C}^1$ sur I et on a $U' = V$ sur I.

Démonstration. Même remarque que dans la preuve précédente : il suffit de remarquer

$$\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)' = \sum_{k=0}^{n} u_k'.$$

□

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur A. Démontrer la convergence simple de cette série de fonctions n'est pas forcément très dur. Cela revient simplement à montrer que pour tout $x \in A$, la série $\sum_n u_n(x)$ converge. En revanche, démontrer la convergence *uniforme* de cette série, peut être beaucoup plus délicat. En effet, comme on l'a vu plus haut, cela revient à montrer que la suite de fonctions $R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_n(x)$ converge uniformément vers la fonction nulle. Autrement dit, on doit montrer que

$$\sup_{x\in A} \left\| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x) \right\| \to 0, \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

On est donc amené à étudier le sup d'une somme infinie de fonctions ! Heureusement, il y a un critère simple qui permet souvent d'éviter tout ça.

Définition 3.4.5 (Convergence normale)**.** *Etant donnée une série de fonctions $\sum u_n$ définies sur A et à valeurs dans F, on introduit le supremum sur A de la norme du terme général : pour $n \in \mathbb{N}$, on pose*

$$\gamma_n := \sup_{x\in A} \|u_n(x)\|.$$

On dit que la série $\sum u_n$ converge normalement *sur A si la* série *à termes positifs $\sum_n \gamma_n$ converge.*

Théorème 3.4.6 (La convergence normale implique la convergence uniforme)**.** *Si la série $\sum u_n$ converge normalement sur A, alors elle converge uniformément sur A.*

Remarque 3.4.7. *Avant de faire la démonstration (très facile) du théorème, il convient d'expliciter le critère de Cauchy uniforme (Théorème* **??***) dans le cadre des séries de fonctions. On rappelle que pour $n, p \geq 0$ on a*

$$U_{n+p}(x) - U_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x).$$

Par définition, la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur A si et seulement si la suite de fonctions U_n converge uniformément, et par conséquent (d'après le critère de Cauchy uniforme) si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq 0$ tel que, pour $n \geq N$ et $p \geq 0$,

$$\sup_{x\in A} \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right\| \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Pour montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément, on montre que la suite de fonctions $U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ vérifie le critère de Cauchy uniforme. Par définition de γ_n on a, pour $n, p \geq 0$ et $x \in A$,

$$\|U_{n+p}(x) - U_n(x)\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|u_k(x)\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \gamma_k$$

et donc,

$$\sup_{x \in A} \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \gamma_k.$$

Par hypothèse, la suite $(\sum_{k=0}^{n} \gamma_k)_n$ est convergente, donc elle vérifie le critère de Cauchy : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$ et tout $p \geq 0$, on a

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \gamma_k \leq \varepsilon.$$

On en conclut que pour tout $n \geq N$ et tout $p \geq 0$, on a aussi

$$\sup_{x \in A} \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right\| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que la série de fonctions $\sum u_n$ vérifie bien le critère de Cauchy uniforme. □

En pratique, les théorèmes précédents sur les séries de fonctions sont utilisés en remplaçant dans l'énoncé "convergence uniforme" par "convergence normale".

Exemple. Fonction ζ de Riemann. On considère la série de fonctions $\sum u_n$ de terme général u_n défini pour tout $x > 1$ par

$$u_n(x) = \frac{1}{n^x}.$$

La série converge simplement sur $]1, +\infty[$ (convergence des séries de Riemann). La somme de cette série de fonction est noté ζ (dzeta) :

$$\zeta(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n^x}, \quad x > 1.$$

Examinons à présent la convergence normale de la série. Pour tout $a > 1$, et $x \geq a$, on a

$$0 \leq \frac{1}{n^x} = \exp(-x \log(n)) \leq \exp(-a \log(n)) = \frac{1}{n^a}.$$

Ainsi

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |u_n(x)| = \frac{1}{n^a}.$$

Comme $a > 1$, la série $\sum 1/n^a$ converge, et on conclut que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement (et donc aussi uniformément) sur $[a, +\infty[$. Comme pour tout n, la fonction u_n est continue sur $[a, +\infty[$, on en déduit que la fonction ζ est continue sur $[a, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a > 1$, on conclut que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.
On peut montrer plus généralement (exercice) que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

Exemple. Voyons maintenant un exemple de série de fonctions convergeant uniformément mais pas normalement. La technique décrite ci-dessous est générale et vaut pour toute série alternée de fonctions. Considérons la série de fonctions $\sum u_n$ avec

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x}, \quad x \geq 0.$$

Pour chaque $x \geq 0$, la suite $\frac{1}{n+x} \downarrow 0$ lorsque $n \to +\infty$. La série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n+x}$ est donc convergente. On conclut que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. En réalité, l'étude des séries alternées nous donne d'autres informations sur la série. On sait que pour tout $x \geq 0$, le reste $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ est du même signe que $u_{k+1}(x)$ et est majoré en valeur absolue par $|u_{k+1}(x)|$. Par conséquent, on a $|R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout $x \geq 0$, on a donc

$$\sup_{x\geq 0} |R_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \to 0.$$

La suite de fonctions converge donc uniformément sur $[0, +\infty[$. La convergence, n'est par contre pas normale. En effet, $\sup_{[0,+\infty[} |u_n|(x) = \frac{1}{n}$, et la série $\sum 1/n$ diverge.

3.5 Convergence dominée

La version suivante du théorème de convergence dominée de Lebesgue est désormais au programme de l'écrit du CAPES.

Théorème 3.5.1 (Convergence dominée)**.** *Soit I un intervalle quelconque, et $f_n : I \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions continues par morceaux,* ***convergeant simplement*** *vers une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. S'il existe une fonction continue par morceaux et* ***intégrable*** *$g : I \to [0, +\infty[$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait la* ***condition de domination***

$$|f_n| \leq g,$$

alors les f_n et f sont intégrables sur I et on a

$$\int_I f_n \, dt \to \int_I f \, dt, \quad \textit{lorsque } n \to +\infty.$$

Remarque 3.5.2. *Si vous avez suivi un cours de L3, vous savez que le vrai cadre pour aborder ce théorème est celui de l'intégrale de Lebesgue. Dans la version ci-dessus, les seules hypothèses vraiment indispensables sont marquées en gras. La raison pour laquelle toutes les fonctions de l'énoncé sont supposées continues par morceaux est tout simplement que, dans le cadre du programme du CAPES, la notion d'intégrale n'est définie que pour des fonctions de ce type. Dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue, on pourrait remplacer "continues par morceaux" par "mesurables".*

La preuve du théorème de convergence dominée est hors programme.

Exemple. Un calcul (assez compliqué) de l'intégrale Gaussienne. Considérons la suite de fonctions continues f_n définies sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n, \quad \text{si } 0 \leq x \leq \sqrt{n}, \quad \text{et} \quad f_n(x) = 0 \quad \text{si } x \geq \sqrt{n}.$$

La suite f_n converge simplement vers la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$. En effet,

$$f_n(x) = \exp(n \log(1 - x^2/n)) = \exp(n(-x^2/n + o(1/n))) = \exp(-x^2 + o(1)) \to f(x),$$

lorsque $n \to +\infty$.
De plus, la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ domine la suite f_n. En effet, on a clairement $f_n(x) \leq f(x)$ si $x \geq \sqrt{n}$ et par ailleurs, d'après l'inégalité $\log(1 + u) \leq u$, valable pour tout $u > -1$, on a

$$0 \leq f_n(x) = \exp\Big(n \log(1 - x^2/n)\Big) \leq \exp(-x^2) = f(x),$$

pour tout $0 \leq x < \sqrt{n}$.
La fonction f est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$. En effet, on a par exemple $f(x) = o(1/x^2)$

lorsque $x \to +\infty$.

D'après le théorème de convergence dominée, on peut donc conclure que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt.$$

Calculons ces dernières intégrales.

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(u)\,du = \sqrt{n}W_{2n+1},$$

grâce au changement de variable $u = \arcsin(t/\sqrt{n})$ et en notant $W_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n(u)\,du$ (intégrale de Wallis). On a vu dans le chapitre sur l'intégration que la suite $W_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n(u)\,du$ avait en particulier la propriété suivante :

$$\sqrt{n}W_n \to \sqrt{\pi/2}, \quad \text{lorsque } n \to +\infty.$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \to \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi/2} = \sqrt{\pi}/2.$$

D'où la formule

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Remarque 3.5.3. *Pour une série de fonctions (continues par morceaux) $\sum u_n$ définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et donc chercher une fonction intégrable (continue par morceaux) g telle que*

$$|U_n| = \left|\sum_{k=0}^n u_k\right| \le g, \quad \forall n.$$

On peut également appliquer le théorème suivant qui est souvent plus pratique.

Théorème 3.5.4 (Interversion série-intégrale)**.** *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues par morceaux et intégrables convergeant simplement sur I vers une fonction U continue par morceaux. Si la série à termes positifs $\sum \int_I |u_n|\,dx$ converge, alors la fonction U est intégrable et on a*

$$\int_I U(x)\,dx = \int_I \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)\right) dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\int_I u_k(x)\,dx\right).$$

La preuve du théorème est également hors programme.

Exemple. Soit $\alpha > 0$; on considère la fonction

$$S_\alpha(t) = \frac{t^\alpha}{e^t-1}, \quad \forall t > 0.$$

D'après la formule donnant la somme d'une série géométrique, il vient

$$\frac{1}{e^t-1} = e^{-t}\frac{1}{1-e^{-t}} = e^{-t}\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kt} = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}.$$

On en déduit immédiatement que la fonction continue S_α est la limite simple sur $I =]0,+\infty[$ de la série de fonctions continues $\sum_{n\ge1} u_n$, où $u_n(t) = t^\alpha e^{-nt}$, $t > 0$. Les fonctions positives et continues u_n sont intégrables sur $[0,+\infty[$. En effet, $u_n(t) = o(1/t^2)$ lorsque $t \to +\infty$. De plus,

$$\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-nt}\,dt = \frac{1}{n^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty} u^\alpha e^{-u}\,du,$$

en effectuant le changement de variable $t = nu$. Comme $\alpha > 0$, $\alpha+1 > 1$, et la série $\sum \int_0^{+\infty} u_n(t)\, dt$ est une série de Riemann convergente. D'après le théorème précédent, on conclut que S_α est intégrable sur I et que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{e^t - 1}\, dt = \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\, dt \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}},$$

ou encore,

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{e^t - 1}\, dt = \Gamma(a)\zeta(a), \quad \forall a > 1,$$

où $\Gamma :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ est la fonction Gamma d'Euler définie par $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t}\, dt$.