Analyse
Feuille 1 : Intégration.

1 Intégrales sur un segment

Exercice 1. Positivité de l'intégrale. Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$, $a \leq b$, telle que

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \int_a^b |f|(t)\,dt.$$

Montrez que f est de signe constant sur $[a,b]$.

Exercice 2. Une somme de Riemann cachée. Calculer la limite de la suite $u_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$.

Exercice 3. Ordre de convergence de la méthode des trapèzes. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. On note $M = \sup_{[a,b]} |f''|$.

(1) Soient $a \leq \alpha < \beta \leq b$; on définit $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ comme la fonction affine sur $[\alpha,\beta]$ coïncidant avec f aux points α et β. Montrer qu'on a les inégalités suivantes :

$$g(t) \leq f(t) + \frac{M}{2}(t-\alpha)(\beta - t), \qquad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

et

$$f(t) - \frac{M}{2}(t-\alpha)(\beta - t) \leq g(t), \qquad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

(2) En déduire que

$$\left|\int_\alpha^\beta f(t)\,dt - \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}\right| \leq \frac{M(\beta-\alpha)^3}{12}.$$

(3) On approche l'intégrale de f par la méthode des trapèzes :

$$T_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2n},$$

où $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$, $k \in \{0, \ldots, n\}$.
Expliquer la formule donnant T_n et montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - T_n(f)\right| \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}.$$

(4) On s'intéresse maintenant à la méthode des rectangles :

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k).$$

Déduire de la question précédente que

$$R_n(f) = \int_a^b f(t)\,dt + (b-a)\frac{f(a)-f(b)}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 4. Intégration et dérivation. Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que

$$\forall x \in [a,b], \quad |f(x)| \leq \frac{1}{2}\int_a^b |f'|(t)\,dt.$$

Exercice 5. Limite d'une suite d'intégrales. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive et continue sur $[a,b]$. Montrer que

$$\left(\int_a^b f(t)^n\,dt\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup_{t\in[a,b]} f(t).$$

2 Intégrales sur un intervalle quelconque

Exercice 6. Intégrabilité. Etudier l'intégrabilité des fonctions suivantes

$$(1)\ f_1(t) = \frac{t^2+1}{t^3+t+3} \text{ sur } I = [1,+\infty[,\quad (2)\ f_2(t) = \frac{t}{e^t-1} \text{ sur } I =]0,+\infty[,\quad (3)\ f_3(t) = \sqrt{\frac{1-t}{t}} \text{ sur } I =]0,1],$$

$$(4)\ f_4(t) = \frac{1}{\ln t} \text{ sur } I = [2,+\infty[,\quad (5)\ f_5(t) = \sin\left(\frac{1}{t}\right) \text{ sur } I =]0,1],\quad (6)\ f_6(t) = \frac{\cos t}{1+t^2} \text{ sur } I = [0,+\infty[,$$

$$(7)\ f_7(t) = \frac{\sin t}{t(\ln^2(t)+1)} \text{ sur } I =]0,+\infty[,\quad (8)\ f_8(t) = \frac{\tan t - t}{t^{\frac{5}{2}}\sin t} \text{ sur } I =]0,1],\quad (9)\ \frac{e^{-1/t} - \cos(1/t)}{t} \text{ sur } I = [1,+\infty[,$$

$$(10)\ f_{10}(t) = \frac{\sqrt{\sin t}}{e^t - \cos t} \text{ sur } I =]0,1],\quad (11)\ f_{11}(t) = \ln(\cos(1/t)) \text{ sur } I = [5,+\infty[.$$

Exercice 7. Quelques intégrales impropres. Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes

$$(a)\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt,\quad (b)\int_1^{+\infty} \cos(t^2)\,dt,\quad (c)\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin t}{t}\right)dt.$$

Exercice 8. Intégrations par parties. Calculer les intégrales suivantes

$$(1)\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\,dt,\quad (2)\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,dt,\quad (3)\int_0^{+\infty} \frac{t\,dt}{(1+t^2)^2}.$$

Exercice 9. Changement de variable. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,dt$. Indication : Pour calculer I, on effectuera le changement de variable $u = t/2$.

Exercice 10. Polynômes orthogonaux. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\omega : I \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue et strictement positive. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto |x|^n \omega(x)$ est intégrable sur I. On pose $\mathcal{L}_2(I,\omega)$ l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ continues et telles que f^2 soit intégrable sur I. Pour $f,g \in \mathcal{L}_2(I,\omega)$, on introduit :

$$\langle f,g\rangle := \int_I f(t)g(t)\omega(t)\,dt.$$

1. Montrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est bien défini sur $\mathcal{L}_2(I,\omega)$. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathcal{L}_2(I,\omega)$
2. Montrer que $\mathbb{R}[X] \subset \mathcal{L}(I,\omega)$.
3. Montrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes vérifiant :
   (i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n.
   (ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle P_n, Q\rangle = 0$, pour tout polynôme Q de degré inférieur ou égal à $n-1$.
   (iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le coefficient dominant de P_n vaut 1.
4. Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3 dans chacun des cas suivants :
   (a) $I = [-1,1]$ et $\omega(t) = 1$. *Polynômes de Legendre*.
   (b) $I = \mathbb{R}^+$ et $\omega(t) = e^{-t}$. *Polynômes de Laguerre*.
   (c) $I = \mathbb{R}$ et $\omega(t) = e^{-t^2}$. *Polynômes d'Hermite*.
5. Pour tout polynôme P, on note $D(P)$ l'ensemble (éventuellement vide) des racines réelles de P qui sont dans $[-1,1]$ et qui ont un degré impair. Montrer que P s'écrit

   $$P(X) = R(X)\prod_{\alpha\in D(P)}(X-\alpha)$$

   où R est un polynôme ayant un signe constant sur $[-1,1]$.
6. Montrer que pour tout $n \geq 1$, P_n a exactement n racines réelles distinctes, toutes dans I.

3 Intégrales à paramètre

Exercice 11. Un prolongement $\mathcal{C}^1$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = 0$. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g(0) := f'(0) \quad \text{et} \quad \forall x \neq 0,\ g(x) := \frac{f(x)}{x}.$$

Montrer en utilisant le théorème de dérivation sous le signe $\int$ que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12. Encore une limite d'intégrales. Soit f une fonction définie sur $[0,1]$, à valeurs strictement positives et continue. Montrer que

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \left(\int_0^1 f(t)^\alpha \, dt \right)^{1/\alpha} = \exp\left(\int_0^1 \ln(f(t))\, dt \right).$$

Exercice 13. Calcul de l'intégrale gaussienne. On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt$, pour tout $x \geq 0$.

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Calculer f'.
3. On pose $g(x) = \int_0^x e^{-u^2}\, du$. Montrer que la fonction $f + g^2$ est constante sur $\mathbb{R}^+$.
4. Calculer $f(0) + g^2(0)$. Montrer que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$, et en déduire la formule

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 14. Une intégrale dépendant d'un paramètre. On pose pour tout $x \geq 0$,

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\, dt.$$

1. Justifier l'existence de $I(x)$ pour tout $x \geq 0$.
2. Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Calculer $I(x)$ et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-\lambda t}\, dt$, pour $\lambda > 0$.