Université Paris-Est Marne-la-Vallée
Préparation au CAPES
2009/2010

Algèbre linéaire

Matrices - Déterminants - Systèmes linéaires

1 Matrice d'une application linéaire - changement de base.

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donner sa matrice M' dans la base $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$, où $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 - e_2 + e_3$.

Exercice 2. Soit $\phi : E \to E$ un endomorphisme de E, $\dim(E) = n$. On suppose que $\phi^n = 0$ et $\phi^{n-1} \neq 0$; montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle ϕ est représentée par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Application : Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice 3. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 2 \\ 8 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont elles semblables ?

Exercice 4. Matrices de trace nulle Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ telle que $\mathrm{tr}(M) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que X_1 et MX_1 ne soient pas colinéaires.
2. En déduire que M est semblable à une matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & \cdots \\ \vdots & M_1 \end{pmatrix}$, où $M_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{tr}(M_1) = 0$.
3. En déduire que M est semblable à une matrice de diagonale nulle.
4. Montrer qu'une matrice M est de trace nulle si et seulement si elle s'écrit $M = UV - VU$, pour un certain couple $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2 Puissances de matrices

Exercice 5. Dans chacun des cas suivants, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & & (2) \\ & \ddots & \\ (2) & & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; on suppose qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que $\begin{cases} A &= \alpha U + \beta V \\ A^2 &= \alpha^2 U + \beta^2 V \\ A^3 &= \alpha^3 U + \beta^3 V \end{cases}$. Montrer que pour tout $p \geq 1$, $A^p = \alpha^p U + \beta^p V$.

3 Matrices inversibles

Exercice 7. Déterminer les inverses des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} (0) & & a_n \\ & \cdot & \\ a_1 & & (0) \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 + a_1 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 1 + a_n \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Quaternions Montrer que $\mathcal{H} = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{C} \right\}$ est un corps non commutatif, appelé corps des quaternions.

Exercice 9. On note (E_{ij}) la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $F_{ij} = I + E_{ij}$ est inversible.
2. Déterminer les matrices M telles que $MP = PM$ pour toute $P \in GL_n(\mathbb{K})$.
3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie ; que dire d'un endomorphisme ayant même matrice dans toutes les bases de E ?

Exercice 10. Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle ; montrer que $\mathrm{Vect}(Gl_n(\mathbb{K})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 11. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique ; montrer que $I + M$ est inversible.

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{Q})$ telle que $a_{ij} = C_{j-1}^{i-1}$. Interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme simple de $\mathbb{Q}_n[X]$. En déduire A^{-1}.

Exercice 13. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec A inversible. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

1. Effectuer une décomposition LU par blocs de la matrice M. (voir exercice 29)
2. En déduire que $\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$. Que peut on dire quand A et C commutent ?
3. On suppose que M, A, B, C et D sont inversibles ; en s'inspirant de la question 1, déterminer M^{-1}.

4 Déterminants

Exercice 14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; montrer que $|\det(A)| \leq \displaystyle\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Exercice 15. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$; montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Exercice 16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; calculer le déterminant de l'application linéaire $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : X \mapsto AX$.

Exercice 17. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; donner le rang de la comatrice de A en fonction de celui de A.

Exercice 18. Calculer les déterminants suivants :

$$(1)\begin{vmatrix} a+b & ab & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & ab \\ (0) & & 1 & a+b \end{vmatrix} \quad (2)\begin{vmatrix} 1 & & & (1) \\ & 1-x & & \\ & & \ddots & \\ (1) & & & n-x \end{vmatrix} \quad (3)\begin{vmatrix} C_n^0 & C_n^1 & \cdots & C_n^p \\ C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 & \cdots & C_{n+1}^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n+p}^0 & C_{n+p}^1 & \cdots & C_{n+p}^p \end{vmatrix}$$

$$(4)\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \cdots & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ b_{n-1} & & & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \cdots & \cdots & & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

Exercice 19. Déterminant de Vandermonde Pour tout $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, calculer le déterminant

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Exercice 20. Déterminant de Cauchy Soit $(a_i)_{i\leq n}, (b_i)_{i\leq n}$ telles que $a_i + b_i \neq 0$ pour tout i. On veut calculer le déterminant de Cauchy Δ_n :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}.$$

1. Que vaut Δ_n si les a_i ne sont deux à deux distincts ?
2. Déterminer $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $F(x) = \frac{(b_1-X)\cdots(b_{n-1}-X)}{(X+a_1)\cdots(X+a_n)} = \frac{\lambda_1}{X+a_1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{X+a_n}$.
3. Montrer que $\Delta_n = \frac{F(b_n)}{\lambda_n}\Delta_{n-1}$, puis donner une expression de Δ_n en fonction des a_i, b_j.

Exercice 21. Résultant de deux polynômes Soient $P = a_o + a_1X + \ldots + a_pX^p$ et $Q = b_o + b_1X + \ldots + b_qX^q$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$. Le résultant des polynômes P, Q noté $\mathrm{Res}(P,Q)$ est le déterminant suivant :

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_p & & & & b_q & & \\ a_{p-1} & \ddots & & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \ddots & b_q \\ a_o & \ddots & \ddots & a_p & b_1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & a_{p-1} & b_o & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & & & b_1 \\ & & & a_o & & & b_o \end{vmatrix}.$$

(Les q premières colonnes de la matrice sont formées des coefficients de P et les p dernières des coefficients de Q.) Montrer que $\mathrm{Res}(P,Q) \neq 0$ si et seulement si les polynômes P et Q sont premiers entre eux.

5 Systèmes linéaires - Rang - Méthode du pivot

Exercice 22. Résoudre les systèmes suivants :

$$(1) \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + 3z & = & 6 \\ 3x + y - 5z & = & -3 \\ -8x + 3y + 6z & = & -5 \end{array} \right. \qquad (2) \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 3y + z & = & 0 \\ x + 2y + 4z & = & 0 \\ 5x - 4y + 6z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$(3) \left\{ \begin{array}{rcl} 2x + y - z & = & a \\ x + my + z & = & b \\ 3x + y - mz & = & c \end{array} \right. \quad \text{avec } a, b, c, m \in \mathbb{R}.$$

Exercice 23. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 24. Soit $M = \begin{pmatrix} A & O \\ B & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{rg}(M) \geq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(C)$, et qu'il y a égalité si l'une des matrices A ou C est inversible.

Exercice 25. Soit $a \leq b \in [-1, 1]$ et $\alpha, \beta \geq 0$. Pour toute $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, on pose $I(f) = \alpha f(a) + \beta f(b)$. On définit

$$d = \max \left\{ n \in \mathbb{N} : I(P) = \int_0^1 P(t)\, dt, \forall P \in \mathbb{R}_n[X] \right\}.$$

Déterminer a, b, α, β de sorte que d soit le plus élevé possible.

Exercice 26. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer en utilisant la méthode du pivot que A est inversible.

Exercice 27. Décomposition LU Soit $M \in GL_n(\mathbb{K})$; on dit que M admet une décomposition LU si M s'écrit $M = LU$, avec L triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale et U triangulaire supérieure.

1. Montrer que si $M \in GL_n(\mathbb{K})$ admet une décomposition LU, alors celle-ci est unique.
2. Pour tout $k \leq n$, on note $M^{(k)}$ la matrice $M^{(k)} = [m_{ij}]_{i \leq k, j \leq k}$ et de même pour $U^{(k)}$, $L^{(k)}$. Montrer que si $M = LU$, alors $M^{(k)} = L^{(k)} U^{(k)}$, pour tout $k \leq n$. En déduire que si M admet une décomposition LU, alors $M^{(k)} \in GL_k(\mathbb{K})$, pour tout $k \leq n$.
3. Réciproquement, établir que si $M^{(k)} \in GL_k(\mathbb{K})$ pour tout $k \leq n$, alors M admet une décomposition LU. Indication : Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss sur les lignes de la matrice M.
4. Donner la décomposition LU de la matrice : $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 5 \\ -2 & -6 & -1 & 6 \\ 8 & 10 & 2 & 17 \end{pmatrix}$.