Université Paris-Est Marne-la-Vallée
Préparation au CAPES
2009/2010

Algèbre linéaire

- Exercices supplémentaires -

Exercice 1. Résultant de deux polynômes Soient $P = a_o + a_1 X + \ldots + a_p X^p$ et $Q = b_o + b_1 X + \ldots + b_q X^q$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$. Le résultant des polynômes P, Q noté $\mathrm{Res}(P,Q)$ est le déterminant suivant :

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_p & & & & b_q & & \\ a_{p-1} & \ddots & & & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \ddots & b_q \\ a_o & \ddots & \ddots & a_p & b_1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & a_{p-1} & b_o & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & & & b_1 \\ & & & a_o & & & b_o \end{vmatrix}.$$

(Les q premières colonnes de la matrice sont formées des coefficients de P et les p dernières des coefficients de Q.)

1. On considère l'application $\Phi : K_{q-1}[X] \times K_{p-1}[X] \to K_{p+q-1}[X] : (R,S) \mapsto PR + QS$. Montrer que $\mathrm{Res}(P,Q)$ est le déterminant de la matrice de Φ dans les bases
$$\mathcal{B}_1 = \big((X^{q-1},0),(X^{q-2},0),\ldots,(1,0),(0,X^{p-1}),(0,X^{p-2}),\ldots(0,1)\big) \quad \text{base de } K_{q-1}[X]\times K_{p-1}[X]$$
et
$$\mathcal{B}_2 = \big(X^{p+q-1}, X^{p+q-2}, \ldots, X, 1\big) \quad \text{base de } K_{p+q-1}[X].$$
2. Montrer que P et Q sont premiers entre eux si et seulement si $\ker(\Phi) = \{0\}$. En déduire que P et Q sont premiers entre eux, si et seulement si $\mathrm{Res}(P,Q) \neq 0$.
3. a) Montrer que
$$\mathrm{Res}(P,Q) = \det_{\mathcal{B}_2}\big(X^{q-1}P, X^{q-2}P, \ldots, XP, P, X^{p-1}Q, X^{p-2}Q, \ldots, XQ, Q\big).$$
Pour tout $i \in \{1,\ldots,p\}$, on pose $R_i \in K_{p-1}[X]$ le reste de la division euclidienne de $X^{p-i}Q$ par P ; montrer que
$$\mathrm{Res}(P,Q) = \det_{\mathcal{B}_2}\big(X^{q-1}P, X^{q-2}P, \ldots, XP, P, R_1, R_2, \ldots, R_{p-1}, R_p\big).$$
En déduire que
$$\mathrm{Res}(P,Q) = a_p^q \det_{\mathcal{B}_3}(R_1, R_2, \ldots, R_p),$$
où $\mathcal{B}_3$ est la base $(X^{p-1}, X^{p-2}, \ldots, X, 1)$ de $K_{p-1}[X]$.
b) On considère $\psi_Q : K_p[X]/(P) \to K_p[X]/(P) : \overline{T} \mapsto \overline{TQ}$. Montrer que $\det(\psi_Q) = \det_{\mathcal{B}_3}(R_1, R_2, \ldots, R_p)$. Si $S, T \in K[X]$, montrer que $\det(\psi_{ST}) = \det(\psi_S)\det(\psi_T)$. En déduire, la formule
$$\mathrm{Res}(P,ST) = \mathrm{Res}(P,S)\mathrm{Res}(P,T.)$$
d) Montrer que $\mathrm{Res}(X-\alpha, Q) = Q(\alpha)$. Déduire du point b) que si P est scindé sur K de racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ alors
$$\mathrm{Res}(P,Q) = a_p^q Q(\alpha_1)\cdots Q(\alpha_p),$$
et si de plus Q est scindé sur K de racines $\beta_1, \ldots, \beta_q$, alors
$$\mathrm{Res}(P,Q) = a_p^q b_q^p \Pi_{i=1}^p \Pi_{j=1}^q (\alpha_i - \beta_j).$$

Exercice 2. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec A inversible. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

1. Effectuer une décomposition LU par blocs de la matrice M. (voir exercice 29)
2. En déduire que $\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$. Que peut on dire quand A et C commutent ?
3. On suppose que M, A, B, C et D sont inversibles ; en s'inspirant de la question 1, déterminer M^{-1}.

Exercice 3. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante si elle vérifie $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

1. Montrer en utilisant la méthode du pivot qu'une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.
2. Montrer que le déterminant d'une matrice rélle à diagonale strictement dominante dont tous les coefficients diagonaux sont positifs est strictement positif.

Exercice 4.

1. Soit $\ell : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une forme linéaire. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \ell(M) = \operatorname{tr}(AM)$.
2. Donner la différentielle de l'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} : A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \mapsto \det(A)$.

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; donner le rang de la comatrice de A en fonction de celui de A.