Quelques propriétés des nombres réels.

1. Introduction

L'ensemble des entiers naturels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

est muni d'une loi d'addition notée $+$. Si l'on ajoute aux entiers naturels leurs opposés, on obtient l'ensemble des entiers relatifs

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-1, -2, -3, \ldots\}.$$

Dans cette nouvelle structure, il est désormais possible de faire des additions et des soustractions. Le produit $\times$ de deux entiers relatifs est également bien défini. En revanche, pour pouvoir faire des divisions, il faut considérer l'ensemble des nombres rationnels

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q};\ (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

L'ensemble $\mathbb{Q}$, muni des lois $+$ et $\times$, possède une structure algébrique dite de *corps*.

Cet ensemble $\mathbb{Q}$ est malgré tout insuffisant pour aborder certaines questions de mathématiques élémentaires. Par exemple, on sait d'après le théorème de Pythagore que dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des longueurs des côtés opposés. Si, par exemple, ces côtés sont tous les deux de longueur 1, alors la longueur ℓ recherchée doit vérifiée l'équation

$$\ell^2 = 2.$$

Proposition 1.1. *L'équation $\ell^2 = 2$ n'admet pas de solution dans l'ensemble $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde, et supposons que l'équation admette une solution rationnelle $\ell = p/q$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que p et q sont premiers entre eux. Rappelons que cela signifie que leurs seuls diviseurs communs sont -1 et 1. La relation $\ell^2 = 2$ entraîne l'égalité

$$p^2 = 2q^2. \tag{1}$$

De cette relation, nous concluons que p^2 est un nombre pair.
Or le carré d'un nombre impair est lui aussi impair : en effet, si $n \in \mathbb{Z}$, alors $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$. Comme p^2 est pair, nous en déduisons que p est pair. Il s'écrit donc $p = 2k$, avec $k \in \mathbb{Z}$. En reportant cette information dans l'égalité (1), il vient $4k^2 = 2q^2$ et donc en simplifiant par 2

$$q^2 = 2k^2.$$

Le même raisonnement que celui fait au dessus conduit à la conclusion que q est pair. En conclusion, p et q sont tous les deux pairs et ne sont donc pas premiers entre eux - contradiction. Nous en concluons que l'équation $\ell^2 = 2$ n'a pas de solution rationnelle. $\square$

Pour tenir compte des quantités irrationnelles telles que $\sqrt{2}$ ou π, il faut envisager une structure plus grande que l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Si le passage de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$ puis de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$ est facile à comprendre, la construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ est beaucoup plus difficile et dépasse le niveau de ce cours. Dans ce qui suit, nous nous bornerons à décrire les propriétés de base de l'ensemble des nombres réels.

Structure de corps. $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps. Cela signifie que l'on peut faire des additions des soustractions, des multiplications et des divisions de nombres réels. Ces opérations vérifient les règles de calcul classiques (distributivité, associativité).

Représentation des réels. Concrètement, un nombre réel est représenté par son développement décimal :

$$x = 17,345234578956\ldots$$

Un point intéressant à souligner est qu'un nombre réel est rationnel si et seulement si ce développement est périodique à partir d'un certain rang.

Considérons par exemple,

$$x = 0,32424242424\ldots$$

Posons $y = 10x - 3 = 0,242424242424\ldots$; ce nombre y vérifie l'équation $100y = 24 + y$ et donc $y = 24/99$, ce qui donne $x = 3/10 + 24/990 = 321/990$.

2. Inégalités, majorants, bornes supérieures

2.1. Inégalités sur les réels.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$ permettant de classer les réels. Cette relation vérifie les propriétés suivantes : pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcll} & & x \leq x & \textit{réfléxivité.} \\ (x \leq y \quad \text{et} \quad y \leq x) & \Rightarrow & (x = y) & \textit{antisymétrie} \\ (x \leq y \quad \text{et} \quad y \leq z) & \Rightarrow & (x \leq z) & \textit{transitivité.} \end{array}$$

En outre elle est compatible avec la loi $+$: pour tous $x, y, c \in \mathbb{R}$, on a

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + c \leq y + c.$$

Elle est aussi compatible avec la loi $\times$: pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $c \geq 0$, on a

$$x \leq y \quad \Rightarrow \quad cx \leq cy.$$

On écrit $x < y$ lorsque $x \leq y$ et $x < y$.

Quelques sous-ensembles de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\
&\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}; 0 \leq x\}, \qquad \mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 0\}, \\
&\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x\}, \qquad \mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R}; x < 0\},
\end{aligned}$$

Plus généralement, il y a neuf types d'intervalles :

$$\begin{aligned}
&[a; b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\} \qquad]a; b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\} \\
&[a; b[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} \qquad]a; b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} \\
&[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x\} \qquad]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R}; a < x\} \\
&]-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq b\} \qquad]-\infty; b[= \{x \in \mathbb{R}; x < b\} \\
&]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

2.2. **Deux fonctions élémentaires d'usage fréquent.** Nous introduisons deux fonctions très simples mais d'un usage très fréquent : la fonction valeur absolue et la fonction partie entière.

2.2.1. *La fonction valeur absolue.*

Définition 2.1. *On appelle valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$, le nombre réel noté $|x|$ défini par*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

La proposition suivante regroupe les propriétés de la fonction $|\cdot|$.

Proposition 2.2. *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$*

(1) $|xy| = |x| \cdot |y|$,
(2) $|x + y| \leq |x| + |y|$, *première forme de l'inégalité triangulaire.*
(3) $||x| - |y|| \leq |x - y|$, *seconde forme de l'inégalité triangulaire.*
(4) *Pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, $\{z \in \mathbb{R}; |z| \leq a\} = [-a; a]$.*
(5) *Pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, $\{z \in \mathbb{R}; |z| \geq a\} =]-\infty; -a] \cup [a; +\infty[$.*

L'inégalité triangulaire est d'un usage extrêmement fréquent.

2.2.2. *La fonction partie entière.*

Définition 2.3. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$, tel que*

$$n \leq x < n + 1.$$

Ce nombre est appelé "partie entière" de x et est noté $[x]$ ou encore $E(x)$.

Par exemple,

$$E(0,56) = 0 \quad E(1,23) = 1 \quad E(-1,23) = -2 \quad E(-2,56) = -3.$$

2.3. **Majorant, maximum et borne supérieure.**

Définition 2.4 (Majorant d'un ensemble)**.** *Soit $A \subset \mathbb{R}$; on dit que $M \in \mathbb{R}$ est un* majorant *de A si*

$$\forall x \in A, \quad x \leq M.$$

Autrement dit, tous les éléments de A sont majorés par le nombre M. On dit aussi que A est majoré par M.

Par exemple, l'ensemble $A = [0, 1[$ est majoré par 1, par 34.
L'ensemble

$$B = \left\{ \frac{n}{n+1};\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

est majoré par 1, car $n/(n+1) \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 2.5 (Maximum d'un ensemble)**.** *Soit $A \subset \mathbb{R}$; on dit que $M \in \mathbb{R}$ est le* maximum *de A si $M \in A$ et M est un majorant de A. On parle aussi de "plus grand élément" de A. Ce nombre est noté $M = \max(A)$.*

Exemples.
- Si $A = \{0; 2.34; 67; 124\}$, $\max(A) = 124$. Plus généralement, toute partie finie admet un plus grand élément.
- L'ensemble

$$B = \left\{ \frac{1}{2n+3};\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

a pour plus grand élément 1/3. En effet, $1/3 = 1/(2 \times 0 + 3) \in B$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $2n + 3 \geq 3$ et donc $1/(2n + 3) \leq 1/3$.
- **Attention :** certains ensembles ne possèdent pas de plus grand élément. Par exemple $C = [0, 1[$ est majoré par 1, mais n'a pas de plus grand élément. En effet, si on prend $a \in [0, 1[$, alors $2a < a + 1 < 2$ et donc

$$a < \frac{a+1}{2} < 1.$$

Cet encadrement prouve que $(a + 1)/2$ appartient à A et est strictement plus grand que a. Donc a n'est pas le plus grand élément de A. Comme a est arbitraire, on conclut que A n'a pas de plus grand élément.

Définition 2.6 (Borne supérieure d'un ensemble)**.** *Soit $A \subset \mathbb{R}$; on dit que $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de A, si c'est le plus petit des majorants de A. Ce nombre est noté $M = \sup A$.*

Le nombre M est la borne supérieure de A si et seulement si :

(1) M est un majorant de A
    et
(2) si $N < M$, alors N n'est pas un majorant de A, c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ tel que $N < a$.

Exemples :

(1) La borne supérieure de $A = [0; 1[$ est 1.
Tout d'abord, 1 est un majorant de A.
Montrons ensuite qu'aucun nombre $N < 1$ n'est majorant de A.
- Si $N < 0$, alors N n'est pas un majorant puisque $0 \in A$.
- Si $N \in [0; 1[$, on a vu plus haut que $N < \frac{N+1}{2} < 1$, ce qui prouve que N n'est pas un majorant de A. En conclusion, le plus petit majorant de A est bien 1.

(2) On considère
$$B = \left\{ \frac{n}{n+1};\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$
Montrons que $\sup B = 1$.
Tout d'abord, on a vu plus haut que 1 était bien un majorant de A.
Montrons à présent qu'aucun nombre $N < 1$ n'est majorant de A.
- Si $N < 0$, c'est évident puisque $0 \in A$.
- Supposons que $N \in]0; 1[$. On peut écrire $N = 1 - \varepsilon$, avec $\varepsilon \in]0, 1[$. Il s'agit de trouver $n_o \in \mathbb{N}$ tel que
$$1 - \varepsilon < \frac{n_o}{n_o + 1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n_o + 1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n_o > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$
Pour cela, on peut prendre $n_o = E(1/\varepsilon)$. En effet, par définition de la partie entière, on a l'encadrement
$$n_o \leq \frac{1}{\varepsilon} < n_o + 1.$$

Théorème 2.7. *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure.*

La preuve de ce résultat est intrinsèquement liée à la construction de $\mathbb{R}$.

2.4. **Minorant, minimum et borne inférieure.**

Définition 2.8 (Minorant d'un ensemble)**.** *Soit $A \subset \mathbb{R}$; on dit que $m \in \mathbb{R}$ est un* minorant *de A si*
$$\forall x \in A, \quad m \leq x.$$
Autrement dit, m est majoré par tous les éléments de A. On dit aussi que A est minoré par m.

Définition 2.9 (Minimum d'un ensemble)**.** *Soit $A \subset \mathbb{R}$; on dit que $m \in \mathbb{R}$ est le* minimum *de A si $m \in A$ et m est un minorant de A. On parle aussi de "plus petit élément" de A. Ce nombre est noté $M = \min(A)$.*

Définition 2.10 (Borne inférieure d'un ensemble)**.** *Soit $A \subset \mathbb{R}$; on dit que $m \in \mathbb{R}$ est la borne inférieure de A, si c'est le plus grand des minorants de A. Ce nombre est noté $M = \inf A$.*

Le nombre m est la borne inférieure de A si et seulement si :

(1) m est un minorant de A
et

(2) si $m < n$, alors n n'est pas un minorant de A, c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ tel que $a < n$.

Théorème 2.11. *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.*

Définition 2.12. *Soit $A \subset \mathbb{R}$; on dit que A est borné si il est à la fois majoré et minoré.*

Exercices

Exercice 1. Démontrer la proposition 2.2.

Exercice 2. Montrer que si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des nombres réels, alors
$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

Exercice 3. On pose $A = \{x \in \mathbb{R}; |x-2| \leq 3 \quad \text{et} \quad |x-1| \geq 1\}$. Montrer que
$$A = [-1; 0] \cup [2; 5].$$

Exercice 4. Quelques propriétés de $E(\,\cdot\,)$

(1) Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto E(x)$.

(2) Montrer que si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{Z}$, $E(x+y) = E(x) + y$.

(3) Plus généralement, montrer que si $x, y \in \mathbb{R}$
$$E(x+y) - E(x) - E(y) \in \{0, 1\}.$$

Exercice 5. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un rationnel $r \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.

Exercice 6. Déterminer la borne supérieure de
$$A = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k};\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Exercice 7. Déterminer la borne inférieure de
$$A = \left\{ \frac{1}{1+n^2};\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$