Université Paris Est Marne-la-Vallée **L1 Sciences Physiques 2011 - 2012**
Compléments en Analyse

Convergence des suites numériques.

1. Introduction

Soit E un ensemble quelconque ; une *suite* à valeurs dans E est une application

$$u : \mathbb{N} \to E.$$

On note traditionnellement u_n au lieu de $u(n)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

Dans ce cours, on ne considérera que des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$, mais il peut être intéressant de considérer des suites de nombres complexes, des suites de vecteurs, des suites de fonctions *etc...*

La notion qui va être au centre de ce cours (et qui servira d'appui aux prochains chapitres) est celle de *limite d'une suite*. De manière intuitive, on dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite ℓ (on dit aussi qu'elle converge vers ℓ) si les nombres u_n deviennent de plus en plus proches du nombre ℓ lorsque n devient très grand. Par exemple, la suite $u_n = 1 + 1/(1 + n^2)$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Limite d'une suite

Voyons à présent la définition formelle de la convergence d'une suite.

Définition 2.1 (Convergence d'une suite)**.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ lorsque n tend vers $+\infty$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Le nombre ℓ est appelé la limite *de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour traduire le fait que ℓ est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on utilise la notation :*

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

Cet énoncé signifie la chose suivante. Pour tout nombre $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'on veut, tous les termes de la suite à partir du rang $N(\varepsilon)$ appartiennent à l'intervalle $]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$. Si ε est très petit, les termes de la suite seront très proches de la limite ℓ. Remarquons, qu'en généneral, $N(\varepsilon)$ est d'autant plus grand que ε est petit.

Voyons tout de suite deux exemples simples de suites convergentes :

Proposition 2.2 (Exemples)**.**

(1) *La suite $u_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.*

(2) *La suite $v_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$, avec $0 < a < 1$, converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.*

Concrètement, pour établir la convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un nombre ℓ, on va procéder de la manière suivante :
- on se donne un nombre $\varepsilon > 0$,
- pour ce nombre ε, on détermine à partir de quel rang $N(\varepsilon)$ les inégalités

$$\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$$

sont vérifiées.

Démonstration.
(1) Soit $\varepsilon > 0$; cherchons à partir de quel rang l'inégalité $\frac{1}{n} < \varepsilon$ est vérifiée.

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > 1/\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n \geq E\left(1/\varepsilon\right) + 1,$$

la dernière équivalence venant de la définition de la partie entière d'un nombre. Pour tout $\varepsilon > 0$, posons donc $N_1(\varepsilon) = E\left(1/\varepsilon\right) + 1$. On a bien

$$\forall n \geq N_1(\varepsilon), \qquad |u_n| < \varepsilon,$$

ce qui prouve que u_n tend vers 0.
(2) Soit $\varepsilon > 0$; cherchons à partir de quel rang l'inégalité $a^n < \varepsilon$ est vérifiée.

$$a^n < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n\ln(a) < \ln(\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(a)} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq E\left(\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(a)}\right) + 1 := N_2(\varepsilon)$$

On a bien

$$\forall n \geq N_2(\varepsilon), \qquad |v_n| < \varepsilon,$$

ce qui prouve que v_n tend vers 0.
Remarque : Les deux suites précédentes tendent vers 0, mais la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge beaucoup plus rapidement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette propriété se voit en comparant les nombres $N_1(\varepsilon)$ et $N_2(\varepsilon)$. On a $N_1(\varepsilon) \gg N_2(\varepsilon)$, ce qui signifie que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ entre dans l'intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$ bien avant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Donnons maintenant la définition des limites infinies.

Définition 2.3. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}^+, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n > A.$$

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R}^-, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n < A.$$

On utilise les notations

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad ou \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

Proposition 2.4 (Exemples)**.**

(1) *La suite $u_n = n$, $n \in \mathbb{N}^*$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.*
(2) *La suite $v_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$, avec $a > 1$, tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.*

Démonstration.
(1) Soit $A > 0$; cherchons à partir de quel rang l'inégalité $n > A$ est vérifiée.

$$n > A \quad \Leftrightarrow \quad n \geq E\,(A) + 1,$$

la dernière équivalence venant de la définition de la partie entière d'un nombre. Pour tout $A > 0$, posons donc $N(A) = E\,(A) + 1$. On a bien

$$\forall n \geq N(A), \qquad u_n > A,$$

ce qui prouve que u_n tend vers $+\infty$.
(2) Soit $A > 0$; cherchons à partir de quel rang l'inégalité $a^n > A$ est vérifiée.

$$a^n > A \qquad n > \frac{\ln(A)}{\ln(a)} \quad \Leftrightarrow \quad n \geq E\left(\frac{\ln(A)}{\ln(a)}\right) + 1 := N(A)$$

On a bien

$$\forall n \geq N(A), \qquad v_n > A,$$

ce qui prouve que v_n tend vers $+\infty$. □

3. Opérations sur les limites

On rappelle que $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Les lois $+$ et $\times$ sont prolongées à $\overline{\mathbb{R}}$ de la manière suivante

$+$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x+y$	$+\infty$
$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$

$\times$	$-\infty$	$y < 0$	0	$y > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$-\infty$
$x < 0$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
0	F.I.	0	0	0	F.I.
$x > 0$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$

F.I. signifie “forme indéterminée” : dans ce cas, l'opération n'est pas définie. On pose également

$$\frac{1}{+\infty} = 0, \quad \frac{1}{-\infty} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{0} = \text{F.I.}$$

Avec ces conventions, on a le résultat suivant.

Proposition 3.1 (Opérations sur les limites)**.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs réelles et $\ell, \ell' \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell'$.*

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha u_n) = \alpha\ell, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell',$

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell}$

Exemples :
(1) On a vu que la suite $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeait vers 0. Par produit de limites, on en déduit que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, la suite $(1/n^p)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

(2) De même, $n \to +\infty$, donc par produit, $n^p \to +\infty$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
(3) Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^3 + 4n^2 + 5n + 7}{3n^3 + 5n + 4}.$$

En écrivant

$$u_n = \frac{1 + 4/n + 5/n^2 + 7/n^3}{3 + 5/n^2 + 4/n^3},$$

et en appliquant les opérations sur les limites, on conclut que $u_n \to 1/3$ lorsque $n \to +\infty$.

Démonstration. Il serait très fastidieux de traiter tous les cas. Nous renvoyons à n'importe quel livre de niveau L1 pour une étude exhaustive. Nous ne traiterons que quelques cas.

(2) On suppose que $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$; la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_1, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon/2.$$

De même, comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ', il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, \quad |v_n - \ell'| \leq \varepsilon/2.$$

Posons, $N = \max(N_1; N_2)$. Si $n \geq N$, alors on a

$$|u_n + v_n - (\ell + \ell')| \leq |u_n - \ell| + |v_n - \ell'| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

où la première inégalité vient de l'inégalité triangulaire et la seconde du fait que $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$. Cela prouve que $u_n + v_n$ converge vers $\ell + \ell'$.

(3) On traite le cas $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. D'après le lemme 3.2 ci-dessous, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

Soit $\varepsilon > 0$; d'après la convergence des suites, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq N_1, \quad |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2(1 + |\ell'|)},$$

et

$$\forall n \geq N_2, \quad |v_n - \ell'| \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Posons $N = \max(N_1; N_2)$. Alors pour tout $n \geq N$, on a

$$|u_n v_n - \ell\ell'| = |u_n(v_n - \ell') + \ell'(u_n - \ell)| \leq M\frac{\varepsilon}{2M} + |\ell'|\frac{\varepsilon}{2(1 + |\ell'|)} \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que $u_n v_n$ converge vers $\ell\ell'$.

(1) Le point (1) est un cas particulier du point (3). En effet, la suite constante $v_n = \alpha$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers α. Donc si u_n converge vers ℓ, le produit $u_n v_n = \alpha u_n$ converge vers $\alpha\ell$. $\square$

Lemme 3.2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

Démonstration. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers ℓ, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq 1.$$

D'après la seconde forme de l'inégalité triangulaire, on a $|u_n| - |\ell| \leq |u_n - \ell|$. On en déduit que

$$\forall n \geq N, \quad |u_n| \leq |\ell| + 1.$$

En posant $M = \max(|u_0|; |u_1|; \ldots; |u_{N-1}|; |\ell| + 1)$, on voit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M,$$

ce qui prouve que la suite est bornée. □

4. Limites et encadrements

Proposition 4.1 (Passage à la limite dans une inégalité)**.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes à valeurs réelles. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$; comme les deux suites convergent il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ell - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq \ell' + \varepsilon.$$

On en déduit que $\ell - \ell' \leq 2\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\ell - \ell' \leq 0$. En effet, si on avait au contraire $\ell - \ell' > 0$, on aurait en prenant $\varepsilon = (\ell - \ell')/4$, l'inégalité $0 < \ell - \ell' \leq (\ell - \ell')/2$, absurde. □

Le résultat suivant est souvent très utile pour établir la convergence d'une suite.

Théorème 4.2 (Théorème des gendarmes)**.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites à valeurs réelles telles que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et convergent vers la même limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente de limite ℓ.

Démonstration. On traitera uniquement le cas $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$; il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \ell - \varepsilon \leq w_n \leq \ell + \varepsilon$$

et

$$\forall n \geq N, \quad \ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon.$$

On a donc, pour tout $n \geq N$

$$\ell - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq \ell + \varepsilon,$$

et donc

$$\forall n \geq N, \quad |v_n - \ell| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que v_n converge vers ℓ. □

5. Exercices

Exercice 1. Montrer que la limite d'une suite est unique.

Exercice 2. Montrer que la suite $u_n = (-1)^n$ ne possède pas de limite quand n tend vers $+\infty$. Même question pour la suite $u_n = \sin(n)$.

Exercice 3. Montrer que le produit d'une suite de limite nulle et d'une suite bornée est aussi de limite nulle. Déterminer la limite de $u_n = (-1)^n \sin(n)/n$.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs et de limite nulle. Montrer que la suite $(1/u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 5. Déterminer la limite de la suite $u_n = \frac{n!}{n^n}$.

Exercice 6. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}.$$

Exercice 7. Soit $x \in \mathbb{R}$; on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{E(nx)}{n}.$$

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 8. Soit $a > 0$; on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{a^n}{n!}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1) On pose $v_n = u_{n+1}/u_n$; montrer que v_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

(2) Soit $N_o \in \mathbb{N}$ tel que $v_n \leq 1/2$ pour tout $n \geq N_o$. Montrer que

$$\forall n \geq N_o, \quad 0 \leq u_n \leq u_{N_o} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N_o}.$$

(3) En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.