Convergence des suites monotones et applications.

1. Quelques définitions

Ce chapitre est consacré à la convergence des suites monotones, c'est-à-dire croissantes ou décroissantes.

Rappelons qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *croissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$. Elle est dite *décroissante* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$. Quand ces inégalités sont strictes, on parle de suites *strictement croissantes* ou *strictement décroissantes.*

Définition 1.1. *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles est dite :*
- majorée *s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.*
- minorée *s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.*
- bornée *si elle est à la fois majorée et minorée.*

2. Convergence des suites monotones

Le théorème suivant est le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 2.1 (Convergence des suites croissantes)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante*.*

(1) *Si la suite est majorée, alors elle converge vers $\ell = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

(2) *Si la suite n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$.*

Autrement dit, une suite croissante admet toujours une limite finie ou infinie.

Démonstration. (1) Supposons d'abord que la suite est majorée par un nombre $M \in \mathbb{R}$. Il en résulte que l'*ensemble*

$$U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$$

est non vide et majoré par M. Par conséquent, il admet une borne supérieure, notée ℓ.

Le nombre ℓ est par définition le plus petit des majorants de U. Comme ℓ est un majorant de U, on a tout d'abord

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell.$$

Prenons $\varepsilon > 0$; puisque ℓ est le plus petit des majorants de U, le nombre $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de U. Par suite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\ell - \varepsilon < u_N.$$

Comme la suite est supposée croissante, on a

$$\forall n \geq N, \quad \ell - \varepsilon < u_N \leq u_n.$$

Finalement, si $n \geq N$, on a $-\varepsilon < u_n - \ell \leq 0 < \varepsilon$ et donc $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

On a donc montré :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon,$$

c'est-à-dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

(2) On suppose maintenant que la suite n'est pas majorée. Cela signifie que pour tout $M \in \mathbb{R}^+$, il existe au moins un $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > M$. Comme la suite est croissante, on a donc

$$\forall n \geq N, \quad u_n \geq u_N > M.$$

On a donc montré :

$$\forall M \in \mathbb{R}^+, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n \geq M,$$

c'est-à-dire que la suite tend vers $+\infty$. □

Théorème 2.2 (Convergence des suites décroissantes)**.**
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite* décroissante*.*

(1) *Si la suite est minorée, alors elle converge vers* $\ell = \inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$*.*

(2) *Si la suite n'est pas minorée, alors elle tend vers* $-\infty$*.*

Démonstration. Appliquer le théorème précédent à la suite $-u_n$ qui est croissante. □

Exemples :

(1) On considère la suite $S_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. La suite est strictement croissante, car

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{(k+1)^2} > 0, \qquad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Montrons que cette suite est majorée. Pour cela, remarquons que

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (S_{k+1} - S_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

Or,

$$\sum_{k=1}^{n-1} (S_{k+1} - S_k) = S_n - S_1$$

et

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

On en déduit que

$$\forall n \geq 2, \quad S_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

En conclusion, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc elle converge.
Attention, le raisonnement précédent ne permet pas de déterminer la valeur de la limite ℓ de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut montrer que $\ell = \pi^2/6$, mais il faut utiliser pour cela des techniques plus élaborées.

(2) Considérons maintenant la suite $H_n = \sum_{i=1}^n 1/i$, $n \in \mathbb{N}^*$. Il s'agit encore d'une suite croissante, mais cette fois ci non majorée. En effet, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{i} \geq \int_i^{i+1} \frac{1}{t}\, dt = \ln(i+1) - \ln(i).$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \geq \sum_{i=1}^n (\ln(i+1) - \ln(i)) = \ln(n+1).$$

Comme la suite $u_n = \ln(n+1)$ tend vers $+\infty$, le théorème des gendarmes entraîne que H_n tend aussi vers $+\infty$.

3. Applications

3.1. **Suites adjacentes.**

Définition 3.1. *On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont* adjacentes *si l'une est croissante, l'autre est décroissante et $v_n - u_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.*

Théorème 3.2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes, alors elles convergent vers la même limite ℓ. De plus, dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq \ell \leq v_n$.*

Démonstration. On suppose que u_n est croissante et que v_n est décroissante. Par hypothèse, la suite $w_n = v_n - u_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Comme w_n est décroissante, on a $\inf\{w_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, ce qui prouve que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme la suite v_n est décroissante, on a $v_n \leq v_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $u_n \leq v_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite u_n est donc croissante et majorée, donc convergente. On voit de la même manière que la suite v_n est décroissante et minorée, donc convergente. Notons ℓ la limite de u_n et ℓ' celle de v_n. Comme $0 = \lim v_n - u_n = \ell' - \ell$, on conclut que u_n et v_n ont la même limite. On a donc $\sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \ell = \inf\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$, ce qui entraîne que $u_n \leq \ell \leq v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Exemples : Montrons d'une autre manière que la suite $S_n = \sum_{k=1}^n 1/k^2$, $n \in \mathbb{N}^*$ est convergente. Posons $T_n = S_n + \frac{1}{n}$. On a

$$T_{n+1} - T_n = S_{n+1} - S_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} < 0.$$

Par conséquent, la suite T_n est décroissante. Comme S_n est croissante et $T_n - S_n = 1/n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, les suites S_n et T_n sont adjacentes. D'après le théorème précédent, on conclut que les deux suites convergent vers la même limite.

3.2. **Le théorème de Bolzano-Weierstrass.**

Définition 3.3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles et $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\phi(n)},$$

est appelée suite extraite (ou sous suite) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples : Les applications ϕ suivantes sont strictement croissantes :

$$\phi_1(n) = 2n, \qquad \phi_2(n) = 2n+1, \quad \phi_3(n) = 2n^2, \quad \phi_4(n) = 2^n.$$

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \ln(n) + (-1)^n + 1/n^2$, et déterminons les suites extraites obtenues à l'aide des applications ϕ ci-dessus :

$$a_n = u_{\phi_1(n)} = \ln(2n) + 1 + \frac{1}{4n^2}.$$
$$b_n = u_{\phi_2(n)} = \ln(2n+1) - 1 + \frac{1}{(2n+1)^2}.$$
$$c_n = u_{\phi_3(n)} = \ln(2n^2) + 1 + \frac{1}{4n^4}.$$
$$d_n = u_{\phi_4(n)} = n\ln(2) + 1 + \frac{1}{2^{2n}}.$$

Théorème 3.4 (Bolzano-Weierstrass)**.** *De toute suite bornée on peut extraire au moins une sous-suite convergente.*

Démonstration. Nous allons construire une application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante de telle sorte que la suite extraite $v_n = u_{\phi(n)}$ soit monotone. Puisque la suite de départ u_n est bornée, la suite v_n sera aussi bornée et par conséquent convergente.

Pour mieux comprendre la construction qui suit, on dessine le graphe de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\{(n, u_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$ et l'on joint en pointillé les paires de points consécutifs de la forme (n, u_n) $(n+1, u_{n+1})$. On interprète le schéma ainsi obtenu comme la représentation d'une "chaîne de montagne" et on imagine une petite fourmi se déplaçant sur cette chaîne de montagne de la gauche vers la droite en regardant droit devant elle.

Nous dirons que "la vue est dégagée au point $n \in \mathbb{N}$" si

$$\forall m \geq n, \qquad u_m \leq u_n.$$

Quand la fourmi se trouve au point (n, u_n) elle peut regarder jusqu'à l'horizon, aucun sommet ne vient lui boucher la vue. On note N_1 l'ensemble de tous les entiers où la vue est dégagée.

Au contraire, nous dirons que "la vue est bouchée au point $n \in \mathbb{N}$" si

$$\exists m \geq n, \qquad u_m > u_n.$$

Cette fois, si la fourmi se trouve au point (n, u_n), elle ne pourra pas voir au delà du point (m, u_m) qui se trouve à une altitude plus élevée qu'elle. On note N_2 l'ensemble des entiers où la vue est bouchée.

Les ensembles N_1 et N_2 forment une partition de $\mathbb{N}$: $N_1 \cup N_2 = \mathbb{N}$ et $N_1 \cap N_2 = \emptyset$.

Supposons que l'ensemble N_1 soit infini. On peut énumérer ses éléments de manière strictement croissante : $N_1 = \{n_0 < n_1 < n_2 < n_3 < \ldots\}$. On pose alors $\phi(k) = n_k$ (le k ème élément de N_1 par ordre croissant), ce qui définit une application strictement croissante. Comme la vue est dégagée au point n_k et $n_{k+1} > n_k$, on a $u_{n_k} > u_{n_{k+1}}$, c'est-à-dire $u_{\phi(k)} \geq u_{\phi(k+1)}$. Par conséquent la suite $v_k = u_{\phi(k)}$ est décroissante.

Supposons maintenant que l'ensemble N_1 soit fini et notons M son plus grand élément (si N_1 est vide, on pose par convention $M = -1$). Il en résulte que $\{M+1, M+2, M+3, \ldots\} \subset N_2$.

Autrement dit au delà du point M, la vue est toujours bouchée. Posons $n_0 = M+1$; en ce point la vue est bouchée, donc il existe $n_1 > n_0$ tel que $u_{n_1} > u_{n_0}$. La vue est aussi bouchée en n_1, donc il existe $n_2 > n_1$ tel que $u_{n_2} > u_{n_1}$, *etc.*.. On construit de la sorte une suite strictement croissante d'entiers $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ telle que $u_{n_0} < u_{n_1} < u_{n_2} < u_{n_3} < \dots$ En posant $\phi(k) = n_k$ on obtient une application strictement croissante telle que la suite $v_k = u_{\phi(k)}$ soit strictement croissante.

Dans tous les cas, nous avons bien extrait de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous suite monotone, ce qui achève la preuve. $\square$

4. Exercices

Exercice 1. Déterminer la borne inférieure de

$$A = \left\{ \frac{1}{1+n^2};\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Exercice 2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!},$$

sont adjacentes. On admet que la limite commune de ces deux suites est le nombre $e = \exp(1)$. Montrer que e est irrationnel.

Exercice 3. Montrer que toute suite extraite d'une suite convergente est également convergente et a la même limite que la suite de départ. En déduire que la suite $u_n = (-1)^n$ ne converge pas.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont la même limite ℓ. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

Exercice 5. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Montrer que les suites $u_n = w_{2n}$ et $v_n = w_{2n+1}$ sont adjacentes. Que peut on en conclure sur la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?