Fonctions continues sur un intervalle.

1. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1.1 (Valeurs intermédiaires - 1 ère forme)**.** *Soit* $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, telle que* $f(a)f(b) \leq 0$. *Il existe* $c \in [a; b]$ *tel que* $f(c) = 0$.

Démonstration. La méthode utilisée dans cette preuve s'appelle le principe de dichotomie. Pour fixer les idées, on se place dans le cas où $f(a) \leq 0 \leq f(b)$.

Nous allons construire une suite $I_k = [a_k, b_k]$ de segments emboités (a_k croissante, b_k décroissante) telle que $a_0 = a$, $b_0 = b$, $b_k - a_k = (b - a)2^{-k}$, et telle que $f(a_k) \leq 0 \leq f(b_k)$.

Avant de passer à la construction, voyons pourquoi cela entraîne que f s'annule. Les suites a_k et b_k sont adjacentes, et convergent donc vers une même limite $c \in [a, b]$. Comme $f(a_k)f(b_k) \leq 0$, et f continue, on conclut en passant à la limite que $f(c)^2 \leq 0$, et donc que $f(c) = 0$.

Passons maintenant à la construction par récurrence des suites $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
- On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Supposons construits $(a_i)_{i\leq k}$ et $(b_i)_{i\leq k}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$ vérifiant les propriétés voulues jusqu'au rang k.

On pose $c_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$.
• Si $f(c_{k+1}) \leq 0$, on pose $a_{k+1} = c_{k+1}$ et $b_{k+1} = b_k$.
• Si $f(c_{k+1}) > 0$, on pose $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_{k+1}$.

Par construction, $a_{k+1} \geq a_k \geq \ldots \geq a_0$ et $b_{k+1} \leq b_k \leq \ldots \leq b_0$ et $b_{k+1} - a_{k+1} = (b_k - a_k)/2 = (b-a)2^{-(k+1)}$, et enfin $f(a_{k+1}) \leq 0$ et $f(b_{k+1}) \geq 0$, ce qui achève la construction au rang $k+1$. □

Plus généralement,

Corollaire 1.2. *Soit* $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue et* α *une valeur comprise entre* $f(a)$ *et* $f(b)$. *Il existe* $c \in [a; b]$ *tel que* $f(c) = \alpha$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la fonction $g(x) = f(x) - \alpha$. Elle vérifie en effet $g(a)g(b) \leq 0$. □

Rappelons que si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un ensemble D, on appelle *image* de f l'ensemble noté $f(D)$ et défini par

$$f(D) = \{f(x); x \in D\}.$$

Dans une représentation graphique de f, l'ensemble $f(D)$ est la projection du graphe de f sur l'axe des ordonnées.

Théorème 1.3 (Valeurs intermédiaires - Forme générale)**.** *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction définie sur un* intervalle I. *L'image de* f *est un intervalle.*

2. Fonctions continues sur un segment

Théorème 2.1. *Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un segment $[a;b]$. La fonction f est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe $x_0, x_1 \in [a;b]$ tel que*

$$f(x_o) = \inf\{f(x); x \in [a;b]\} := m \quad \text{et} \quad f(x_1) = \sup\{f(x); x \in [a;b]\} := M.$$

En résumé, $f([a;b]) = [m;M]$.

Démonstration. Montrons que f est majorée. Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas majorée. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un point $x_n \in [a;b]$ tel que $f(x_n) \geq n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc, d'après le théorème de Bolzano-Weirstrass, on peut en extraire une sous-suite qui converge : il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $y_n = u_{\phi(n)} \to c \in [a;b]$. Or, pour tout n, $f(y_n) \geq \phi(n) \geq n$ (la dernière inégalité a été vue en exercice). Le théorème de passage à la limite entraîne donc que $f(y_n) \to +\infty$, lorsque n tend vers $+\infty$. Mais comme f est continue, on a aussi $f(y_n) \to f(c) \in \mathbb{R}$ lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui contredit le point précédent. Par conséquent, la fonction f est majorée. Montrons à présent que sa borne supérieure M est atteinte. Raisonnons à nouveau par l'absurde, et supposons que $f(x) < M$ pour tout $x \in [a;b]$. Dans ce cas, la fonction $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}$ est bien définie sur $[a;b]$ et, par opération sur les fonctions continues, elle est également continue sur $[a;b]$. D'après ce qu'on vient de voir, la fonction $g > 0$ est donc majorée, et il existe donc $N > 0$ tel que $g(x) \leq N$ pour tout $x \in [a;b]$. Mais cette dernière inégalité équivaut à $f(x) \leq M - 1/N$ pour tout $x \in [a;b]$. Cela contredit le fait que M est la borne supérieure de f. On en conclut que f atteint bien sa borne supérieure. On montre de même que f est minorée et atteint sa borne inférieure. □

3. Exercices

Exercice 1. Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ une fonction continue ; montrer que f possède un point fixe $c \in [0;1]$, c'est-à-dire un point tel que $f(c) = c$.

Exercice 2. On considère la fonction $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^{\sin(x\pi/2)} - \frac{2}{1+x^2}.$$

Montrer que f s'annule au moins une fois sur $[0;1]$.

Exercice 3. Soient $f, g : [a;b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f(x) > g(x) > 0$ pour tout $x \in [a;b]$. Montrer qu'il existe $k > 1$ tel que $f(x) \geq kg(x)$ pour tout $x \in [a;b]$.

Exercice 4. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(x+y) = f(x)+f(y)$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Etudier la suite définie par l'équation de récurrence $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}u_n^2$, $u_0 \in \mathbb{R}$.