Dérivabilité et applications.

1. Dérivation et opérations sur les dérivées

Définition 1.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I ; on dit que f est dérivable en $x_o \in I$ si la fonction $I \setminus \{x_o\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ admet une limite lorsque x tend vers x_o. Cette limite est alors notée $f'(x_o)$ et s'appelle la "dérivée de f au point x_o".*

On utilise également la notation
$$\frac{d}{dx} f(x_o)$$
pour désigner la dérivée de f en x_o.

Exemple : Soit $p \in \mathbb{N}^*$; la dérivée de $f(x) = x^p$ est $f'(x) = px^{p-1}$. En effet, d'après la formule du binôme de Newton,
$$(x_o + h)^p = x_o^p + px_o^{p-1}h + \sum_{k=2}^{p} C_n^k x_o^{p-k} h^k.$$
Par conséquent,
$$\frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = px_o^{p-1} + \sum_{k=2}^{p} C_n^k x_o^{p-k} h^{k-1} \to px_o^{p-1},$$
lorsque $h \to 0$.

Proposition 1.2 (Opérations sur les dérivées)**.** *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $x_o \in I$.*

(1) *Les fonctions $f + g$ et fg sont dérivables en x_o et on a*
$$(f + g)'(x_o) = f'(x_o) + g'(x_o) \quad \text{et} \quad (fg)'(x_o) = f'(x_o)g(x_o) + f(x_o)g'(x_o).$$
(2) *Si $g(x_o) \neq 0$, alors la fonction f/g est dérivable en x_o et on a*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_o) = \frac{f'(x_o)g(x_o) - f(x_o)g'(x_o)}{g(x_o)^2}.$$
(3) *Si $h : J \to \mathbb{R}$ est définie sur un intervalle J contenant $f(I)$ et est dérivable au point $y_o = f(x_o)$ alors la fonction $h \circ f$ est dérivable en x_o et*
$$(h \circ f)'(x_o) = h'(f(x_o))f'(x_o).$$

Exemple : Soit $p \in \mathbb{Z}^*$; la fonction $f(x) = x^p$ a pour dérivée $f'(x) = px^{p-1}$. Le cas $p \in \mathbb{N}^*$ a été vu plus haut. Supposons $p = -n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, $f(x) = 1/g(x)$, avec $g(x) = x^n$. En appliquant la règle de dérivation d'un inverse, on obtient
$$f'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = px^{p-1}.$$

La proposition suivante rappelle l'expression de la dérivée de quelques fonctions classiques :

Proposition 1.3. *Les fonctions*

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \exp(x), \qquad]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x)$$

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \cos(x), \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(x), \quad \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\} : x \mapsto \tan(x)$$

sont dérivables en tous points de leurs ensembles de définition et on a les formules

$$\frac{d}{dx}(\exp)(x_o) = \exp(x_o), \quad \frac{d}{dx}(\ln)(x_o) = \frac{1}{x_o}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos)(x_o) = -\sin(x_o), \quad \frac{d}{dx}(\sin)(x_o) = \cos(x_o), \quad \frac{d}{dx}(\tan)(x_o) = 1 + \tan^2(x_o) = \frac{1}{\cos^2(x_o).}$$

2. Le théorème des accroissements finis

Théorème 2.1 (Théorème de Rolle)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$; si $f(a) = f(b)$ alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. Si f est constante sur $[a, b]$, on a $f'(c) = 0$ pour *tout* point $c \in]a, b[$. Supposons à présent que f n'est pas constante. Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, elle atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure. Il existe donc $c_1, c_2 \in [a, b]$ tels que $\min_{[a,b]} f = f(c_1)$ et $\max_{[a,b]} f = f(c_2)$. Comme f est non constante $f(c_1) < f(c_2)$. Comme $f(a) = f(b)$, l'un au moins des deux points c_1, c_2 se trouve dans $]a, b[$. Supposons, sans perte de généralité, que $c_1 \in]a, b[$ et montrons que $f'(c_1) = 0$. Comme la fonction f atteint en c_1 son minimum, on a $f(x) - f(c_1) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Posons $\tau(x) = (f(x) - f(c_1))/(x - c_1)$, $x \neq c_1$. Alors $\tau(x) \leq 0$ sur $[a, c_1[$ et $\tau(x) \geq 0$ sur $]c_1, b]$. Considérons les suites $x_n = c_1 - 1/n$ et $y_n = c_1 + 1/n$. Pour n assez grand, les deux suites appartiennent à $[a, b]$. Comme $\tau(x_n) \leq 0$ pour tout n, on a en passant à la limite $f'(c_1) = \lim_{n \to +\infty} \tau(x_n) \leq 0$. En raisonnant avec y_n, on voit de même que $f'(c_1) \geq 0$. On en conclut que $f'(c_1) = 0$. □

Théorème 2.2 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration. On pose $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. On remarque que g est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et vérifie $g(a) = g(b) = f(a)$. D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. Comme $g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ cela achève la preuve. □

L'étude du signe de la dérivée permet d'étudier la monotonie de la fonction, comme le montre le corollaire suivant.

Corollaire 2.3. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$) pour tout $x \in]a, b[$, alors f est croissante (resp. strictement) sur $[a, b]$.*

Démonstration. Prenons $x < y \in [a, b]$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$$

Par hypothèse, le membre de droite est positif (resp. strictement positif). La fonction a donc bien la monotonie annoncée. □

3. Dérivation d'ordre supérieur

Si la fonction dérivée f' d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est à son tour dérivable sur I, on peut définir $f'' = (f')'$. La fonction f'' s'appelle la dérivée seconde de f. Si cette dérivée seconde est à nouveau dérivable sur I, on peut définir $f^{(3)} = (f'')'$, *etc* ...

Par convention on pose $f^{(0)} = f$.

Définition 3.1. *Soit $p \in \mathbb{N}$; on dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^p$ si elle admet des dérivées $f^{(k)}$ pour tout $k \leq p$ et si $f^{(p)}$ est continue.*

Proposition 3.2. *La somme, le produit et la composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ est de classe $\mathcal{C}^p$. De même le quotient d'une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ par une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ ne s'annulant pas, est encore de classe $\mathcal{C}^p$.*

Théorème 3.3 (Formule de Taylor-Lagrange)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur I, $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $a \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $a + h \in I$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que*

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(p)}(a)}{p!}h^p + \frac{f^{(p+1)}((1-\theta)a+\theta h)}{(p+1)!}h^{p+1} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k + \frac{f^{(p+1)}((1-\theta)a+\theta h)}{(p+1)!}h^{p+1} \end{aligned}$$

Pour démontrer ce théorème, on utilise la généralisation suivante du théorème de Rolle.

Théorème 3.4 (Rolle généralisé)**.** *Soit $p \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur $[a, b]$ et admettant une dérivée $p + 1$ ème sur $]a, b[$. Si $f'(a) = f''(a) = f^{(3)}(a) = \ldots = f^{(p)}(a) = 0$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(p+1)}(c) = 0$.*

Démonstration du théorème 3.4. Le principe est d'appliquer plusieurs fois de suite la version classique du théorème de Rolle. Comme $f(a) = f(b)$, le théorème de Rolle permet de conclure qu'il existe $c_1 \in]a, b[$ tel que $f'(c_1) = 0$. Comme $f'(a) = 0 = f'(c_1)$, on peut à nouveau appliquer Rolle et conclure qu'il existe $c_2 \in]a, c_1[$ tel que $f''(c_2) = 0$. On continue de la sorte en appliquant Rolle à f'', puis à $f^{(3)}$ *etc* et on obtient au final l'existence d'un point c_{p+1} tel que $f^{(p+1)}(c_{p+1}) = 0$. □

Démonstration du théorème 3.3. Considérons

$$\varphi(u) = f(a+u) - \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}u^k - \lambda u^{p+1}$$

définie sur $[0, h]$. On choisit λ de sorte que $\varphi(h) = \varphi(0) = 0$ et on vérifie que

$$\varphi'(0) = \varphi''(0) = \ldots = \varphi^{(p)}(0) = 0.$$

D'après le théorème de Rolle généralisé, il existe donc $c \in [0, h]$ tel que $\varphi^{(p+1)}(c) = 0$. Or

$$\varphi^{(p+1)}(c) = f^{(p+1)}(a+c) - (p+1)!\lambda,$$

ce qui achève la preuve. □

4. Exercices.

Exercice 1. Montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_o, alors elle est continue en x_o. La réciproque est elle vraie ?

Exercice 2. Soit $p \in \mathbb{R}$; on rappelle que pour tout $x > 0$, $x^p = \exp(p \ln(x))$. Calculer la dérivée $k$ème de $x \mapsto x^p$.

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et P le polynôme défini par $P(x) = \sum_{k=0}^{p} b_k \frac{(x-a)^k}{k!}$. Montrer que $P^{(k)}(a) = b_k$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, k\}$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ s'annulant en trois points distincts. Montrer que la dérivée seconde de f s'annule au moins une fois.

Exercice 5. Soit $L \in \mathbb{R}$; une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite L-Lipschitz sur I si

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \qquad \forall x, y \in I.$$

Montrer qu'une fonction dérivable f est L-Lipschitz sur I si et seulement si $|f'(x)| \leq L$ pour tout $x \in I$.

Exercice 6. On considère la fonction $f(x) = \cos(x)$ sur $[0, 1]$.

(1) Montrer que f possède un unique point fixe $p \in [0, 1]$.
(2) Montrer que f est L-Lipschitz avec $L = \sin(1)$.
(3) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par la relation de récurrence $u_{n+1} = \cos(u_n)$, $u_0 \in [0, 1]$ est bien définie et converge vers p lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7. On pose $f(x) = \ln(1 + x)$, $x > -1$.

(1) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer l'inégalité
$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1 + x) \leq x, \qquad \forall x > -1.$$
(2) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^n,$$
en fonction du paramètre $\alpha > 0$.

Exercice 8. Calculer

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \sqrt[n]{n}, \qquad \text{et} \qquad \max_{(x,y)\in[1,2]^2} \left\{ \frac{1+x}{y} + \frac{1+y}{x} \right\}.$$