Cours-TD. Etude des fonctions convexes

1. Définitions

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite* convexe *si elle vérifie :*

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y), \qquad \forall x, y \in I,\ \forall t \in [0,1].$$

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite concave *si $-f$ est convexe.*

En particulier, les fonctions affines sont clairement convexes.

($\mathbf{Q_1}$) *Comment se traduit géométriquement cette propriété de convexité ?*

($\mathbf{Q_2}$) *Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.*

($\mathbf{Q_3}$) *Montrer qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $n \geq 2$ et tous $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$, on a*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \cdots + \lambda_n f(x_n),$$

pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$.

Définition 1.2 (Ensembles convexes)**.** *Soit $A \subset \mathbb{R}^2$; on dit que A est un ensemble convexe si pour tous $x, y \in A$, on a $(1-t)x + ty \in A$ pour tout $t \in [0,1]$.*

Autrement dit, un ensemble est convexe si à chaque fois qu'il contient deux points, il contient aussi le segment joignant ces deux points.

($\mathbf{Q_3}$) *Donner des exemples d'ensembles convexes et d'ensembles non-convexes.*

($\mathbf{Q_4}$) *Quels sont les ensembles convexes de $\mathbb{R}$?*

A une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ on associe son *épigraphe* comme suit :

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y \geq f(x)\}$$

Proposition 1.3. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si* $\mathrm{epi}(f)$ *est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^2$.*

($\mathbf{Q_5}$) *Démontrer cette proposition.*

2. Propriétés des fonctions convexes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$; on pose pour tout $b \in I \setminus \{a\}$,

$$\tau_a(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Le nombre $\tau_a(b)$ est la pente de la droite joignant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Proposition 2.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$; la fonction f est convexe si et seulement si toutes les fonctions p_a, $a \in I$, sont croissantes sur leurs ensembles de définition.*

- $(\mathbf{Q_6})$ *Démontrer cette proposition.*
- $(\mathbf{Q_7})$ *Montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe. On note* $\mathrm{int}(I)$ *l'intervalle I privé de ses extrémités. Montrer que f possède des dérivées à gauche et à droite en tout point de* $\mathrm{int}(I)$*.*
- $(\mathbf{Q_8})$ *Montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors f est continue en tout point de* $\mathrm{int}(I)$*.*

Corollaire 2.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La fonction f est convexe si et seulement si sa dérivée f' est croissante sur I.*

La convexité d'une fonction deux fois dérivable f est donc équivalente à $f'' \geq 0$ sur I.

- $(\mathbf{Q_9})$ *Démontrer ce corollaire.*
- $(\mathbf{Q_{10}})$ *Montrer qu'une fonction dérivable est convexe si et seulement si son graphe se trouve au dessus de chacune de ses tangentes.*
- $(\mathbf{Q_{11}})$ *Etudier la convexité/concavité des fonctions* exp, ln, $x \mapsto x^k$ $k \in \mathbb{R}$
- $(\mathbf{Q_{12}})$ *Démontrer l'inégalité arithmético-géométrique :*

$$\forall x_1, x_2, \dots, x_n > 0, \qquad \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$