# Dérivabilité et applications - Exercices

**Exercice 1.** Etudier la dérivabilité de la fonction $f$ définie par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

**Exercice 2.** On pose $f(x) = \ln(1+x)$, $x > -1$.

(1) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer l'inégalité

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x, \qquad \forall x > -1.$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^n,$$

en fonction du paramètre $\alpha > 0$.

(2) Montrer l'encadrement

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \sqrt{e}.$$

**Exercice 3.** Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite $L$-Lipschitz, $L \geq 0$, si

$$|f(y) - f(x)| \leq L|y - x|, \qquad \forall x, y \in I.$$

Montrer qu'une fonction $f$ dérivable sur $I$ est $L$-Lipschitz si et seulement si $|f'| \leq L$ sur $I$.

**Exercice 4.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^3$ telle qu'il existe trois points $a < b < c$ de $I$ vérifiant $f(a) = f'(a) = f(b) = f(c) = 0$. Montrer qu'il existe $d \in ]a, c[$ tel que $f^{(3)}(d) = 0$.

**Exercice 5. Inégalité de Hölder et de Minkowski.** Dans cet exercice, $p > 1$ et $q = \frac{p}{p-1}$ de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(1) Montrer que $xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$, pour tout $x, y \geq 0$.

(2) Montrer que pour tout couple de vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q} \qquad \text{[Inégalité de Hölder]}$$

(3) En déduire que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{1/p} \qquad \text{[Inégalité de Minkowski]}$$

**Exercice 6. Polynôme de Taylor d'une fonction**

(1) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ ; calculer la dérivée $k$-ème de $x \mapsto x^p$.

(2) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $P$ le polynôme défini par
$$P(x) = \sum_{k=0}^{p} b_k \frac{(x-a)^k}{k!}.$$
Montrer que $P^{(k)}(a) = b_k$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, k\}$.

(3) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $f$ une fonction $p$ fois dérivable sur un intervalle $I$ et $a \in I$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P$ de degré inférieur ou égal à $p$ tel que
$$P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, p\}$$
et que ce polynôme est donné par la formule
$$P(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$
Le polynôme $P$ s'appelle le polynôme de Taylor de $f$ au point $a$ et à l'ordre $p$.

**Exercice 7.** On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que $f$ admet en $a$ un minimum (resp. un maximum) local s'il existe $\eta > 0$, tel que pour tout $x \in [a-\eta; a+\eta] \cap I$ on a $f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$).

(1) On suppose que $f$ est dérivable sur $I$. Montrer que si $f$ possède un extremum local en un point $a \in I$ qui n'est pas une extrémité de l'intervalle, alors $f'(a) = 0$.

(2) On suppose que $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que $f'(a) = 0$. Montrer que si $f''(a) > 0$, alors $f$ présente en $a$ un minimum local, et que si $f''(a) < 0$, alors $f$ présente en $a$ un maximum local.

(3) Application. Etudier les extrema de la fonction $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 8.** Calculer
$$(i)\ \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \sqrt[n]{n}, \qquad (ii)\ \sup_{t\in\mathbb{R}}\{ta - e^t\},\ a \in \mathbb{R} \qquad (iii)\ \max_{(x,y)\in[1,2]^2} \left\{\frac{1+x}{y} + \frac{1+y}{x}\right\}.$$