Convergence des suites monotones et applications. Exercices.

Exercice 1. Déterminer la borne inférieure de

$$A = \left\{ \frac{1}{1+n^2};\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Exercice 2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!},$$

sont adjacentes. On admet que la limite commune de ces deux suites est le nombre $e = \exp(1)$. Montrer que e est irrationnel.

Exercice 3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right), \qquad u_0 = b > 0$$

(1) Montrer que la suite u_n est strictement positive.

(2) Montrer que $u_n \geq \sqrt{a}$ pour tout n.

(3) Montrer que la suite u_n est décroissante.

(4) Déduire des questions précédentes que la suite u_n converge et déterminer la valeur de sa limite.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. On suppose que les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et ont la même limite ℓ. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

Exercice 5. Montrer que toute suite extraite d'une suite convergente est également convergente et a la même limite que la suite de départ. En déduire que la suite $u_n = (-1)^n$ ne converge pas.

Exercice 6. Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Montrer que les suites $u_n = w_{2n}$ et $v_n = w_{2n+1}$ sont adjacentes. Que peut on en conclure sur la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 7. Le but de l'exercice est de calculer la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de l'exercice précédent.

(1) Montrer que pour tout $r \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1-r^n}{1-r}.$$

(2) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\, dt.$$

(3) Montrer que

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\, dt \right| \leq \frac{1}{n+1}.$$

(4) En déduire que la suite w_n converge vers $-\ln(2)$.