Université Paris Est Marne-la-Vallée **L1 Sciences Physiques 2012 - 2013**
Compléments en Analyse

Exercices - Continuité et limites.

Exercice 1. Donner la définition de $\lim_{x\to x_o^+} f(x)=\ell$ et $\lim_{x\to x_o^-} f(x)=\ell$, avec $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$. Déterminer les limites à gauche et à droite de la fonction $x\mapsto E(x)$ en tout point entier $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :
(1) $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)$ (2) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ (3) $\lim_{x\to\infty}\frac{E(x)}{x}$ (4) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-(x+1)$.

Exercice 3. La fonction $f(x)=\frac{x^x}{E(x)^{E(x)}}$, $x\geq 1$, admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 4. Montrer que la fonction f définie pour tout $x\neq 0$ par $f(x)=\sin(1/x)/x$ n'admet pas de limite en 0.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de déterminer toutes les applications *continues* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant l'équation

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\qquad \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

(1) Montrer que $f(0)=0$.
(2) Montrer que $f(n)=nf(1)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, puis pour tout $n\in\mathbb{Z}$.
(3) Montrer que $f(r)=rf(1)$ pour tout $r\in\mathbb{Q}$.
(4) Montrer pour finir que $f(x)=xf(1)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Indication : on commencera par montrer que tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.

Exercice 6. En utilisant l'exercice précédent, déterminer toutes les applications continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle : $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Même question avec l'équation $f(xy)=f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Exercice 7. Le but de l'exercice est de montrer qu'une fonction *continue* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ qui admet 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes est constante. On pose

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2};a,b\in\mathbb{Z}\}$$

(1) Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\times)$ est un sous anneau de $(\mathbb{R},+,\times)$.
(2) Montrer que tous les éléments de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sont périodes de f. En déduire que $f(x)=f(0)$ pour tout $x\in\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.
(3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$; on pose $p_n=(\sqrt{2}-1)^n$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, montrer qu'il existe $k_n\in\mathbb{Z}$ tel que $x=k_np_n+r_n$ avec $0\leq r_n<p_n$. En déduire que tout nombre réel est limite d'une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Conclure que f est constante.

Exercice 8. Déterminer toutes les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues en 0 vérifiant l'équation

$$f(2x)=f(x)\cos(x),\qquad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Indication : On utilisera la formule de trigonométrie $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$.