Université Paris Est - Marne-la-Vallée
Préparation au CAPES
2010/2011

Analyse
Feuille 2 : Séries.

Exercice 1. Déterminer la nature des séries de termes généraux

$$(a)\ \frac{n!}{(2n-1)!},\quad (b)\ e^{an^2}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n^3}\ (a\neq 0),\quad (c)\ e^{-\sqrt{n}}$$

$$(d)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2n}-\left(1+\frac{2}{n+a}\right)^{n}\ (a>0),\quad (e)\cos\left(\pi n^2\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right),\quad (f)\ \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n n-\sqrt{n}}.$$

Exercice 2. Critère de Duhamel.

1. Soient u_n, v_n deux suites à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, on ait
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq\frac{v_{n+1}}{v_n}.$$
Montrer que si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
2. Soit u_n une suite strictement positive. On suppose qu'il existe $a>0$ tel que
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$
Montrer que si $a>1$, alors la série est convergente et si $a<1$, alors elle est divergente.
3. Application : étudier les séries de termes généraux
$$\frac{n.n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)},\ (a>0)\quad\text{et}\quad \sqrt{n!}\sin(1)\cdot\sin(1/\sqrt{2})\cdots\sin(1/\sqrt{n}).$$

Exercice 3. Constante d'Euler. Montrer qu'il existe une constante $\gamma>0$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln(n)+\gamma+o(1).$$

Application : Donner la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice 4. Formule de Stirling. On pose, pour tout $n\geq 1$, $w_n=\int_{n-1}^{n}\ln(t)\,dt-\ln(n)$.

1. Calculer $\sum_{k=2}^{n}w_k$.
2. Montrer, en intégrant par partie, que $w_n=-\frac{1}{2n}-x_n$ avec $x_n=\frac{1}{2}\int_{n-1}^{n}(t-n+1)^2\frac{1}{t^2}\,dt$.
3. Montrer que la série de terme général x_n est absolument convergente.
4. En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'il existe une constante $K>0$ telle que
$$n!\sim K\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Exercice 5. Transformation d'Abel. Soit $\theta\in\mathbb{R}$; déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{\sin(n\theta)}{n}$. On effectuera une transformation d'Abel.

Exercice 6. Equivalent du reste d'une série convergente. Soit $\alpha>1$. On sait que la série $\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente. Montrez que, quand $n\to+\infty$, on a l'équivalent

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\sim\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Exercice 7. Une série double. On pose $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, pour tout $\alpha > 1$. Montrer que la série $\sum_{p\geq 2}(\zeta(p)-1)$ converge et calculer sa somme.

Exercice 8. Série produit. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{C}$, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

Exercice 9. Produits infinis. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement supérieurs à -1. On dit que le produit infini $\prod(1+u_n)$ converge si la suite $\pi_n = \prod_{k=0}^n (1+u_k)$, $n \geq 0$ admet une limite finie non nulle lorsque $n \to +\infty$.

1. Montrer que le produit infini $\prod(1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge.
2. On suppose que la série $\sum u_n$ est absolument convergente. Montrer que le produit infini $\prod(1+u_n)$ converge. Que dire si u_n est positive ?
3. On suppose que la série $\sum u_n^2$ converge. Montrer que le produit $\prod(1+u_n)$ converge si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.
4. Donner la nature des produits infinis suivants : $\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n^3}\right), \prod_{n\geq 2}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right), \prod_{n\geq 2}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^{3/4}}\right)$.

Exercice 10. Représentation de ζ en produit infini. On considère la suite $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$ des nombres premiers.

1. Montrer que pour tout $\alpha > 1$, le produit infini $\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{p_n^\alpha}\right)$ converge.
2. Montrer que pour tout $N \geq 1$, $\dfrac{1}{\prod_{n=1}^N \left(1-\frac{1}{p_n^\alpha}\right)} = \displaystyle\prod_{n=1}^N \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_n^{\alpha k}}$.
3. Pour tout $n \geq 1, K \geq 0$, on pose $S_{N,K} = \displaystyle\prod_{n=1}^N \sum_{k=0}^{K} \frac{1}{p_n^{\alpha k}}$. Montrer que
$$S_{N,K} = \sum_{k_1\leq K, k_2\leq K, \ldots, k_N \leq K} \frac{1}{\left(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_N^{k_N}\right)^\alpha}.$$
En déduire que $S_{N,K} \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^\alpha}$.
4. Montrer que pour tout N, il existe K tel que $\sum_{i=1}^{p_N} \frac{1}{i^\alpha} \leq S_{N,K}$.
5. Conclure qu'on a l'encadrement $\sum_{i=1}^{p_N} \frac{1}{i^\alpha} \leq \frac{1}{\prod_{n=1}^N\left(1-\frac{1}{p_n^\alpha}\right)} \leq \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^\alpha}$. En déduire que
$$\zeta(\alpha) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^\alpha} = \frac{1}{\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{p_n^\alpha}\right)}.$$

Exercice 11. La série des inverses des nombres premiers diverge. On considère la suite des nombres premiers : $p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots$; le but de l'exercice est de montrer que la série $\sum_n \frac{1}{p_n}$ diverge. Pour cela, nous allons raisonner par l'absurde et supposer que la série converge. Il existe $n_o \geq 1$ tel que
$$\sum_{n=n_o+1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} < \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Dans la suite, les éléments de $\{p_1, \ldots, p_{n_o}\}$ seront appelés les *petits nombres premiers* et les autres seront appelés les *grands nombres premiers*. Soit $N \geq 1$ un entier qui sera fixé ultérieurement. On désigne par A_1 le cardinal des entiers $1 \leq n \leq N$ divisibles par au moins un grand nombre premier, et A_2 le cardinal des entiers $1 \leq n \leq N$ n'admettant que des petits diviseurs premiers.

1. Montrer que $A_1 + A_2 = N$.
2. Montrer que $A_1 < \frac{N}{2}$ (on utilisera (1)).
3. Montrer que $A_2 \leq 2^{n_o}\sqrt{N}$.
4. Aboutir à une contradiction en choisissant un bon N.