**Université Paris Est - Marne-la-Vallée**
**Préparation au CAPES**
**2010/2011**

# Analyse

## *Feuille 3 : Suites et séries de fonctions.*

**Exercice 1. Quelques exemples de suites de fonctions.** Etudier la convergence des suites de fonctions suivantes :

(1) $f_n : [0,1[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ (2) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n(1-x)$
(3) $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} : x \mapsto n\left(x^{1/n}-1\right)$ (4) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^2}$
(5) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{nx^3}{1+nx^2}$ (6) $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

**Exercice 2. Propriétés stables par convergence simple.** Soit $f_n : I \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions convergeant simplement vers $f$ sur $I$ ; montrer que si les $f_n$ sont croissantes (resp. convexes) (resp. $k$-Lipschitz) alors $f$ aussi.

**Exercice 3. Approximation polynômiale de $\sqrt{x}$.** Soit $P_n$ la suite de fonctions polynômes définies par

$$\left\{\begin{array}{l} P_0 = 0, \\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n^2(x)\right) \end{array}\right. ;$$

montrer que cette suite converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

**Exercice 4. Etudes de séries de fonctions.** Etudier la convergence des séries de fonctions $\sum f_n$ :

$$(1)\ f_n : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto n^2(x^{2n} - x^{2n+1}) \quad (2)\ f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$$

**Exercice 5. Etude d'une série de fonctions.** Etudier la convergence de la série de fonctions $\displaystyle\sum_n ne^{-nx}$ et déterminer sa somme.

**Exercice 6. Une preuve du théorème de Weierstrass.** Pour toute application $f$ continue sur $[0,1]$, on définit pour tout $n$ le polynôme $B_n(f)$ par la formule

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \quad \forall x \in [0,1].$$

1. Montrer que l'application $f \mapsto B_n(f)$ est linéaire et vérifie $f \leq g \Rightarrow B_n(f) \leq B_n(g)$.
2. Pour tout $p \in \{0,1,2\}$ , on pose $f_p(x) = x^p$, $x \in [0,1]$. Calculer $B_n(f_p)$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \{0,1,2\}$. Montrer que $\left(B_n(f_p)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f_p$ sur $[0,1]$, pour tout $p \in \{0,1,2\}$
3. Si $f$ est continue sur $[0,1]$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que
$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2}(x-y)^2, \quad \forall x,y \in [0,1].$$
Indication : On utilisera la continuité uniforme de $f$ sur $[0,1]$.
4. Conclure que $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f$ sur $[0,1]$.