Université Paris Est - Marne-la-Vallée
Préparation au CAPES
2010/2011

Analyse

Feuille 4 : Théorème de convergence dominée et applications.

1 Interversion limite / intégrale

Exercice 1. Fonction Γ Soit $x > 0$; on considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}, \quad \text{si } 0 < t \leq n, \qquad \text{et} \qquad f_n(t) = 0, \quad \text{si } t \geq n.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers la fonction $f(t) = e^{-t}t^{x-1}$, $t > 0$ et que, pour tout $n \geq 1$, $0 \leq f_n \leq f$.
2. Calculer $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$.
3. En déduire la formule
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}, \quad \forall x > 0.$$

Exercice 2. Sur $I =]0,1[$, on considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$, avec $u_n(x) = -x^{\alpha-1+n}\ln(x)$, pour tout $x \in]0,1[$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement vers une fonction S qu'on déterminera.
2. Montrer que u_n est intégrable sur $]0,1[$, et que $\int_0^1 u_n(x)\,dx = \frac{1}{(\alpha+n)^2}$.
3. Montrer que
$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}\ln(x)}{1-x}\,dx = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\alpha+n)^2}.$$

Exercice 3. Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$. Pour $n \geq 1$ et $\theta \in]0,\pi[$, on pose $u_n(t) = t^{n-1}\sin(n\theta)$ et $S_n(t) = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} u_p(t)$.

1. Montrer que
$$S_n(t) = \frac{\sin(\theta) - t^n \sin((n+1)\theta) + t^{n+1}\sin(n\theta)}{(1 - t\cos(\theta))^2 + t^2\sin^2(\theta)}, \quad \forall t \in [0,1].$$
   En déduire que la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $I = [0,1[$ vers une fonction S qu'on déterminera.
2. Calculer $\displaystyle\int_I S(t)\,dt$.
3. En appliquant le théorème de convergence dominée, montrer que $\displaystyle\int_I S_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I S(t)\,dt$. Pouvait-on appliquer le théorème d'interversion série / intégrale ?
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$.

2 Intégrales à paramètre

Exercice 4. Un prolongement $\mathcal{C}^1$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = 0$. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g(0) := f'(0) \quad \text{et} \quad \forall x \neq 0,\ g(x) := \frac{f(x)}{x}.$$

Montrer en utilisant le théorème de dérivation sous le signe $\int$ que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Encore une limite d'intégrales. Soit f une fonction définie sur $[0,1]$, à valeurs strictement positives et continue. Montrer que

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \left(\int_0^1 f(t)^\alpha \, dt \right)^{1/\alpha} = \exp\left(\int_0^1 \ln(f(t)) \, dt \right).$$

Exercice 6. Calcul de l'intégrale gaussienne. On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \, dt$, pour tout $x \geq 0$.

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. Calculer f'.
3. On pose $g(x) = \int_0^x e^{-u^2} \, du$. Montrer que la fonction $f + g^2$ est constante sur $\mathbb{R}^+$.
4. Calculer $f(0) + g^2(0)$. Montrer que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$, et en déduire la formule

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 7. On pose pour $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx) \, dt.$$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable.
2. Calculer f' et montrer que f est solution d'une équation différentielle du premier ordre. En déduire f.

Exercice 8. On pose pour tout $x \geq 0$,

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \, dt.$$

1. Justifier l'existence de $I(x)$ pour tout $x \geq 0$.
2. Montrer que I est classe $\mathcal{C}^1$.
3. Calculer $I(x)$ et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-\lambda t} \, dt$, pour $\lambda > 0$.