

RÉSUMÉ DES TRAVAUX

REJEB HADIJI

Université Paris-Est
Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, UMR8050
hadiji@univ-paris12.fr

Table de matières

- Chapitre 1. Introduction.
- Chapitre 2. Problèmes liés à l'exposant critique de Sobolev.
 - 2.1 Problèmes non homogènes avec à l'exposant critique de Sobolev.
 - 2.2 Problèmes liés à l'exposant critique de Sobolev et au bi-laplacien.
 - 2.2. Problèmes avec un poids et avec l'exposant critique de Sobolev.
- Chapitre 3. Applications harmoniques et cristaux liquides.
 - 3.1 Problème de minimisation sur $W^{1,1}(B^2, S^2)$.
 - 3.2 Problème de minimisation avec énergie relaxée en dimension 3.
 - 3.3 Régularité d'applications minimisantes à valeurs dans la sphère S^2 et quelques simulations numériques.
- Chapitre 4. La fonctionnelle de Ginzburg-Landau avec poids.
 - 4.1 Motivation physique.
 - 4.2 Les résultats de convergences .
 - 4.3 L'énergie renormalisée.
 - 4.4 Positions des zéros.
 - 4.5 Minimisation d'un type d'équation de Ginzburg-Landau avec un potentiel ayant un zéro d'ordre infini.
- Chapitre 5. Analyse dans un multi-domaine.
 - 5.1 L'équation de Ginzburg-Landau dans un domaine oscillant.
 - 5.2 Analyse asymptotique dans un multi-domaine de solutions minimisantes à valeurs dans S^2 .
- Chapitre 6. Quelques travaux en cours.
- Bibliographie.
- Liste des publications

Date: Novembre 2008.

1. INTRODUCTION

Ce mémoire rassemble mes résultats mathématiques en analyse non linéaire depuis le début de ma thèse sous la direction de M. Haïm Brezis. Mes domaines de recherche sont des équations faisant intervenir l'exposant critique de Sobolev, des problèmes liés aux cristaux liquides et aux applications harmoniques et des problèmes concernant la fonctionnelle de Ginzburg-Landau.

Les difficultés rencontrées proviennent soit de la non compacité, soit du fait que l'on travaille dans des espaces de Sobolev à valeurs dans des sphères. Dans le paragraphe 2, je considère des problèmes semi-linéaires elliptiques faisant intervenir l'exposant critique de Sobolev concernant le laplacien. Je considère également des problèmes liés au bi-laplacien. Je montre l'existence de solutions en utilisant la topologie du domaine, j'étudie leur comportement asymptotique en dimension 3, je m'intéresse à une équation étudiée par Brezis-Nirenberg, pour laquelle je précise le signe du multiplicateur de Lagrange et je généralise ce résultat au bi-laplacien, et à la fin, je m'intéresse à ce même genre d'équations, mais avec un poids du côté de la partie linéaire. Le paragraphe 3 est consacré à des problèmes de cristaux liquides. J'étudie la minimisation de l'énergie relaxée en dimension 2 et 3, je m'intéresse également à la régularité des solutions minimisantes à valeurs dans la sphère en dimension 3. Ce dernier travail comporte une partie théorique et une partie numérique. Dans, le paragraphe 4, j'expose mes travaux sur l'équation de Ginzburg-Landau avec poids. Le problème de Ginzburg-Landau sans poids a été considéré initialement par Bethuel-Brezis et Hélein en 1994. On rencontre ces équations lors de l'étude des supraconducteurs ou des superfluides où apparaissent des lignes de vorticité (appelées aussi filaments). La question est d'étudier le comportement asymptotique des solutions minimisantes de l'énergie de Ginzburg-Landau. On découvre, contrairement au cas où le poids est constant, que le problème limite possède des singularités de degré topologique éventuellement plus grand que 1. Du point de vue de la physique, ceci veut dire que les lignes de vorticité peuvent faire plus d'un tour. De plus, les zéros des solutions (c'est à dire physiquement les filaments) sont très près des minima du poids. On se situe dans un cadre général où les minima du poids peuvent être aussi bien à l'intérieur que sur le bord. D'abord on identifie les singularités du problème limite, ensuite on les localise à l'aide d'une fonctionnelle appelée l'énergie renormalisée introduite par Béthuel-Brezis et Hélein, et enfin on estime la vitesse de convergence des zéros des solutions du

problème de Ginzburg-Landau vers leur limites et on donne une estimation précise de l'énergie.

Dans le dernier paragraphe j'expose mes travaux qui sont soit soumis pour publication soit en cours de rédaction.

L'objectif de ce mémoire est de résumer mes principaux résultats et d'aider à la compréhension générale de mes travaux. Les références alphabétiques renvoient à la bibliographie et les références numériques désignent la liste de mes publications.

2. PROBLÈMES LIÉS À L'EXPOSANT CRITIQUE DE SOBOLEV: [1], [2], [3], [14], [16], [17] ET [19]

2.1. Problèmes non homogènes avec à l'exposant critique de Sobolev. Soit Ω un domaine régulier de \mathbf{R}^N avec $N \geq 3$. On considère l'équation elliptique non linéaire:

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = u^p + f(u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $p = \frac{N+2}{N-2}$ et $f(u)$ est un terme d'ordre inférieur à p . On regardera les cas où $f(u) = \mu u^q$ et $f(u) = \lambda u$, $\mu \in \mathbf{R}$, $\lambda > 0$ et $1 < q < p$. On observe que $p + 1 = \frac{2N}{N-2}$ est l'exposant limite intervenant dans l'injection de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, avec $1 \leq q \leq p + 1$. L'injection est compacte pour $1 \leq q < p + 1$, et ne l'est plus lorsque $q = p + 1$. Les solutions de (P) sont des points critiques non nuls de la fonctionnelle définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} (u^+)^{p+1} + \int_{\Omega} F(u^+)$$

où F est une primitive de f . La principale difficulté rencontrée dans ce genre d'équations consiste en ce que les problèmes variationnels sont non compacts. En utilisant le théorème du col d'Ambrosetti-Rabinowitz (voir [AR]) on peut démontrer l'existence de solutions lorsque la condition suivante du type Palais-Smale est vérifiée, (voir [BCN]) :

Définition 1. Soit $c \in \mathbf{R}$ fixé. On dit que E vérifie $(PS)_c$ si pour toute suite (u_n) telle que $E(u_n) \rightarrow c$ et $\|E'(u_n)\| \rightarrow 0$, alors la suite (u_n) est relativement compacte.

Pour mieux comprendre le défaut de compacité, il est important d'introduire la meilleure constante de Sobolev

$$S = \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \left(\frac{\int_{\Omega} |\nabla v|^2}{\|v\|_{p+1}^2} \right),$$

dont les propriétés essentielles sont:

- 1) S est indépendante du domaine Ω , elle ne dépend que de N .
- 2) S n'est jamais atteinte si $\Omega \neq \mathbf{R}^N$.
- 3) Sur \mathbf{R}^N , S est atteinte par la famille de fonctions suivantes

$$U_{a,\varepsilon}(x) = c_N \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + |x - a|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}},$$

où $c_N = [N(N-2)]^{\frac{1}{p-1}}$, $\varepsilon \in \mathbf{R}^+$ et $a \in \mathbf{R}^N$. Chacune de ces fonctions vérifie:

$$-\Delta u = u^p \quad \text{sur} \quad \mathbf{R}^N.$$

On peut caractériser précisément les suites qui ne sont pas compactes à l'aide de la famille précédente (voir [B3]).

Mon premier résultat concerne l'existence de solutions de (P) lorsqu'on tient compte de la topologie du domaine. Je rappelle que dans [BN1], Brezis et Nirenberg ont montré que si par contre Ω est un domaine de \mathbf{R}^N , alors si $N = 3$ (et donc $p = 5$), pour tout $3 < q < 5$, (P) possède une solution, pour tout $\mu > 0$, et pour $1 < q \leq 3$, (P) possède une solution pour tout $\mu > 0$ assez grand et n'en possède pas pour $\mu \leq 0$ assez petit si Ω est étoilé.

Si $N \geq 4$, alors (P) possède une solution pour tout $\mu > 0$ et tout $1 < q < p$. Toutes ces solutions ont une énergie inférieure à $\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$.

Dans [C] Coron a étudié le cas d'un domaine troué, il montre alors l'existence d'une solution si $\mu = 0$. Lorsque $q > 1$ et $\mu \neq 0$, l'équation change d'homogénéité, la méthode utilisée dans [C] ne marche plus, je montre cependant le théorème suivant :

Théorème 1. *Soit Ω un domaine borné régulier, $a \in \Omega$. Alors pour tout réel μ , tout $1 < q < p$, et pour $\eta > 0$ assez petit (P) possède une solution u_η dans $\Omega_\eta = \Omega \setminus B(a, \eta)$ telle que $\frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}} < \int_{\Omega} |\nabla u_\eta|^2 < \frac{3}{2} \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}$.*

L'outil essentiel pour la preuve du théorème 1 est une variante du théorème du col (voir [AR]), j'utilise également des travaux de Brezis-Coron (voir [BC]), de Struwe (voir [St]) qui décrivent exactement les

suites qui ne vérifient pas la condition $(PS)_c$.

Dans un second travail en collaboration avec R.Crouau et R.Lewandowski, voir [3], j'ai considéré le cas où $f(u) = \lambda u$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $N = 3$ donc $p = 5$ est l'exposant critique de Sobolev. Soit G_λ la fonction de Green relative à l'opérateur $-\Delta - \lambda$, on note g_λ sa partie régulière. D'après [B] il existe $\lambda^* \in (0, \lambda_1)$, où λ_1 est la première valeur propre de $-\Delta$, tels que si $\lambda^* < \lambda < \lambda_1$ alors $M_\lambda = \max_\Omega g_\lambda(a, a) > 0$, $M_{\lambda^*} = 0$, et si $\lambda < \lambda^*$, alors $M_\lambda < 0$. On sait d'après [B4], que pour $\lambda > \lambda^*$, (P) admet une solution. On suppose que Ω est assez régulier. Notre résultat est à la fois un résultat d'existence et de comportement asymptotique des solutions de (P) . On a :

Théorème 2. *On pose $\lambda = \lambda^* + \varepsilon$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe une suite de solutions $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ de (P) telle que, lorsque ε tend vers 0, on a*

$$|\nabla u_\varepsilon|^2 \rightharpoonup S^{\frac{3}{2}} \delta_a,$$

au sens de la convergence des mesures.

En fait, les solutions (u_ε) sont de la forme $u_\varepsilon = c_\varepsilon P U_{a_\varepsilon, t_\varepsilon} + w_\varepsilon$ où $P U_{a_\varepsilon, t_\varepsilon}$ est la projection orthogonale de $U_{a_\varepsilon, t_\varepsilon}$ sur $H_0^1(\Omega)$, c_ε tend vers une constante c_N , a_ε tend vers a , t_ε tend vers 0, et w_ε tend vers 0 dans $H_0^1(\Omega)$. Ces solutions sont aussi des minima locaux de la fonctionnelle

$$J_{\lambda^* + \varepsilon}(u) = \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 - (\lambda^* + \varepsilon) \int_\Omega |u|^2}{\left(\int_\Omega |u|^6 \right)^{\frac{1}{3}}}.$$

La démonstration de ce résultat repose d'une part sur des techniques dues à Brezis-Nirenberg (voir [BN1]), d'autre part sur les travaux de Bahri et de Bahri-Coron (voir [Ba1] et [BaC]). Notons que Rey dans [Re], a obtenu un résultat semblable pour les dimensions $N \geq 4$.

Nous décrivons maintenant un papier écrit avec R.Lewandowski, voir [2]. Dans [BN2], Brezis et Nirenberg étudient le problème de minimisation suivant

$$\inf_{u \in H_0^1(\Omega), \|u + \varphi\|_{p+1} = 1} \int_\Omega |\nabla u|^2,$$

où φ est une fonction donnée non nulle dans $L^{p+1}(\Omega)$. Ils ont montré que ce problème admet une solution qui vérifie l'équation d'Euler-Lagrange

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu(u)|u + \varphi|^{p-1}(u + \varphi) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\mu(u) \in \mathbf{R}$ est le multiplicateur de Lagrange associé à u . Dans [2] on précise le signe de $\mu(u)$. On montre que si $\|\varphi\|_{p+1} < 1$, alors $\mu(u) > 0$, et si $\|\varphi\|_{p+1} > 1$, alors $\mu(u) < 0$.

2.2. Problèmes liés à l'exposant critique de Sobolev et au bi-laplacien. Dans [14], inspiré par [BN2], on a considéré les problèmes de minimisations suivants

$$S_i(\varphi, r) = \inf_{u \in H_i(\Omega), \|u + \varphi\|_r = 1} \int_{\Omega} |\Delta u|^2,$$

où Ω est un domaine de \mathbf{R}^N , $N \geq 5$, $1 < r \leq q = \frac{2N}{N-4}$, $\varphi \in C(\Omega)$ est une fonction non nulle, $H_1(\Omega) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, et $H_2(\Omega) = H_0^2(\Omega)$. On observe que le réel q est l'exposant limite intervenant dans l'injection de Sobolev $H_i(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, $1 \leq r \leq q$. On sait (voir [V]) que $S_1(0, q) = S_2(0, q) = S$ et que cette meilleure constante de Sobolev n'est pas atteinte. Au contraire lorsque φ n'est pas nulle le manque de compacité est compensé. On montre d'abord que $S_1(\varphi, r)$ (resp. $S_2(\varphi, r)$) admette une solution u_1 , (resp. u_2) dès que φ est non nulle. Ces solutions vérifient les équations d'Euler-Lagrange suivantes:

$$\begin{cases} -\Delta^2 u_1 = \mu(u_1)|u_1 + \varphi|^{p-1}(u_1 + \varphi) & \text{dans } \Omega, \\ \Delta u_1 = u_1 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

(resp.

$$\begin{cases} -\Delta^2 u_2 = \mu(u_2)|u_2 + \varphi|^{p-1}(u_2 + \varphi) & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = u_2 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\mu(u_i) \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2$ est le multiplicateur de Lagrange associé à u_i dont le signe est déterminé comme dans [2]. Ensuite, comme $H_0^2(\Omega) \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, il est naturel de se demander si $S_1(\varphi, q) < S_2(\varphi, q)$ et si l'infimum sur $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ est atteint par une fonction dans $H_0^2(\Omega)$. Une réponse partielle à cette question est obtenue en utilisant l'identité de Pohozaev: par exemple on montre que dans le cas sous critique et pour φ petit on a l'inégalité stricte. On montre également

Théorème 3. 1) Soit (u_i^ε) une suite de solutions pour $S_i(0, q - \varepsilon)$. Alors lorsque ε tend vers 0, (u_i^ε) converge faiblement dans $H^2(\Omega)$ vers 0. De plus,

$$|\Delta u_\varepsilon|^2 \rightharpoonup S\delta_a.$$

au sens de la convergence des mesures, a étant un point de Ω .

2) Supposons que $\varphi \in H^2(\Omega)$, alors $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_i(\varphi, q - \varepsilon) = S_i(\varphi, q)$. De plus, soit (u_ε^i) une suite de solutions pour $S_i(\varphi, q - \varepsilon)$, alors, lorsque ε tend vers 0 (u_ε^i) converge fortement dans $H^2(\Omega)$ vers une solution du problème initial.

Dans un travail fait avec A.Beaulieu voir [16], on se place dans le cadre du papier [14]. On considère les problèmes de minimisation suivants

$$S_i(\varphi, r) = \inf_{u \in H_i(\Omega), \|u + \varphi\|_r = 1} \int_{\Omega} |\Delta u|^2,$$

$\varphi \in C(\Omega)$ est une fonction non nulle donnée, $H_1(\Omega) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, et $H_2(\Omega) = H_0^2(\Omega)$. Une question naturelle se pose

$$\text{A-t-on } S_1(\varphi, r) < S_2(\varphi, r)?$$

On montre

Théorème 4. *Supposons que $q \in [2, q_c]$ et que φ est non identiquement nulle 0. On a*

(i) *Si $\|\varphi\|_q < 1$ et φ est de signe constant dans Ω , toute solution minimisante de S_1 n'appartient pas à $H_0^2(\Omega)$ et on a $S_\theta(q, \varphi) < S_0(q, \varphi)$.*

(ii) *Si φ est dans $H_\theta^2(\Omega)$ et est dans l'espace orthogonal de $H_0^2(\Omega)$, toute solution minimisante de S_1 n'appartient pas $H_0^2(\Omega)$ et on a $S_\theta(q, \varphi) < S_0(q, \varphi)$.*

(iii) *Pour $q \geq 2$, si $\|\varphi\|_q > 1$ et φ dans $H_0^2(\Omega)$, alors $S_1(q, \varphi) = S_2(q, \varphi)$.*

Remarque 1. *On note que lorsque $\|\varphi\|_r > 1$ le problème devient convexe.*

2.3. Problèmes avec un poids et avec l'exposant critique de Sobolev. Dans [17], on se donne un domaine Ω de R^n avec le $n \geq 3$. On considère le problème d'existence d'une fonction u satisfaisant l'équation elliptique non-linéaire suivante

$$(P_\lambda)_\Omega \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(p(x)\nabla u) = u^{q-1} + \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où p est un poids positif donné dans $p \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $q = \frac{2n}{n-2}$ est l'exposant critique pour l'injection de Sobolev $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ et λ est un paramètre réel

On pose $p_0 = \min_{\bar{\Omega}} p(x)$. On suppose que

$$p^{-1}(p_0) \cap \Omega \neq \emptyset,$$

soit $a \in p^{-1}(p_0) \cap \Omega$. On écrit dans un voisinage de a , $p(x) = p_0 + \beta_k |x - a|^k + |x - a|^k \theta(x)$, avec $k > 0$, $\beta_k > 0$ et $\theta(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a .

Notons λ_1^{div} la première valeur propre de l'opérateur $div(p(x)\nabla \cdot)$ dans Ω avec une donnée au bord de type Dirichlet.

Le paramètre k joue un rôle essentiel dans l'étude de ce problème. En fait, le cas $k > 2$ est traité selon une procédure classique. Cependant le cas $0 < k \leq 2$ est moins facilement accessible. Nous l'étudierons différemment. Le premier résultat de ce papier est le suivant

Théorème 5. *On suppose que $p \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ vérifie les hypothèses citées plus haut. On a*

- 1) *Si $n \geq 4$ et $k > 2$, alors pour tout $\lambda \in]0, \lambda_1^{div}[$ il existe une solution de $(P1)_\Omega$.*
- 2) *Si $n \geq 4$ et $k = 2$, alors il existe une constante $\tilde{\gamma}(n) = \frac{(n-2)n(n+2)}{4(n-1)}\beta_2$ tel que pour tout $\lambda \in]\tilde{\gamma}(n), \lambda_1^{div}[$ il existe une solution de $(P1)_\Omega$.*
- 3) *Si $n = 3$ et $k \geq 2$, alors il existe une constante $\gamma(k) > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]\gamma(k), \lambda_1^{div}[$ le problème $(P1)_\Omega$ admet une solution.*
- 4) *Si $n \geq 3$, $0 < k < 2$ et p vérifie les conditions ci-dessus alors il existe $\lambda^* \in]\tilde{\beta}_k \frac{n^2}{4}, \lambda_1^{div}[$, où $\tilde{\beta}_k = \beta_k \min[(diam\Omega)^{k-2}, 1]$, tel que pour tout $\lambda \in]\lambda^*, \lambda_1^{div}[$, le problème $(P1)_\Omega$ admet une solution.*
- 5) *Si $n \geq 3$ et $k > 0$, alors pour tout $\lambda \leq 0$ le problème $(P1)_\Omega$ n'a pas de solution minimisante.*
- 6) *Si $n \geq 3$ et $k > 0$, alors le problème $(P1)_\Omega$ n'admet pas de solution pour tout $\lambda \geq \lambda_1^{div}$.*

Influence de la géométrie de la domaine : Dans le cas $p \equiv 1$ et $\lambda = 0$, l'identité de Pohozaev montre que le problème $(P1)_\Omega$ n'admet pas de solution pour un domaine étoilé. Cependant, Coron [C] a montré l'existence de solution concernant le problème $(P1)_\Omega$ pour un domaine avec un petit trou.

Dans le cas $p \neq 1$, on remarque, en utilisant l'identité de Pohozaev, que pour $\lambda = 0$ et pour $p \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ vérifiant $\nabla p(x) \cdot (x - a) > 0$ p.p. sur Ω , le problème $(P1)_\Omega$ n'admet pas de solution pour un domaine étoilé par rapport à a . On modifie alors la géométrie du domaine et on obtient une solution dans ce dernier cas.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ un domaine borné régulier et étoilé par rapport à a , et soit $\varepsilon > 0$. On étudie le problème $(P1)_{\Omega_\varepsilon}$ pour $\lambda = 0$ avec $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus B(a, \varepsilon)$.

On utilise un argument de degré topologique et la méthode utilisée dans [1] et on montre le résultat suivant :

Théorème 6. *On suppose que $p \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ admet un unique point minimum dans Ω . Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, le problème $(P1)_{\Omega_\varepsilon}$ admet une solution.*

Dans un récent travail, voir [19], on considère le problème suivant

$$(P_\lambda) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(p(x)\nabla u) = u^{2^*-1} + \lambda u, & u > 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, $2^* = \frac{2n}{n-2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive dans $H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Soit $V(\Omega) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} |u(x)|^{2^*} dx = 1 \right\}$, on définit

$$Q_\lambda(u) = \int_{\Omega} p(x)|u(x)|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx.$$

On considère $S_\lambda(p) = \inf\{Q_\lambda(u) : u \in V(\Omega)\}$. Soit λ_1 la première valeur propre de l'opérateur $-\operatorname{div}(p(x)\cdot)$ dans $H_0^1(\Omega)$. On sait (voir [17]) qu'il existe $0 \leq \lambda^* < \lambda_1$ tels que pour $\lambda < \lambda^*$, $S_\lambda(p)$ n'est pas atteint et pour $\lambda > \lambda^*$, $S_\lambda(p)$ est atteint. On suppose qu'il existe $\bar{x} \in \Omega$ vérifiant

$$p(x) \leq \inf_{\Omega} p + c|x - \bar{x}|^\alpha \quad \forall x \in B(\bar{x}, r)$$

avec $c > 0$, $r > 0$ et $\alpha > 0$. Lorsque $n \geq 4$ et $\alpha > 2$ on a $\lambda^* = 0$, par contre si $n = 3$ ou $0 < \alpha \leq 2$ la situation est plus compliquée voir [17]. Dans ce papier, on s'intéresse au cas où $n \geq 4$ et $\alpha > 2$ voir [19] pour les autres cas).

Pour distinguer des solutions différentes, on utilise la fonction dite "barycentre" $\beta : V(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\beta(u) = \int_{\Omega} x |u(x)|^{2^*} dx \quad \forall u \in V(\Omega).$$

Les résultats principaux de ce travail sont les suivants :

Théorème 7. *Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 4$. On suppose qu'il existe $\bar{x} \in \Omega$ et un ouvert $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tels que $\bar{x} \in A$ et si $\bar{\Omega} \cap \partial A \neq \emptyset$ on a $\inf_{\bar{\Omega} \cap \partial A} p > \inf_{\Omega} p$. Alors, il existe $\bar{\lambda}_A \in]0, \lambda_1]$ tel que, pour tout $\lambda \in]0, \bar{\lambda}_A[$, le problème (P_λ) admet au moins une solution $u_{\lambda,A}$ qui vérifie $\beta\left(\frac{u_{\lambda,A}}{\|u_{\lambda,A}\|_{L^{2^*}}}\right) \in A$ et $Q_\lambda\left(\frac{u_{\lambda,A}}{\|u_{\lambda,A}\|_{L^{2^*}}}\right) = S_\lambda(p, A)$.*

Corollaire 1. *On suppose qu'il existe k ouverts disjoints dans \mathbb{R}^n , A_1, \dots, A_k , et k points $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ in Ω vérifiant les mmes conditions que A et \bar{x} du Théorème 7. Alors, il existe $\bar{\lambda} \in]0, \lambda_1]$ tel que, pour*

tout $\lambda \in]0, \bar{\lambda}[$, le problème (P_λ) admet au moins k solutions distinctes $u_{\lambda, A_1}, \dots, u_{\lambda, A_k}$ vérifiant, pour $i = 1, \dots, k$, $\beta \left(\frac{u_{\lambda, A_i}}{\|u_{\lambda, A_i}\|_{L^{2^*}}} \right) \in A_i$ et $Q_\lambda \left(\frac{u_{\lambda, A_i}}{\|u_{\lambda, A_i}\|_{L^{2^*}}} \right) = S_\lambda(p, A_i)$.

Théorème 8. Soit Ω un ouvert borné dans \mathbb{R}^n , $n \geq 4$. On suppose qu'il existe un ouvert A dans \mathbb{R}^n et un fermé $K \subseteq \Omega \cap A$ telles que, pour tout $\bar{x} \in K$, vérifiant les conditions du Théorème 21 pour des constantes convenables $c > 0$, $r > 0$ et $\alpha > 2$ (c, r, α sont indépendantes de \bar{x}). Alors, il existe $\bar{\lambda} > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in]0, \bar{\lambda}[$, le problème (P_λ) admet au moins $\text{cat}_A K$ solutions distinctes, o $\text{cat}_A K$ représente la catégorie (de Ljusternik-Schnirelman) de K dans A .

De plus, lorsque λ tend vers 0, chaque solution se concentre en un point minimum de p .

3. APPLICATIONS HARMONIQUES-CRISTAUX LIQUIDES: [4], [5], [7] ET [13]

Cette section est consacrée à l'étude de quelques problèmes liés aux applications harmoniques et des cristaux liquides nématiques voir par exemple [DeG]. Je commence par décrire brièvement l'origine physique du problème. L'état du cristal contenu dans un domaine Ω de \mathbf{R}^3 est décrit par une application $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3$ avec la contrainte $|u| = 1$. Pour tout $x \in \Omega$, $u(x)$ représente alors l'orientation moyenne des molécules. Les configurations d'un tel matériau sont modélisées par des applications u appartenant à l'ensemble $H^1(\Omega, S^2) = \{u \in H^1(\Omega, \mathbf{R}^3) ; |u(x)| = 1 \text{ p.p.}\}$. L'énergie associée à l'état u a pour expression

$$E(u) = \int_{\Omega} (k_1(\text{div}u)^2 + k_2(u.\text{rot}(u))^2 + k_3|u \wedge u|^2) dx,$$

où k_1 , k_2 et k_3 sont des constantes positives dépendant du type du cristal, de sa température,...

Lorsque $k_1 = k_2 = k_3 = 1$, et lorsque u est prescrite sur le bord de Ω alors, $E(u)$ devient l'énergie de Dirichlet suivante

$$E(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + g(u).$$

où $g(u)$ est un terme qui ne dépend que de la trace de u sur le bord du domaine. Les points critiques de cette fonctionnelle sur $H^1(\Omega, S^2)$ correspondent aux applications harmoniques à valeurs dans la sphère S^2 .

3.1. Problème de minimisation sur $W^{1,1}(B^2, S^1)$. Soit D le disque unité de \mathbf{R}^2 et S^1 le cercle unité de \mathbf{R}^2 . On se donne une donnée au bord $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ dans $C^{0,\alpha}$ avec $\alpha > 0$. On considère les deux problèmes de minimisation de l'énergie $\int_D |\nabla u| dx$ dans chacun des ensembles

$$U(\varphi) = \{u \in W^{1,1}(D, S^1) \ ; \ u = \varphi \text{ sur } \partial D\},$$

et

$$U_{reg}(\varphi) = \{u \in C^1(D, S^1) \cap W^{1,1}(D, S^1) \ ; \ u = \varphi \text{ sur } \partial D\}.$$

On définit alors

$$E(\varphi) = \inf_{u \in U(\varphi)} \int_D |\nabla u| dx,$$

et

$$E_{reg}(\varphi) = \inf_{u \in U_{reg}(\varphi)} \int_D |\nabla u| dx.$$

On remarque que si le degré topologique de φ est non nul, alors $U_{reg}(\varphi) = \emptyset$ et $E_{reg}(\varphi) = \infty$. Lorsque le degré de φ est nul, alors il n'y a pas d'obstruction topologique à étendre φ à D , et à avoir $E(\varphi) = E_{reg}(\varphi)$. En dimension 3, Hardt et Lin voir [HL] ont exhibé une donnée au bord φ qui réalise le phénomène de "gap" suivant

$$u \in H^1(B^3, S^2), \quad \int_{B^2} |\nabla u|^2 dx < \inf_{\substack{u \in C^1(B^3, S^2), \\ u = \varphi \text{ sur } \partial D}} \int_{B^2} |\nabla u|^2 dx.$$

Une estimation précise de ce phénomène a été donnée par Brezis voir [B2]. Avec F.Demengel voir [4], d'abord nous avons mis en évidence un phénomène de "gap" pour les infima ci-dessus. Ensuite, pour $u = (u_1, u_2)$ dans $U(\varphi)$, on introduit par analogie avec [BCL] le champ de vecteurs

$$H(u) = (u \wedge u_x, u \wedge u_x) = (u_1 u_{2,x} - u_2 u_{1,x}, u_1 u_{2,y} - u_2 u_{1,y}).$$

Définition 2. Soit $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ une donnée au bord de degré 0. Soit $u \in U(\varphi)$, on définit

$$L(u) = \frac{1}{2\pi} \sup_{|\nabla \zeta| \leq 1} \left(- \int_D H(u) \cdot \text{rot}(\zeta) + \int_{\partial D} H(\varphi) \wedge n \right).$$

où n est un vecteur unitaire normal extérieur au bord.

La fonctionnelle $L(u)$ est liée au longueur de la connexion minimale,

voir [14] . Lorsque de plus u est régulière sauf en un nombre fini de points , on montre que

$$L(u) = \inf_{\sigma} \sum_{i=1}^k \text{dist}(p_i, n_{\sigma(i)}),$$

où $\{p_1, \dots, p_k\}$ (resp. $\{n_1, \dots, n_k\}$) sont les singularités de degré positif (resp. négatif), l'infimum étant pris sur toutes les permutations σ de l'ensemble $\{1, \dots, k\}$. On montre également que L est continue sur $U(\varphi)$. On peut résumer les résultats de ce paragraphe dans le théorème suivant:

Théorème 9. 1) Pour tout ε , il existe une donnée au bord φ de degré 0 telle que

$$E(\varphi) \leq 4\pi\varepsilon + 2\varepsilon \leq 4\pi - 2\varepsilon \leq E_{reg}(\varphi).$$

2) Soit u dans $U(\varphi)$. Alors il existe une suite (u_n) appartenant à $U_{reg}(\varphi)$ tels que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{dans } L^1,$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_D |\nabla u_n| dx = \int_D |\nabla u| dx + 2\pi L(u).$$

3) On a

$$\inf_{u \in U(\varphi)} \left(\int_D |\nabla u| dx + 2\pi L(u) \right) = \inf_{u \in U_{reg}(\varphi)} \int_D |\nabla u| dx.$$

4) Lorsque $\varphi(x) = x$, alors $u(x) = \frac{x}{|x|}$ est un minimiseur de $E(\varphi)$.

3.2. Problème de minimisation avec énergie relaxée en dimension 3. Dans [7], on considère Ω la boule unité de \mathbf{R}^3 . Il est clair que pour $\psi \in H^1(S^2, S^2)$, la fonction $\psi(\frac{x}{|x|})$ est dans $H^1(\Omega, S^2)$, et donc

$$\min_{u \in H^1(\Omega, S^2)} \int_{\Omega} |\nabla(u - \psi(\frac{x}{|x|}))|^2 = 0.$$

On suppose que le degré topologique de ψ est non nul. Par conséquent, la fonction $\psi(\frac{x}{|x|})$ ne peut être approchée dans H^1 par des applications régulières. On a alors

$$\alpha = \inf_{u \in C^1(\overline{\Omega}, S^2)} \int |\nabla(u - \psi(\frac{x}{|x|}))|^2 > 0.$$

Dans [7], en collaboration avec F.Zhou, on étudie ce problème de minimisation. On note que lorsque $\psi = Id$, le même problème a été étudié par Bethuel et Brezis voir [BB]. Pour u dans $H^1(\Omega, S^2)$ on introduit le champ de vecteurs initialement défini par Brezis-Coron-Lieb voir [BCL],

$$D(u) = (u.u_y \wedge u_z, u.u_z \wedge u_x, u.u_x \wedge u_y).$$

On considère

$$L(u) = \frac{1}{4\pi} \sup \left\{ \int_{\Omega} D(u) \cdot \nabla \zeta, \zeta : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}, \|\nabla \zeta\|_{L^\infty} \leq 1, \zeta = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

Notons que $L(u)$ a un sens pour u dans $H^1(\Omega, S^2)$ et que si u est régulière sauf en nombre fini de points $L(u)$ coïncide avec la longueur de la connection minimale entre les singularités voir [BCL]. L'énergie relaxée associée à notre problème est alors

$$F(u) = E(u - \psi(\frac{x}{|x|})) + 8\pi L(u).$$

Notre résultat principal s'énonce comme suit:

Théorème 10. 1) *L'infimum α n'est pas atteint.*

2) *Toute suite minimisante converge dans H^1 vers une fonction de la forme $\varphi(\frac{x}{|x|})$ où φ est une application régulière de S^2 à valeurs dans S^2 de degré 0.*

3) *On a*

$$\inf \left\{ E(u - \psi(\frac{x}{|x|})); u \in C^1(\Omega, S^2) \right\} = \min \{ F(u); u \in H^1(\Omega, S^2) \}.$$

La démonstration de ce théorème repose sur la construction d'une fonction dipôle adaptée à notre problème. Le principe est le suivant: soient u, f deux fonctions régulières dans $H^1(\Omega, S^2)$ telle que u n'est pas constante. Soit x_0 un point de Ω tel que $\nabla u(x_0) \neq 0$, alors pour tout $\rho > 0$, on construit une fonction v dans $H^1(\Omega, S^2)$ vérifiant

- i) $v = u$ en dehors de la boule $B(x_0, \rho)$,
- ii) v est lipschitzienne sauf en deux points p et n appartenant à $B(x_0, \rho)$, avec $\deg(u, p) = 1$ et $\deg(u, n) = -1$.
- iii) $E(v - f) < E(u - f) + 8\pi|p - n|$.

3.3. Régularité d'applications minimisantes à valeurs dans la sphère S^2 . Soit Ω la boule unité de \mathbf{R}^3 . On pose $H^1(\Omega, S^2)$ l'ensemble des fonctions $u \in H^1(\Omega, \mathbf{R}^3)$ telle que $u(x) \in S^2$ p.p. S^2 désigne la sphère unité de \mathbf{R}^3 . Pour $\lambda \geq 0$ et $f \in L^2(\Omega, S^2)$, on pose

$$F_\lambda(u, f) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \lambda \int_{\Omega} |u - f|^2$$

Les points critiques de $F_\lambda(\cdot, f)$ satisfont l'équation d'Euler-Lagrange suivante

$$(E_{\lambda, f}) \quad -\Delta u = u |\nabla u|^2 + \lambda[f - \langle u, f \rangle u].$$

Dans le cas où f est une constante cette équation n'est autre que l'équation elliptique de Landau-Lifshitz sans valeurs au bord. Il est

facile de voir que F_λ est semi-continue sur $H^1(\Omega, S^2)$ pour la topologie faible, et par conséquent l'infimum

$$\inf_{u \in H^1(\Omega, S^2)} F_\lambda(u, f)$$

est atteint par une certaine fonction u_λ vérifiant $(E_{\lambda, f})$. Dans ce paragraphe, je m'intéresse à la régularité des solutions u_λ . Rappelons que dans [BB], Bethuel et Brezis ont montré qu'il existe une fonction régulière f à valeurs dans \mathbf{R}^3 telle que $u_\lambda(f) = u_\lambda$ est singulière dans Ω . Notons qu'il est connu voir [SU1], [SU2] que u_λ est régulière sauf en un nombre fini de points. La régularité de solutions minimisantes à valeurs dans S^2 et d'autres résultats proches ont été étudiés par plusieurs auteurs voir [BB], [B1], [B2], [BBC], [HKL] et [HL].

Dans un premier travail en collaboration avec F.Zhou voir [5], on considère le même problème, on obtient l'existence de $\lambda_1 > 0$ tel que pour tout $\lambda \geq \lambda_1$, pour toute fonction f dans $H^1(\Omega, S^2)$ qui n'est pas limite de fonctions régulières, toute solution u_λ est singulière dans Ω . D'autre part, sous certaines conditions sur $f \in H^1(\Omega, S^2)$, à savoir que

$\int_{\Omega} f \neq 0$ et que l'image par f d'une petite couronne incluant le bord est inclus dans une seule hémisphère. On montre alors, que pour λ assez petit u_λ est régulière dans Ω . Les grandes lignes de la démonstration de ce résultat sont les suivants : on commence par établir une inégalité de Hölder inverse, ensuite on trouve une formule de monotonie adaptée à notre problème, et on conclut en utilisant le théorème d' ε -régularité.

Dans [13], écrit en collaboration avec P.Courilleau et S.Dumont, on montre que ces dernières conditions sur f ne sont pas nécessaires. Nous montrons le résultat général suivant :

Théorème 11. *Soit f une fonction mesurable à valeurs dans S^2 , on a pour tout $0 \leq \lambda \leq \frac{3}{5}$, toute solution minimisante du problème ci-dessus est régulière dans Ω .*

La stratégie est la suivante: en utilisant une fonction test appropriée et [5], on montre que si $\lambda < \lambda_0$, alors u_λ n'a pas de singularités près du bord. Ensuite, on utilise une formule de monotonie établie dans [5] pour montrer que pour tout compact de Ω u_λ est régulière pour λ suffisamment petit.

On étudie également le problème du point de vue numérique. On utilise une méthode initialement développée par F.Alouges voir [Al] pour le problème $\min_{u \in H_{n_0}^1(\Omega, S^2)} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$. Les principales difficultés pour trouver

numériquement une solution minimisante sont d'une part, la contrainte $|u(x)| = 1$ a.e. n'est pas convexe, d'autre part, on ne sait pas si les solutions u_λ sont régulières et uniques.

L'algorithme itératif utilisé fait décroître l'énergie à chaque étape, plus précisément, on considère le problème de minimisation: $\min_{w \in K_u} F_\lambda(u-w)$ où $K_u = \{w \in H^1(\Omega, \mathbf{R}^3) \ ; \ w(x) \cdot u(x) = 0 \ p.p.\}$. En résumé la méthode consiste à:

1. Choisir d'une manière aléatoire u_0 .
2. Le choix de v_n :
 - 2.1 Trouver w_n solution du dernier problème telle que $u = u_n$
 - 2.2 On pose $u_{n+1}(x) = \frac{u_n(x) - w_n(x)}{|u_n(x) - w_n(x)|}$.

On montre alors que cet algorithme converge, (voir [13]).

4. LA FONCTIONNELLE DE GINZBURG-LANDAU: [6], [8], [9], [10], [11], [12], [18], [20], ET [23]

4.1. Motivation physique et analyse asymptotique. Les résultats présentés ici ont une motivation physique voir par exemple [DeG]. Un supraconducteur est un matériau dont la résistivité électrique devient presque nulle en dessous d'une certaine température critique T_c . Lorsqu'un supraconducteur de type II est placé à une température $T < T_c$, dans un champ magnétique H , apparait un phénomène de transition de phase. Plus précisément on constate la coexistence de deux phases, dans des tubes de petits diamètre appelés tubes de vorticité, la densité des électrons supraconducteurs est presque nulle, c'est l'état normal. Le reste est à l'état supraconducteur. On constate aussi que lorsque H est assez grand, le nombre de vorticité est proportionnel à H .

On rencontre les mêmes phénomènes quand on étudie des superfluides tel que l'hélium II. Pour plus de détails on pourra voir les ouvrages [DeG], [D].

La modélisation de ces problèmes est fourni par Ginzburg-Landau (1950) voir [GL]. Les résultats obtenus concernent des domaines à géométrie cylindrique infini. L'étude se ramène à un domaine de dimension 2. Si on ne tient pas compte du champ magnétique, l'énergie de Ginzburg-Landau est

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int p |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int p(1 - |u|^2)^2.$$

Donc du point de vue de la physique cette énergie présente un problème modèle. Ici, l'inconnue u , souvent notée ψ par les physiciens, est une fonction complexe. En supraconductivité, $|\psi|^2$ est proportionnelle à la densité des électrons supraconducteurs, si $|\psi|$ est proche de 1 on

parle d'état supraconducteur et l'état normal correspond à $|\psi|$ près de 0. Si l'on écrit $\psi = |\psi| e^{iS}$ où S est à valeurs réelle, alors ∇S est proportionnel à la vitesse des supercourants.

Le paramètre ε noté souvent ξ a l'homogénéité d'une longueur, il dépend du matériau et de sa température. Lorsque $T < T_c$ et assez loin de T_c , ξ est extrêmement petit, de l'ordre de quelques centaines d'Angströms. Il est donc naturel d'étudier l'analyse asymptotique du problème lorsque ε tend vers 0. Notons que $\varepsilon = 0$ n'a pas de signification physique.

La présence du poids non constant p modélise le même problème soit lorsqu'on demande aux vorticités de se placer dans certains endroits du domaine voir [DG]: C'est le phénomène de "pinning", soit lorsque l'on introduit des impuretés dans le matériau voir [Ru]. On verra plus loin que les vorticités vont se placer près des minima de p .

Le cadre mathématique rigoureux des résultats asymptotiques pour ces problèmes lorsque le poids p est constant a été développé par Bethuel-Brezis et Hélein [BBH1,2].

Soit G un domaine régulier de \mathbf{R}^2 . On se donne une fonction p régulière, positive de \overline{G} à valeurs dans \mathbf{R} . Soit $g \in \mathbf{C}^\infty(\partial G, S^1)$ une donnée au bord, telle que $\deg(g, \partial G) = d > 0$, je considère le problème de minimisation suivant

$$\min_{u \in H_g^1(G, \mathbf{C})} E_\varepsilon(u)$$

où E_ε est la fonctionnelle de Ginzburg-Landau

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_G p |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_G p (1 - |u|^2)^2$$

et

$$H_g^1(G, \mathbf{C}) = \{u \in H^1(G, \mathbf{C}); u = g \text{ on } \partial G\}.$$

Ce problème est une forme généralisée de celui introduit par Bethuel, Brezis et Hélein [BBH1,2]. Ces auteurs ont montré que, en particulier, si le domaine G est étoilé et si $p = 1$, alors il existe une sous-suite ε_n , exactement d singularités a_1, \dots, a_d dans G et une application harmonique régulière u_* dans $G \setminus \{a_1, \dots, a_d\}$ tels que $u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_*$ quand ε_n tend vers 0 dans $C_{loc}^{1,\alpha}(\overline{G} \setminus \{a_1, \dots, a_d\})$ pour tout $0 < \alpha < 1$. De plus, (a_1, \dots, a_d) minimise une certaine fonctionnelle W appelée énergie renormalisée. Pour $\varepsilon_n < \varepsilon_0$ dépendant uniquement de g et G , u_{ε_n} possède exactement d zéros $x_1^{\varepsilon_n}, \dots, x_d^{\varepsilon_n}$. Ces résultats ont été généralisés pour un domaine arbitraire par [dPF].

Lorsque p est non constant, la situation est complètement différente. On découvre que les minima de p jouent un rôle important. En fait, on

rencontre deux difficultés. La première vient du fait que, dans le cas où le nombre des minima de p est supérieur au degré d , les degrés autour des zéros de u_ε sont plus grands que 1. La seconde est que en général voir théorème 8 et 13, les zéros de u_ε peuvent être très près du bord. En fait, le bord joue le rôle de miroir, c'est à dire, on pourra voir un zéro s'approchant du bord comme deux zéros situés symétriquement par rapport à ce dernier. On doit alors tenir compte d'une part des interactions entre des zéros approchant une même limite et d'autre part, des zéros près du bord.

4.2. Les résultats de convergences. On commence par quelques notations et définitions. On pose

$$p_0 = \min_{x \in \overline{G}} p(x)$$

et

$$\Lambda_1 = \{x \in \overline{G}; p(x) = p_0\} ; \Lambda_2 = \{x \in G; p(x) = p_0\}.$$

On va supposer dans tout ce qui suit que pour tout $a \in \Lambda_1$, il existe un entier $k_a \geq 1$ et une constante $C(a) > 0$ tel que

$$p(x) - p_0 = C(a)|x - a|^{k_a} + o(|x - a|^{k_a})$$

où $o(|x - a|^{k_a})$ est une quantité vérifiant $\frac{o(|x - a|^{k_a})}{|x - a|^{k_a}} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow a$.

Soit (u_{ε_n}) une suite de solutions minimisantes de $E_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n})$, alors on définit une collection de mauvais disques comme dans [BBH2]: quitte à extraire une sous-suite, pour n assez grand, il existe $\alpha > 0$ et N disques $B(x_i^{\varepsilon_n}, \alpha\varepsilon_n)$ tels que $\{x \in G; |u_{\varepsilon_n}(x)| < \frac{1}{2}\} \subset \cup B(x_i^{\varepsilon_n}, \alpha\varepsilon_n)$, $|x_i^{\varepsilon_n} - x_j^{\varepsilon_n}| > 4\alpha\varepsilon_n$, for $i \neq j$. On pose a_j la limite de $x_j^{\varepsilon_n}$.

Je commence par deux lemmes faciles et importants qui vont nous donner une idée concernant la localisation des singularités du problème limite (voir [8], et [9]).

Lemme 1. *i) Pour tout $\sigma > 0$ assez petit, il existe une constante $C = C(\sigma, p, g)$ telle que*

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \pi d(p_0 + \sigma) \log \frac{1}{\varepsilon} + C.$$

ii) Si on suppose que $\deg(u_{\varepsilon_n}, \partial B(a_j, \rho)) = d_j \neq 0$, alors $a_j \in \Lambda_1$.

Dans le cas où le nombre des minima de p est assez grand, on peut préciser ce résultat par:

Lemme 2. *Supposons que $\text{card}\Lambda_2 \geq d$, on a alors*

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \pi dp_0 \log \frac{1}{\varepsilon} + C.$$

Dans ce cas, on localise les singularités du problème limite comme dans [BBH2] avec le renseignement supplémentaire suivant, ces singularités sont des minima de p . Le cas le plus intéressant est lorsque $\text{card}\Lambda_2 \leq d$, ce cas a été étudié dans [11] et [12] en collaboration avec A.Beaulieu.

Posons

$$K = \{k_a, \quad a \in \Lambda_1\}, \quad K_2 = \{k_a, \quad a \in \Lambda_2\}, \quad \bar{K} = \{k_a, \quad a \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_2\}, \\ l_2 = \text{Card}\Lambda_2,$$

$$\bar{k} = \max K, \quad \bar{\Lambda} = \{a \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_2 \quad \text{such that} \quad k_a = \bar{k}\}, \\ k_{a_i} = k_i \quad \text{for all} \quad i,$$

$$A_i = \frac{d_i^2 - d_i}{k_i} \quad i = 1, \dots, l_2$$

et

$$A_i = \frac{2d_i^2 - d_i}{k_i} \quad i = l_2+1, \dots, m.$$

On définit

$$F(d, K) = \min \left\{ \sum_{i=1}^{l_2} \frac{d_i^2 - d_i}{k_i} + \sum_{i=l_2+1}^n \frac{2d_i^2 - d_i}{k_i}, \quad n \geq l_2, \quad (d_1, \dots, d_n) \in N^n \right.$$

$$\left. \text{tel que} \quad \sum_{i=1}^n d_i = d, \quad (k_1, \dots, k_{l_2}) \in (K_2)^{l_2}, \quad (k_{l_2+1}, \dots, k_n) \in \bar{K}^{n-l_2} \right\}.$$

Notons que dans le cas où $l_2 = 0$, (réciproquement le cas où $n = l_2 > 0$) on utilise la convention suivante $\sum_{i=1}^{l_2} \frac{d_i^2 - d_i}{k_i} = 0$ (réciproquement $\sum_{i=l_2+1}^n \frac{2d_i^2 - d_i}{k_i} = 0$).

Notre résultat principal concernant la convergence des suites minimisantes s'énonce comme suit :

Théorème 12. *Soit u_{ε_n} une suite minimisante qui converge dans $C_{loc}^{1,\alpha}(\bar{G} \setminus \{a_1, \dots, a_m\})$ vers une limite u_0 . Soit $(d_1, \dots, d_m) \in N^m$, tels que $\sum_{i=1}^m d_i = d$ les degrés associés à (a_1, \dots, a_m) . Alors*

$$\Lambda_2 \subset \{a_1, \dots, a_m\}.$$

Notons que $(a_1, \dots, a_{l_2}) \in \Lambda_2^{l_2}$, $(a_{l_2+1}, \dots, a_m) \in (\Lambda_1 \setminus \Lambda_2)^{m-l_2}$ et les exposants k_{a_1}, \dots, k_{a_m} associés aux points a_1, \dots, a_m . On a a_1, \dots, a_m réalisent $F(d, K)$.

On en déduit le Corollaire suivant:

Corollaire 2. *Supposons que*

$$\text{Card}\Lambda_2 + \text{Card}\bar{\Lambda} \geq d$$

alors

$$m = d, \quad \Lambda_2 \subset \{a_1, \dots, a_d\} \subset \Lambda_2 \cup \bar{\Lambda}, \quad \text{and} \quad \deg(u_0, a_i) = 1.$$

La démonstration du Théorème 4.3 voir [11] fait intervenir, l'estimation suivante de l'énergie.

Théorème 13. *Il existe une sous-suite (ε_n) tendant vers 0 et une constante $C > 0$ dépendant uniquement de g telles que*

$$|E_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}) - \pi d p_0 \log \frac{1}{\varepsilon_n} - \pi p_0 F(d, K) \log \log \frac{1}{\varepsilon_n}| \leq C.$$

Le résultat suivant voir [11], nous précise la position des centres des mauvais disques qui sont des petits disques dans les quels $|u_\varepsilon|$ est assez petit. On a

Théorème 14. *Les points $a_j \in \Lambda_1 \setminus \Lambda_2$ étant donnés par le Théorème 8, $j = l_2 + 1, \dots, m$, soit x^{ε_n} le centre d'un mauvais disque tendant vers a_j quand ε_n tend vers 0. Alors, quitte à extraire une sous-suite notée encore $(\varepsilon_n)_n$, on a $|x^{\varepsilon_n} - a_j|^{k_{a_j}} \log \frac{1}{\varepsilon_n}$ et $\text{dist}^{k_{a_j}}(x^{\varepsilon_n}, \partial G) \log \frac{1}{\varepsilon_n}$ tend vers des constantes positives quand ε_n tend vers 0. De plus, il existe exactement d mauvais disques $B(x_i^{\varepsilon_n}, \alpha \varepsilon_n)$ et pour $i \neq k$, $|x_i^{\varepsilon_n} - x_k^{\varepsilon_n}|^{k_{a_j}} \log \frac{1}{\varepsilon_n}$ tendent vers une constante positive.*

4.3. L'énergie renormalisée. Le but de cette section est de localiser les singularités du problème limite. On pose $l = d - l_2$, on réécrit les singularités comme suit $(a_1, \dots, a_l) \in \bar{\Lambda}^l$ et $(a_{l+1}, \dots, a_d) \in \Lambda_2^{l_2}$, la fonction u_0 est définie par

$$u_0(z) = \left(\frac{z - a_1}{|z - a_1|}\right)^2 \dots \left(\frac{z - a_l}{|z - a_l|}\right)^2 \left(\frac{z - a_{l+1}}{|z - a_{l+1}|}\right) \dots \left(\frac{z - a_d}{|z - a_d|}\right) e^{i\phi(z)}$$

où

$$\begin{cases} -\text{div}(p\nabla\phi) = \nabla p \cdot (2\nabla\theta_1 + \dots + 2\nabla\theta_l + \nabla\theta_{l+1} + \dots + \nabla\theta_d) & \text{dans } G \\ \phi = \phi_0 & \text{sur } \partial G \end{cases}$$

et les fonctions θ_j sont définies par

$$e^{i\theta_j} = \frac{z - a_j}{|z - a_j|} \quad \text{pour } z \in G \setminus \{a_j\}$$

avec

$$\nabla\theta_j = \left(-\frac{y - \beta_j}{|z - a_j|}, \frac{x - \alpha_j}{|z - a_j|}\right) \quad \text{où } a_j = \alpha_j + i\beta_j$$

et ϕ_0 est définie par

$$e^{i\phi_0(z)} = \left(\frac{|z - a_1|}{z - a_1}\right)^2 \dots \left(\frac{|z - a_l|}{z - a_l}\right)^2 \left(\frac{|z - a_{l+1}|}{z - a_{l+1}}\right) \dots \left(\frac{|z - a_d|}{z - a_d}\right) g(z)$$

on $\partial G \setminus \{a_1, \dots, a_l\}$.

Remarque. Lorsque $a \in \partial G$, la fonction $\left(\frac{z-a}{|z-a|}\right)^2$ est régulière au point a dans la direction tangentielle.

Pour localiser les points a_1, \dots, a_l dans $\bar{\Lambda}$, on définit comme dans [BBH2] une fonctionnelle appelée énergie renormalisée $W(\bar{a}, \bar{d}, g, p)$ associée à une configuration donnée $\bar{a} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k)$ constituée de points distincts dans \bar{G} , $\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_h$ sont dans ∂G et $\bar{a}_{h+1}, \dots, \bar{a}_k$ appartiennent à G , avec des degrés respectifs $\bar{d} = (d_1, \dots, d_k) \in \mathbf{Z}^k$ tel que $\sum_{i=1}^k d_i = d$. On pose:

$$\begin{aligned} W(\bar{a}, \bar{d}, g, p) &= -2\pi \sum_{j=1}^h \sum_{i=1, i \neq j}^k d_i d_j p(\bar{a}_i) \log |\bar{a}_i - \bar{a}_j| \\ &\quad - \pi \sum_{j=h+1}^k \sum_{i=1, i \neq j}^k d_i d_j p(\bar{a}_i) \log |\bar{a}_i - \bar{a}_j| - \pi \sum_{i,j} d_j R(\bar{a}_i, \bar{a}_j), \end{aligned}$$

où la fonction $R(x, \bar{a}_j)$ for $j = 1, \dots, h$ est définie par (avec $p(\bar{a}_j) = p_0$)

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\frac{1}{p} \nabla R\right) = -2p_0 \operatorname{div}\left(\frac{1}{p} \nabla \log |x - \bar{a}_j|\right) & \text{dans } G \\ \frac{1}{p} \frac{\partial R}{\partial \nu} = \left(1 - \frac{p_0}{p}\right) + \frac{1}{d} \frac{\partial \phi_0}{\partial \tau} & \text{sur } \partial G, \end{cases}$$

avec la condition de normalisation $\int_{\partial G} (g \times g_\tau) R = -2p_0 \int_{\partial G} (g \times g_\tau) \log |x - \bar{a}_j|$. La fonction R existe et est régulière dans \bar{G} . En effet, on peut montrer que

$$-2p_0 \int_G \operatorname{div}\left(\frac{1}{p} \nabla \log |x - \bar{a}_j|\right) = \int_{\partial G} \left(1 - \frac{p_0}{p}\right) + \frac{1}{d} \frac{\partial \phi_0}{\partial \tau}.$$

La régularité de R est une conséquence du fait que $\nabla \frac{1}{p} \cdot \nabla \log |x - \bar{a}_j|$ soit dans $L^s(G)$, pour $1 \leq s < 2$, ceci implique que R est dans $W^{1,q}(G) \cap C^0(\bar{G})$ pour un certain $q > 2$.

Le premier résultat principal de cette section est le suivant voir [11] :

Théorème 15. *On pose $l = d - l_2$ et*

$$\Lambda_2 = \{a_{l+1}, \dots, a_d\}.$$

Alors la configuration $(a_1, \dots, a_l) \in \bar{\Lambda}^l$ minimise

$$W_b(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_l) = W(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_l, a_{l+1}, \dots, a_d, (1, \dots, 1), g, p) + \frac{\pi}{\bar{k}} p_0 \sum_{i=1}^l \log(C(\bar{a}_i)).$$

Notre second résultat concerne la position des centres des mauvais disques, il nous donne une estimation précise de l'énergie

Théorème 16. 1) Soit $x_j^{\varepsilon_n}$ le centre du mauvais disque associé à a_j , $j = 1, \dots, l$. On a

$$\begin{aligned} |x_j^{\varepsilon_n} - a_j|^{\bar{k}} \log \frac{1}{\varepsilon_n} &\rightarrow \frac{p_0}{C(a_j)\bar{k}}, \\ \text{dist}^{\bar{k}}(x_j^{\varepsilon_n}, \partial G) \log \frac{1}{\varepsilon_n} &\rightarrow \frac{p_0}{C(a_j)\bar{k}}. \end{aligned}$$

2) Il existe une fonction $X(\varepsilon)$ qui tend vers 0 quand ε tend vers 0 telle que

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(u_\varepsilon) &= \pi d p_0 \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\pi p_0}{\bar{k}} (d-l) \log \log \frac{1}{\varepsilon} + \sum_{i=l+1}^d \frac{\pi p_0}{\bar{k}} \log \frac{\bar{k} C(a_i)}{p_0} + p_0 d \gamma + \\ &\frac{\pi p_0 (d-l)}{\bar{k}} + W(a_1, \dots, a_d, (1, \dots, 1), g, p) + X(\varepsilon). \end{aligned}$$

Finalement, on se place dans le cas le plus général, et on donne les résultats généraux concernant la localisation des singularités $(a_1, \dots, a_m) \in \bar{\Omega}^m$. On estime également l'énergie $E_\varepsilon(u_\varepsilon)$. On note pour $i = 1, \dots, l$ et pour $(\eta_1, \dots, \eta_{d_i}) \in (\mathbf{R}^2)^{d_i}$

$$H_i(\eta_1, \dots, \eta_{d_i}) = \pi \sum_{j \neq k} \log \frac{1}{|\eta_j - \eta_k|}$$

et pour $i = l+1, \dots, m$ et $(\eta_1, \dots, \eta_{d_i}) \in (\mathbf{R}_+^2)^{d_i}$

$$H_i(\eta_1, \dots, \eta_{d_i}) = \pi \sum_{j \neq k} \log \frac{1}{|\eta_j - \eta_k|} + \pi \sum_{j,k} \log \frac{1}{|\eta_j - \bar{\eta}_k|}$$

où

$$\mathbf{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, x_2 > 0\}$$

et $\bar{\eta}_k = r(\eta_k)$, r est la réflexion par rapport à l'axe $\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2, x_2 = 0\}$.

Rappelons que (voir [AS2]) pour $i = 1, \dots, l$, $(\omega_{i1}, \dots, \omega_{id_i})$ réalise le minimum sur \mathbf{R}^2 de la fonction

$$G_i(\eta_1, \dots, \eta_{d_i}) = H_i(\eta_1, \dots, \eta_{d_i}) + \pi C_{a_i} \sum_{i=1}^{d_i} |\eta_j|^2.$$

Nous montrons dans [12]

Théorème 17. 1) La configuration (a_1, \dots, a_m) minimise dans $\Lambda_2^l \times (\Lambda_1 \setminus \Lambda_2)^{m-l}$ la fonction

$$\overline{W}(b) = W_G(b, d_1, \dots, d_m, g, p) + \min_{\{\eta; C_{b_i} \sum_{j=1}^{d_i} |\eta_j|^2 = p_0 A_i\}} \sum_{i=1}^m H_i.$$

2) Il existe une fonction $X(\varepsilon)$ qui tend vers 0 quand ε tend vers 0 telle que

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) = \pi d p_0 \log \frac{1}{\varepsilon} + \pi p_0 F(d) (\log \log \frac{1}{\varepsilon} + 1) + \min_{\Lambda_2^l \times (\Lambda_1 \setminus \Lambda_2)^{m-l}} \overline{W} + d p_0 \gamma + X(\varepsilon).$$

4.4. Positions des zéros. Cette section est consacrée à l'estimation de la vitesse de convergence des zéros de u_{ε_n} vers leur limites voir [12]. Dans le cas où $p = 1$, et si (a_1, \dots, a_d) est un point critique nondégénéré de l'énergie renormalisée, Comte et Mironescu voir [CM] ont estimé la vitesse de convergence du zéro $x_i^{\varepsilon_n}$ vers a_i .

Pour simplifier la présentation, on prend $k_i = 2$. On pose

$$\sigma_n = \frac{1}{\log^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\varepsilon_n}},$$

$$\omega_{ij}^{\varepsilon_n} = \frac{x_{ij}^{\varepsilon_n} - a_i}{\sigma_n}, \quad \omega_{ij} = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \omega_{ij}^{\varepsilon_n} \quad \text{and} \quad y_{ij}^{\varepsilon_n} = a_i + \sigma_n \omega_{ij}.$$

Les résultats principaux de cette section concernent des estimations de la distance entre x_{ij} et a_i d'une part, et d'autre part, entre x_{ij} et y_{ij} . On trouve, en particulier, dans le cas où $d_i = 1$, $i = 1, \dots, l$, p est nondégénéré, une vitesse de convergence supérieure à celle dans le cas $p = 1$. On remarque aussi que dans ce dernier cas il n'est pas nécessaire de supposer que la configuration soit un point critique nondégénéré de l'énergie renormalisée pour donner une estimation de la vitesse de convergence entre x_i et a_i . Plus précisément, on montre dans le cas où les singularités sont à l'intérieur les résultats suivants voir [12] :

Théorème 18. Soit $i = 1, \dots, l$. Si $d_i = 1$, on a

$$|x_i^{\varepsilon_n} - a_i| = O\left(\frac{\varepsilon_n^{\frac{1}{3}}}{\log^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\varepsilon_n}}\right).$$

Si $d_i > 1$ et si la configuration $(\omega_{i1}, \dots, \omega_{id_i})$ réalise un minimum nondégénéré pour G_i , alors

$$|x_{ij}^{\varepsilon_n} - y_{ij}^{\varepsilon_n}| = O\left(\frac{1}{\log^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\varepsilon_n}} \log \log \frac{1}{\varepsilon_n}\right).$$

Dans le cas où les singularités sont sur le bord, on a les estimations suivantes:

Théorème 19. *Pour $i = l + 1, \dots, m$ on suppose que localement, dans un voisinage de a_i , G est le demi-plan \mathbf{R}_+^2 . Alors, la configuration $(\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_{d_i}})$ réalise le minimum de G_i sur $(\mathbf{R}_+^2)^{d_i}$. Si ce minimum est non dégénéré, alors*

$$|x_{ij}^{\varepsilon_n} - y_{ij}^{\varepsilon_n}| = O\left(\frac{1}{\log^{\frac{5}{8}} \frac{1}{\varepsilon_n}} \log^{\frac{1}{2}}\left(\log \frac{1}{\varepsilon_n}\right)\right).$$

4.5. Problèmes quasi-linéaire de Ginzburg-Landau. Ce travail est fait en collaboration avec Carmen Perugia. Soit G un domaine régulier de \mathbf{R}^2 . Soit $g \in \mathbf{C}^\infty(\partial G, S^1)$ une donnée au bord, telle que $\deg(g, \partial G) = d > 0$, soient $k \geq 1$ et $l \geq 1$, on considère le problème de minimisation suivant

$$\min_{u \in H_g^1(G, \mathbf{C})} E_\varepsilon(u)$$

où

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_G (1 + |x|^k |u|^l) |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_G (1 - |u|^2)^2$$

Le but est d'étudier le problème limite lorsque ε tend vers 0. On sait que d'une part, les singularités des solutions minimisantes ont tendance à se localiser près des minima du poids $p = 1 + |x|^k |u|^l$, d'autre part, $|u|$ va tendre vers 1 dans L^2 ... lorsque ε tend vers 0. Le problème est donc de localiser les singularités et de donner le comportement de l'énergie associée à ce problème. Nous montrons que les cas $k = 0$ et $k \neq 0$ sont très différents. Dans le deuxième cas, comme dans [8, 9, 11, 12] voir ma liste de publications, on montre que la seule singularité est 0. Pour le premier, la présence de $|u|$ joue un rôle important.

4.6. Minimisation d'un type d'équation de Ginzburg-Landau avec un potentiel ayant un zéro d'ordre infini. Dans un travail récent avec I. Shafrir voir [18], nous avons considéré l'équation de Ginzburg-Landau avec un potentiel J ayant un zéro d'ordre infini. Un exemple significatif pour notre cas est lorsque J est de la forme

$$J_k(t) = \exp(-1/t^k) \quad \text{et} \quad t > 0, \quad \text{and} \quad J_k(t) = 0 \quad \text{for} \quad t \leq 0,$$

avec $k > 0$. On note que le cas classique de Ginzburg-Landau correspond à $j(t) = t^k$, $k \geq 1$ un entier. Le but est l'étude asymptotique des solutions minimisantes de la fonctionnelle ,

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_G |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon^2} \int_G J(1 - |u|^2) dx$$

définie pour

$$u \in H_g^1(G, \mathbb{C}) := \{u \in H^1(G, \mathbb{C}) \text{ t.q. } u = g \text{ dans } \partial G\}.$$

où G est un domaine de \mathbb{R}^2 et g est une donnée au bord de degré $d \geq 0$.

On montre que l'énergie de Ginzburg-Landau est "beaucoup plus petite" que dans le cas de l'énergie habituelle. La différence principale avec celle-ci est que dans notre cas, la présence du zéro d'ordre infini fait beaucoup diminuer l'énergie d'une vorticité. On donne la valeur de l'énergie explicitement:

$$2\pi \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - I\left(\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$$

avec $I(R) = o(R)$ quand R tend vers l'infini.

On note que le cas classique de Ginzburg-Landau donne pour chaque vorticité, une énergie égale à $2\pi \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

On montre plus précisément

Théorème 20. *Pour chaque $\varepsilon > 0$, soit u_ε une solution minimisante de la fonctionnelle E_ε . On suppose que J vérifie :*

(H₁) $J(0) = 0$, $J(t) \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

(H₂) $J'(t) > 0$ dans $(0, 1)$.

(H₃) $J''(t) \geq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

(H₄) Il existe $\eta_0 > 0$ tel que $J''(t) > 0$ dans $(0, \eta_0)$.

On a alors

(i) Pour une sous-suite $\varepsilon_n \rightarrow \infty$ on a

$$u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_* = e^{i\phi} \prod_{j=1}^d \left(\frac{z - a_j}{|z - a_j|} \right) \text{ in } C^{1,\alpha}(G \setminus \{a_1, \dots, a_d\}),$$

où a_1, \dots, a_d sont des points distincts de G et ϕ est une application harmonique déterminée par $u_* = g$ on ∂G .

(ii) Posons pour $R \geq 1$

$$I_0(R) = \frac{1}{2} \int_{1/R^2}^1 j^{-1}(t) \frac{dt}{t}.$$

On a

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) = 2\pi d \left(\log \frac{1}{\varepsilon} - I_0\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right) + O(1).$$

La réponse au "problème réciproque" est positive, comme le montre le théorème suivant :

Théorème 21. *On suppose que $h \in C^2[0, \infty)$ satisfait*

$$h'(t) > 0, \quad h''(t) < 0 \quad \text{pour } t \geq T > 0.$$

Alors, il existe une fonctionnelle J vérifiant (H1) – (H4), tel que le développement asymptotique des solutions minimisantes de E_ε sur $H_g^1(G, \mathbb{C})$, pour une donnée au bord g de degré $d \geq 0$, est donné par

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon) = 2\pi d \left(\log \frac{1}{\varepsilon} - h\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right) \right) + O(1).$$

5. ANALYSE DANS UN MULTI-DOMAIN : [15], [21] ET [22]

5.1. Un problème de Ginzburg-Landau dans un domaine oscillant. Ce travail est fait en collaboration avec A.Gaudeillo et C.Picard. Soient $a, b_1, b_2, \alpha, \beta$ appartenant à $]0, \infty[$ tels que $0 < \alpha < \beta < a$. On introduit le domaine \mathbf{R}^2 suivant:

$$\begin{cases} \Omega =]0, a[\times] - b_1, b_2[, \\ \Omega^- =]0, a[\times] - b_1, 0[, \quad \Omega^+ =]0, a[\times]0, b_2[, \\ \Sigma =]0, a[\times\{0\}, \\ \Omega_h = \Omega^- \cup \left(\bigcup_{k=0}^{h-1} \left(\frac{1}{h}\right] \alpha, \beta[+ \frac{ak}{h} \right) \times]0, b_2[\right) \quad h \in \mathbf{N}, \\ \Omega_h^+ = \Omega^+ \cap \Omega_h \quad h \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Ce genre de domaine a été utilisé par Brizzi-Chalot pour des problèmes d'homogénéisation, on rappelle que (voir [BriCh])

$$\chi_{\Omega_h^+} \rightharpoonup \theta = \frac{\beta - \alpha}{a} \text{ faible } \star \text{ dans } (L^\infty(\Omega^+))^2,$$

et

$$\chi_{\Omega_h \cap \Sigma} \rightharpoonup \theta \text{ faible } \star \text{ dans } L^\infty(\Sigma),$$

lorsque h tend vers l'infini.

Le but de ce paragraphe est d'étudier le comportement asymptotique lorsque h tend vers l'infini du problème limite suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u_h - u_h + |u_h|^2 u_h = f & \text{dans } \Omega_h, \\ Du_h \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega_h, \end{cases}$$

où $f = (f_1, f_2)$ est une fonction donnée dans $(L^2(\Omega))^2$ et ν le vecteur normal extérieur à $\partial\Omega_h$. Il est facile de constater que ce problème admet une solution u_h au sens faible. On l'obtient en minimisant la fonctionnelle

$$E(u) = \int_{\Omega_h} |Dv|^2 + \frac{1}{2}(1 - |v|^2)^2 - f v dx$$

définie sur $(H^1(\Omega_h))^2$. La solution u_h vérifie l'équation variationnelle suivante:

$$\begin{cases} \int_{\Omega_h} Du_h Dv - u_h v + |u_h|^2 u_h v dx = \int_{\Omega_h} f v dx & \forall v \in (H^1(\Omega_h))^2, \\ u_h = (u_h^{(1)}, u_h^{(2)}) \in (H^1(\Omega_h))^2 \end{cases}$$

Nos résultats principaux sont décrit dans le théorème suivant

Théorème 22. *On suppose que $\alpha = a - \beta$. Soit u_h , h appartient à \mathbf{N} , une solution du problème ci-dessus, avec f dans $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et soit θ définie comme ci-dessus. Alors, pour tout entier h il existe une extension linéaire $P_h \in L(H^1(\Omega_h^+), H^1(\Omega^+))$, une suite de réels positifs $(h_k)_k$ strictement croissante et une fonction u dans $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tels que*

$$\begin{cases} P_{h_k} u_{h_k} \rightharpoonup u & \text{faiblement dans } H^1(\Omega^+), \\ u_{h_k} \rightharpoonup u & \text{faiblement dans } H^1(\Omega^-), \end{cases}$$

lorsque k tend vers l'infini où u est une solution du problème suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - u + |u|^2 u = f & \text{dans } \Omega^+, \\ -\Delta u - u + |u|^2 u = f & \text{sur } \Omega^-, \\ \theta \frac{\partial u^+}{\partial x_2} = \frac{\partial u^-}{\partial x_2} & \text{sur } \Sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 & \text{sur }]0, a[\times \{b_2\}, \\ Du \cdot \nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega^- \setminus \Sigma. \end{cases}$$

De plus, l'énergie converge au sens suivant:

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_{h_k}} |Du_{h_k}|^2 - |u_{h_k}|^2 + |u_{h_k}|^4 dx \\ & = \theta \int_{\Omega^+} \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right|^2 - |u|^2 + |u|^4 dx + \int_{\Omega^-} |Du|^2 - |u|^2 + |u|^4 dx. \end{aligned}$$

La formulation variationnelle de l'équation vérifiée par u_h est donnée par

$$\begin{cases} \theta \int_{\Omega^+} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} - uv + |u|^2 uv dx + \int_{\Omega^-} Du Dv - uv + |u|^2 uv dx = \\ \theta \int_{\Omega^+} f v dx + \int_{\Omega^-} f v dx & \forall v \in H^1(\Omega), \\ u \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \end{cases}$$

5.2. Analyse asymptotique dans un multi-domaine de solutions minimisantes à valeurs dans S^2 : Le papier [20] est consacré à l'étude d'un problème stationnaire de type Landau-Lifshitz dans un "multi-domaine" de \mathbb{R}^3 . Ce modèle décrit la densité du moment magnétique (magnétisation) dans un milieu ferromagnétique. Le moment magnétique est principalement créé par des rotations des électrons. Dans ce travail, le domaine spatial est occupé par un corps ferromagnétique. Notre domaine Ω_n se compose de deux cylindres verticaux

superposés : le premier est de hauteur une constante et de section $r_n\omega$, le second est d'épaisseur h_n et de section une constante ω . Ici r_n et h_n sont deux petits paramètres convergeant vers zéro.

On considère le problème de minimisation suivant :

$$\min \left\{ \int_{\Omega_n} |\nabla V|^2 dx - \lambda \int_{\Omega_n} |V - F|^2 dx : V \in H^1(\Omega_n, \mathbb{R}^3) \quad |V(x)| = 1 \right\}$$

où F est donnée dans $H^1(\Omega_n, \mathbb{R}^3)$. Dans [5] et [13] on a montré que pour λ assez grand et si F n'est pas approchable dans H^1 par des fonctions régulières alors il existe λ_0 tel que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$ toute solution V_λ du problème de minimisation ci-dessus possède des singularités. Le but de cet article est d'étudier V_λ lorsque r_n et h_n tendent vers 0. On note que quand r_n et h_n tendent vers 0 le domaine Ω_n tend vers la réunion d'une tige et d'une plaque. Plus précisément, la question est d'identifier le problème limite et d'étudier la régularité des solutions de ce dernier.

Par un changement de variable, on se ramène à un problème dans un domaine fixe $\Omega = \omega \times]-1, 1[$.

On minimise alors la fonctionnelle suivante

$$j_n : v = (v^a, v^b) \in V_n \longrightarrow \int_{\Omega^a} \left| \left(\frac{1}{r_n} D_{x'} v^a, \partial_{x_3} v^a \right) \right|^2 - 2v^a f_n^a dx + \\ + \frac{h_n}{r_n^2} \int_{\Omega^b} \left| \left(D_{x'} v^b, \frac{1}{h_n} \partial_{x_3} v^b \right) \right|^2 - 2v^b f_n^b dx,$$

sur l'ensemble

$$V_n = \{ (v^a, v^b) \in H^1(\Omega^a, S^2) \times H^1(\Omega^b, S^2) : v^a(x', 0) = v^b(r_n x', 0) \text{ for } x' \text{ a.e. in } \omega \},$$

On pose

$$j_n(u_n) = \min \{ j_n(v) : v \in V_n \},$$

On suppose que

$$\lim_n \frac{h_n}{r_n^2} = q \in [0, +\infty],$$

et

$$f_n^a \rightharpoonup f^a \text{ faiblement dans } L^2(\Omega^a, \mathbb{R}^3), \quad f_n^b \rightharpoonup f^b \text{ faiblement dans } L^2(\Omega^b, \mathbb{R}^3).$$

Soient

$$j^a : w \in H^1(]0, 1[, S^2) \longrightarrow |\omega| \int_0^1 |\partial_{x_3} w|^2 dx_3 - 2 \int_0^1 w \left(\int_\omega f^a dx' \right) dx_3, \\ j^b : \zeta \in H^1(\omega, S^2) \longrightarrow \int_\omega |D_{x'} \zeta|^2 dx' - 2 \int_\omega \zeta \left(\int_0^1 f^b dx_3 \right) dx'.$$

Le résultat principal de ce travail est le suivant

Théorème 23. *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n = (u_n^a, u_n^b)$ une solution du problème ci-dessus avec $q \in]0, +\infty[$. Alors, il existe une suite croissante d'entiers $\{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $u^a \in \{w \in H^1(\Omega^a, S^2) : w \text{ est indépendant de } x'\} \simeq H^1(]0, 1[, S^2)$ et $u^b \in \{\zeta \in H^1(\Omega^b, S^2) : \zeta \text{ est indépendant de } x_3\} \simeq H^1(\omega, S^2)$ (u^a et u^b dépend du choix de la sous-suite) tels que*

$$u_{n_i}^a \rightarrow u^a \text{ fortement dans } H^1(\Omega^a, S^2), \quad u_{n_i}^b \rightarrow u^b \text{ fortement dans } H^1(\Omega^b, S^2),$$

Les fonctions u^a et u^b sont des solutions des problèmes suivants

$$j^a(u^a) = \min \{j^a(w) : w \in H^1(]0, 1[, S^2)\},$$

$$j^b(u^b) = \min \{j^b(\zeta) : \zeta \in H^1(\omega, S^2)\},$$

De plus,

$$\frac{1}{r_n} D_{x'} u_n^a \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\Omega^a, \mathbb{R}^6),$$

$$\frac{1}{h_n} \partial_{x_3} u_n^b \rightarrow 0 \text{ fortement dans } L^2(\Omega^b, \mathbb{R}^3).$$

On a aussi la convergence de l'énergie

$$\lim_n j_n(u_n) = j^a(u^a) + qj^b(u^b).$$

Nous obtenons un résultat analogue lorsque $q = 0$ ou ∞ . On montre aussi que pour une classe de fonctions F la solution du problème limite est régulière sur la tige et est singulière sur la plaque.

6. QUELQUES TRAVAUX EN COURS, PROJETS

6.1. Problèmes quasi-linéaires avec exposant critique de Sobolev.

Ce travail en cours de rédaction est fait en collaboration avec H. Yazidi. Soit Ω un de \mathbf{R}^n , $n \geq 3$. Soient $k \geq 1$ et $l \geq 1$, on considère le problème de minimisation suivant

$$\inf_{|u|_q=1, u \in H_0^1(\Omega)} \int_{\Omega} (1 + |x|^k |u|^l) |\nabla u|^2 + \lambda \int_{\Omega} |u|^2$$

où $q = \frac{2n}{n-2}$ est l'exposant critique de Sobolev.

Ce travail généralise les résultats de Brezis-Nirenberg, voir [BN] dans le cas semi-linéaire. Nous montrons que si $0 < \lambda < \lambda_1$, λ_1 est la première valeur propre de $-\Delta$, l'infimum ci-dessus est atteint. La présence du poids $1 + |x|^k |u|^l$ complique l'étude, nous avons besoin de résultats de régularité pour la limite faible d'une suite minimisante. Nous utilisons des méthodes à la Ladyzhenskaya-Ural'tseva, voir [LU].

6.2. Problèmes avec exposant critique de Sobolev et avec poids.

Les travaux [17] et [19] ont donné lieu à de nombreuses questions ouvertes. Je cite par exemple la question suivante : Les solutions obtenues dans le dernier Corollaire 1, du paragraphe 2.3. correspondent à k minimiseurs globaux pour la fonctionnelle de l'énergie du problème. Il est donc naturel de s'attendre à obtenir des solutions correspondantes à des points critiques du poids, en utilisant par exemple le théorème du col d'Ambrosetti-Rabinowitz. On note que notre fonctionnelle ne satisfait pas la condition de Palais Smaile en aucun niveau supérieur au premier niveau d'énergie $\frac{p_0}{N}S^{\frac{N}{2}}$. Cette question fait l'objet d'un travail en cours en collaboration avec Passaseo, Molle et Yazidi.

7. RÉFÉRENCES

[Al] F.Alouges, A new algorithm for computing liquid crystal stable configurations: the harmonic mapping case, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 34, **5**, p.1708-1726, 1997.

[AR], A.Ambrosetti, P.Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, J.Funct.Anal. **14**, p.349-381, 1973.

[AS1] N.André, I.Shafrir, Minimization of the Ginzburg-Landau functional with weight, C.R. Acad. Sci. Paris. **321**, Série I, p.999-1004, 1995.

[AS2] N.André, I.Shafrir, Asymptotic behavior of minimizers for the Ginzburg-Landau Functional with weight, Parts I and II, Arch. Rat. Mech. Anal.**142**, p.45-73 and p.75-98, 1998.

[Ba] A.Bahri, The theory of critical points at infinity in the variational calculus, Lectures notes in Math. **1324**, p.1-29, Springer, Berlin, new York, 1988.

[BaC] A.Bahri, J.M.Coron, On a nonlinear elliptic equation involving the Sobolev exponent. The effect of the topology of the domain, Comm.Pure Appl. Math. **46**, p.253-294, 1988.

[B1] H.Brezis, Elliptic equations with limiting Sobolev exponents. The impact of topology, Comm.Pure Appl. Math. **39**, p.17-39, 1986.

[B2] H.Brezis, Liquid crystals and energy estimates for S^2 -valued maps, J. Ericksen and Kinderlehrer D., editors, Theory and applications of liquid crystals, I.M.A. Vol. **5**, Springer, 1988.

- [B3] H.Brezis, S^k -valued maps with singularities, in Topics in the Calculus of Variations (M. Giaquinta ed.), Lectures Notes, **1365**, Springer, p.1-30, 1989.
- [BB] F.Bethuel, H.Brezis, Minimisation de $\int |\nabla(u - x/|x|)|^2$ et divers phénomènes de gap, C.R. Acad. Sci. Paris, **310**, p.859-864, 1990.
- [BBC] F.Bethuel, H.Brezis, J.M.Coron, Relaxed energies for harmonic maps, in Variational Problem, H. Berestycki, J.M. Coron, I. Ekeland, Eds, Birkhäuser, 1990.
- [BBH1] F.Bethuel, H.Brezis, F.Hélein, Asymptotics for the minimization of a Ginzburg-Landau functional, Calculus of Variations and PDE, **1**, p.123-148. 1993
- [BBH2] F.Bethuel, H. Brezis, F.Hélein, *Ginzburg-Landau-vortices*, Birkhäuser, 1994.
- [BC] H.Brezis, J.M.Coron, Convergence oh H-system or how to blow up bubbles, Archive Rat. Mech. Anal **89**, **1**, p.21-56, 19985.
- [BCL] H.Brezis, J.M.Coron, E.Lieb, Harmonic maps with defects, Comm. Math. Physics, **107**, p.649-705, 1986.
- [BCN]H.Brezis, J.M.Coron et L.Nirenberg, Free vibrations for a nonlinear wave equation and a theorem of P.Rabinowitz, Com. Pure Appl. Math.**33**, p.667-689, 1980.
- [BK] H.Brezis, T.Kato, Remarks on the Schrodinger operator with singular complex potentials, J. Math. Pure Appl., **58**, p.137-151, 1979.
- [BL] H.Brezis , L.Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, Proc. Amer. Math. Soc. **88**, p.486-490, 1983.
- [BMR] H.Brezis, F.Merle, T.Rivière, Quantization effects for $-\Delta u = u(1 - |u|^2)$ in \mathbb{R}^2 , Arch. Rat. Mech. Anal.**126**, p.35-58, 1994.
- [BN1] H.Brezis, L.Nirenberg, Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, Comm. Pure Appl. Math., **36**, p.437-477, 1983.

- [BN2] H.Brezis, L.Nirenberg, A minimization problem with critical exponent and non-zero data, *Symmetry in Nature*, Vol. **1**, Scuola Normale Superiore Pisa, p.129-140, 1989.
- [BriCh] R.Brizzi, J.P.Chalot, Boundary homogenization and Neumann boundary values problem, *Ric. di Mat.* XLVI, **2**, p.341-387, 1997.
- [C] J.M.Coron, Topologie et cas limite des injections de Sobolev, *C.R.Acad. Sc. Paris*, 299, p.209-211, 1984.
- [D] R.Donnely, *Quantized vortices in helium II*, Cambridge Univ. Press, 1991.
- [DeG] P. De Gennes, *Superconductivity of metals and alloys*, Benjamin, 1966.
- [DG] Q.Du, M.Gunzburger, A model for supraconducting thin films having variable thickness, *Physica. D*, **69**, p.215-231, 1994.
- [dPF] M.del Pino, P.Felmer, Local minimizers for the Ginzburg-Landau energy, *Math.Z.* **225**, p.671-684, 1997.
- [GL] V.Ginzburg, L.Landau, On the theory of superconductivity, *Zh. Èksper. Teoret. Fiz.* **20**, p.1064-1082, 1950 [English translation in *Men of Physics: L.D.Landau*, I(D.ter Haar, ed.) p.138-167, Pergamon, New York and Oxford, 1965.
- [G] P.Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman 1985.
- [HKL] R.Hardt, Kinderlehrer, S.Y.Lin, Stable defects of minimizers of constrained variational principle, *Ann. I.H.P. Analyse Nonlinéaire*, Vol.5, p.297-322, 1988.
- [HL] R.Hardt, F.H.Lin, A remark on H^1 mappings, *Manuscripta math.* **56**, p.1-10, 1986.
- [HS] Z.C.Han, I.Shafrir, Lower bounds for the energy of S^1 -valued maps in perforated domains, *J. d'Anal Math.* **66**, p.295-305, 1995.
- [LU] Ladyzhenskaya-Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Translated from Russian, Academic Press, 1968.
- [L] P. L.Lions, The concentration-compactness principle in the calculus of variations, the limit case, Parts 1 and 2, *Riv. Mat. Iberoamericana* **1**, p.45-121, p.145-201, 1985.

- [P] S.J.Pohozaev, Eigenfunctions of the equation $-\Delta u + \lambda f(u) = 0$, Soviet Math. Doklady, **6**, p.1408-1411, 1965.
- [Re] O.Rey, The role of Green function in a nonlinear elliptic equation involving the critical Sobolev exponent, J. Funct. Anal. **89**, p.1-52, 1990.
- [Ru] J.Rubinstein, On the asymptotic behavior of minimizers of the Ginzburg-Landau vortices, Z. Angew. Math. Phys. **46**, p. 739-751, 1995.
- [S1] I.Shafir, Remarks on solutions of $-\Delta u = u(1 - |u|^2)$, C.R.Acad.Sci. Paris, 318, série I, p.327-331, 1994.
- [St] M.Struwe, A global compactness result for elliptic boundary value problems involving limiting nonlinearities, Math. Z. **187**, p.511-517, 1984.
- [SU1] R.Schoen, K.Uhlenbeck, regularity theory for harmonic maps, J. Diff. Geom., Vol 17, p.307-335, 1982.
- [SU2] R.Schoen, K.Uhlenbeck, Boundary regularity and the Dirichlet problem of harmonic maps, J. Diff. Geom., **18**, p.253-268, 1983.
- [V] R. C. A. M.Van der Vorst, Best constant for the embedding of the space $H^2 \cap H_0^2(\Omega)$ into $L^{\frac{2N}{N-4}}(\Omega)$, Diff. Int. Equations, Vol.6, **2**, p.259-276, 1993.

8. LISTE DES PUBLICATIONS

- [0] Thèse. *EDP non linéaires avec exposant critique de Sobolev et applications harmoniques*, Université Paris 6, 1990.
- [1] Solutions positives de l'équation $-\Delta u = u^p + \mu u^q$ dans un domaine à trou. *Ann. Fac. Toulouse*, **11**, no.3, p. 55-71, 1990.
- [2] The sign of Lagrange multiplier for some minimization problem, en collaboration avec R.Lewandowski, *Differential Integral Equations*, **4**, no.3, p. 491-493, 1991.
- [3] Critical Sobolev exponent and the dimension three, en collaboration avec R.Crouau et R.Lewandowski, *Houston J.Math.*, **18**, no.2, p. 189-204, 1992.

- [4] Relaxed energies for functionals on $W^{1,1}(B^2, S^1)$, en collaboration avec F.Demengel, *Nonlinear Anal.*, **19**, no.7, p. 625-641, 1992.
- [5] Regularity of $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \lambda \int_{\Omega} |u - f|^2$ and some gap phenomenon, en collaboration avec F.Zhou, *Potential Anal.*, **1**, no.4, p. 385-400, 1992.
- [6] Asymptotic behaviour for solution of a Ginzburg-Landau equation, en collaboration avec F.Zhou, *Progress in Partial Differential Equations: The Metz survey 3*, p. 52-57, Longman Res. Notes Math. Ser., 314, Longman Sci.Thech., Harlow, 1994.
- [7] A problem of minimization with relaxed energy, en collaboration avec F.Zhou, *Ann. Fac. Toulouse*, **4**, no.3, p. 579-591, 1995.
- [8] Asymptotic for minimizers of a class of Ginzburg-Landau equation with weight, en collaboration avec A.Beaulieu, *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.*, **320**, no.2, p. 181-186, 1995.
- [9] On a class of Ginzburg-Landau equation with weight, en collaboration avec A.Beaulieu *PanAmer Math. J.*, **5**, no.4, p. 1-33, 1995.
- [10] Ginzburg-Landau equation and Pohozaev identity, en collaboration avec A.Beaulieu, *Progress in Partial Differential Equations: The Metz survey 4*, p. 36-41, Longman Res. Notes Math. Ser., 345, Longman Sci. Thech., Harlow, 1996.
- [11] Ginzburg-Landau equation with weight having minima on the boundary, en collaboration avec A.Beaulieu, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.A*, **128**, no.6, p. 1181-1215, 1998.
- [12] Asymptotic behavior of minimizers of Ginzburg-Landau equation with weight near their zeros. en collaboration avec A.Beaulieu, *Asympt. Anal.*, **22**, no.3-4, p. 303-347, 2000.
- [13] Regularity of minimizing maps with values in S^2 and some numerical simulations, en collaboration avec P.Courilleau et S.Dumont, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **10**, no.2, p. 711-733, 2000.
- [14] A biharmonic problems with constraint involving critical Sobolev exponent. en collaboration avec M.Guedda et C.Picard, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect.A*, **131**, no.5, p. 1113-1132, 2001.

- [15] Homogenization of the Ginzburg-Landau equation in a domain with oscillating boundary, en collaboration avec A.Gaudiello et C.Picard, *Comm. Appl. Anal.*, **7**, no.2-3 p. 209-223, 2003.
- [16] Remarks on solutions of a fourth order problem, en collaboration avec A.Beaulieu. *Appl.Math. Lett.***19**, no.7, p. 661-666, 2006.
- [17] Localization of solutions for nonlinear elliptic problems with critical growth, en collaboration avec R. Molle, D.Passaseo, H.Yazidi, dans *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 334, p. 725-730, 2006.
- [18] Minimization of a Ginzburg-Landau type energy with fast decreasing with potential having a zero of infinite order, en collaboration avec I.Shafir, *Differential Integral Equations***19**, no.10, p. 1157-1176, 2006.
- [19] Problem with critical Sobolev exponent and with weight, en collaboration avec H.Yazidi, *Chinese Ann. Math. B*, Volume **28**, no 3, p. 327-352, 2007.
- [20] Minimization of a Ginzburg-Landau type energy with a particular potential, en collaboration avec I.Shafir, Acte de congrès, University of Chiba, Japan, 2007.
- [21] Junction of One-Dimensional Minimization Problems involving Maps with values in S^2 , en collaboration A.Gaudiello, *Adv. Diff. Equations*, **13**, No 9-10, p. 935-958, 2008.
- [22] Asymptotic Analysis, in a thin domain, of Minimizing Maps with values in S^2 , en collaboration A.Gaudiello, accepté dans "*Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*", 27 pages, Available online at www.sciencedirect.com
- [23] Quasilinear Ginzburg-Landau problem, en collaboration C.Perugia, A paraître dans *Nonlinear Analysis TMA*.

8.1. Travaux en cours.

- [24] Nonhomogeneous problem with critical Sobolev exponent, en collaboration avec H.Yazidi.