

# Rapport d'Activité 2000-2005 de Stéphane Jaffard

*Ce document constitue mon rapport d'activité durant la période où j'ai été membre de l'Institut Universitaire de France.*

Je m'intéresse à l'analyse multifractale depuis le début des années 90, et mes recherches durant la période où j'ai été membre de l'IUF se sont concentrées autour de ce domaine. Pour pouvoir décrire mes travaux, je vais commencer par une brève introduction au sujet, qui me permettra d'exposer les principaux problèmes qui s'y posaient.

## **Qu'est-ce que l'analyse multifractale?**

L'analyse multifractale a été introduite en physique pour expliquer des observations expérimentales apparemment incompatibles avec certaines conséquences de la théorie de Kolmogorov de la turbulence pleinement développée. Le travail fondateur de Kolmogorov dans les années 1940 avait mis en évidence le rôle central en turbulence joué par la "fonction d'échelle", définie de la façon suivante: Si  $v(x)$  désigne la vitesse de l'écoulement dans un domaine borné à l'instant  $t_0$ , on définit

$$S(p, l) = \int |v(x+l) - v(x)|^p dx;$$

si  $S(p, l) \sim |l|^{\zeta(p)}$  quand  $|l| \rightarrow 0$  alors  $\zeta(p)$  est la fonction d'échelle de la vitesse; les physiciens s'attendent à ce qu'elle soit "universelle", c'est-à-dire indépendante de la forme du domaine, du temps  $t_0$ , et de la nature particulière du fluide considéré, si la viscosité est suffisamment petite. Ils avaient aussi conjecturé que  $\zeta(p)$  est une fonction affine de  $p$ ; cependant, au milieu des années 80, des données expérimentales extrêmement précises obtenues en soufflerie ont permis de montrer que  $\zeta(p)$  est en fait une fonction strictement concave. Un problème fondamental a alors été de comprendre quelles implications cette constatation expérimentale avait sur la nature de la turbulence. En 1985, Uriel Frisch et Giorgio Parisi ont proposé l'interprétation suivante: cette concavité serait due à des fluctuations de la régularité de la vitesse de l'écoulement.

Soyons un peu plus précis. Une fonction  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est  $C^\alpha(x_0)$  s'il existe  $C > 0$ ,  $\delta > 0$  et un polynôme  $P_{x_0}(x)$  de degré strictement inférieur à  $\alpha$  tels que

$$\text{si } |x - x_0| \leq \delta, \quad |f(x) - P_{x_0}(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha;$$

l'exposant de Hölder de  $f$  en  $x_0$  est

$$h_f(x_0) = \sup \{ \alpha : f \text{ est } C^\alpha \text{ en } x_0 \}.$$

Notons  $E_H$  l'ensemble des points où l'exposant de Hölder de  $f$  vaut exactement  $H$ ; une fonction multifractale sera telle que les ensembles isohölderiens  $E_H$  sont, pour toute une gamme de valeurs de  $H$ , des ensembles fractals dont on cherchera à déterminer la dimension  $d_f(H)$  (cette fonction  $d_f(H)$  s'appelle *le spectre de singularités* de  $f$ ). Frisch et Parisi ont proposé une formule, le *formalisme multifractal*, dont le but est de déduire ce spectre de la connaissance de la fonction d'échelle de  $f$  par une formule de dualité convexe (transformée de Legendre-Fenchel) très simple: Si  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$d_f(H) = \inf_{p \in \mathbb{R}} (Hp - \zeta_f(p) + d).$$

L'intérêt mathématique de cette formule vient du fait qu'elle relie des quantités locales (le spectre de singularités est basé sur l'exposant de Hölder ponctuel) à des quantités globales (la fonction d'échelle peut par exemple s'interpréter, pour  $p \geq 1$ , comme décrivant les espaces de Sobolev auxquels appartient  $f$ ). Sur le plan des applications, elle permet de déduire des quantités totalement inaccessibles à un calcul direct (le spectre de singularités) de quantités effectivement calculables. Au delà du rôle qu'elle a joué au sein de la turbulence, cette formule a suscité un grand intérêt, tant en mathématiques qu'en traitement du signal, où elle a très vite été appliquée à des types de signaux d'origines très différentes.

La richesse de ce domaine de recherche vient du fait que, mathématiquement, le problème de la validité du formalisme multifractal n'a pas de solution simple; on dispose de nombreux exemples et contre-exemples à cette formule. De plus, les fonctions multifractales connues aujourd'hui proviennent de parties très différentes de l'analyse mathématique (séries de Fourier, processus aléatoires, fonctions "de type Peano", solutions d'EDP, fonctions "génériques" dans des espaces fonctionnels, fonctions intervenant en théorie analytique des nombres,...); la notion de fonction multifractale semble donc transversale à l'ensemble de l'analyse.

### L'état des lieux en 2000-2002

La recherche en analyse multifractale s'est développée dans trois directions:

1. En traitement du signal, la fonction d'échelle (ou sa transformée de Legendre) est apparue comme un outil de classification original qui peut permettre de différencier des signaux, d'établir des critères de selection parmi différents modèles proposés (en choisissant celui dont la fonction d'échelle coïncide avec celle obtenue expérimentalement), ou bien si un modèle semble pertinent, elle permettra de caler les valeurs des paramètres de ce modèle. Notons que cette approche ne s'intéresse pas nécessairement à l'interprétation en termes de singularités hölderiennes.
2. La direction la plus théorique a pour objet de "revisiter" des fonctions mathématiques et des processus aléatoires qui s'avèrent être des exemples de fonctions multifractales et de déterminer mathématiquement leurs spectres de singularités.
3. Une approche "mathématiques appliquées" cherche à faire le lien entre les deux points de vue précédents en déterminant des critères généraux de validité du formalisme multifractal; le but est de comprendre dans quels cas on peut effectivement déduire de données expérimentales une information sur le spectre de singularités d'un signal.

Les recherches dans ce domaine se sont tout d’abord concentrées sur les modèles de turbulence (modèles de cascades de Mandelbrot et leurs généralisations), mais leur champ d’applications s’est récemment élargi.

Avant 2002, j’ai surtout travaillé dans la seconde direction, montrant le caractère multifractal de différentes “fonctions de Riemann”, de la fonction de Polya, des processus de Lévy, des fonctions autosimilaires, ou des séries aléatoires d’ondelettes (cf. [5, 25, 33]).

Les recherches dans la première direction ont fortement progressé entre l’apparition de l’analyse multifractale (1985) et l’an 2000. Tout d’abord, des variantes, numériquement plus stables, ont été proposées pour le calcul de la fonction d’échelle: Alain Arneodo et ses collaborateurs ont montré qu’il est préférable de baser ce calcul sur les coefficients d’ondelette de la fonction plutôt que sur ses accroissements; en effet, les coefficients d’ondelette étant des intégrales de  $f$  contre des fonction régulières, un éventuel bruit est moyenné et donc considérablement amorti. Un autre problème, plus profond, restait posé par les valeurs de  $p$  négatives: les accroissements de  $f$  comme ses coefficients d’ondelettes peuvent être accidentellement très petits, et donc extrêmement instables lorsqu’ils sont élevés à des puissances négatives. Alain Arneodo et ses collaborateurs ont eu l’idée d’utiliser la *méthode des maxima de la transformée en ondelettes* (MMTO), initialement introduite par Stéphane Mallat comme méthode de codage invariante par translation; elle leur a permis de construire une nouvelle fonction d’échelle numériquement robuste, et ce également pour les  $p$  négatifs. Un problème important posé par cette méthode est qu’il n’existe aujourd’hui aucun résultat théorique permettant d’affirmer qu’elle ne dépend pas de l’ondelette choisie, qu’elle fournit a priori le résultat attendu pour des signaux particuliers (même si c’est en fait le cas dans la pratique), ni qu’elle donne une majoration pour le spectre dans le cas général. Cette méthode heuristique n’est donc pas assortie de “garde-fous” méthodologiques. Le problème central vers l’an 2000 était donc de trouver une nouvelle variante de la fonction d’échelle qui allie la qualité des résultats numériques de la MMTO, un moindre coût de mise en oeuvre (la MMTO nécessite le calcul d’une transformée continue en ondelettes, puis de détecter ses maxima locaux à un nombre suffisant d’échelles, et de les relier entre eux), et qui soit susceptible d’une analyse mathématique fournissant un certain nombre de garanties théoriques à l’usager.

En 2003, j’ai introduit une telle fonction d’échelle basée sur les *coefficients d’ondelette dominants*, qui est conceptuellement assez proche de la MMTO: Si l’on utilise une base orthonormée d’ondelettes, et qu’on indice les coefficients d’ondelette par un arbre dyadique, alors le calcul de la fonction d’échelle n’est pas basé directement sur ces coefficients mais sur des sup locaux de coefficients: (on remplace le coefficient par le sup sur le sous-arbre issu de ce coefficient). Cette méthode possède plusieurs propriétés remarquables:

- Le coût du calcul des coefficients dominants est du même ordre de grandeur que celui des coefficients d’ondelette, qui est en  $O(N)$  pour des ondelettes à support compact.
- On dispose de nombreux résultats théoriques qui assurent que la méthode donne le spectre correct dans les exemples classiques (mouvement brownien fractionnaire, modèles de cascades,...). En ce qui concerne l’analyse multifractale de fonctions, c’est aujourd’hui *la seule méthode* pour laquelle on ait cette garantie (la situation est différente pour l’analyse multifractale de mesures).

- Le formalisme multifractal basé sur cette fonction d'échelle fournit une majoration du spectre dont on peut montrer qu'elle est meilleure que toutes les formules introduites précédemment (notamment pour les  $p < 0$ ).

Les premiers résultats concernant cette méthode sont démontrés dans [23]. J'avais exposé les avantages théoriques de cette méthode lors d'un mini-cours au CIRM (Marseille) au printemps 2004. Patrice Abry (DR au CNRS à l'ENS de Lyon) et son élève Bruno Lashermes ont immédiatement perçu son intérêt potentiel en traitement du signal, et nous avons entamé une collaboration sur ce sujet. La méthode a été testée sur tous les signaux d'école, et les spectres théoriques sont obtenus avec une grande précision (même sur les parties décroissantes des spectres qui correspondent à  $p < 0$ , cf. [15, 16, 17]). Nous nous sommes récemment concentrés sur les applications en turbulence; un résultat spectaculaire est que cette méthode est suffisamment précise pour permettre d'établir une sélection parmi différents modèles de turbulence qui, jusqu'à présent paraissaient aussi fondés les uns que les autres, cf. [7]. Les résultats numériques obtenus nous ont à leur tour suggéré plusieurs propriétés théoriques de cette méthode, qui ont ensuite été démontrées dans [6]. Un de nos projets est d'étendre cette étude à des signaux biomédicaux (rythme cardiaque par exemple). Signalons aussi que de nombreux problèmes théoriques sont encore non résolus; ainsi, plusieurs résultats concernant les  $p$  négatifs ne sont valables que lorsque l'ondelette est  $C^\infty$ , alors qu'en pratique, on utilise toujours des ondelettes à support compact, et donc de régularité limitée.

### Résultats génériques

Je m'étais rendu compte en 1997 que la fonction d'échelle introduite par Frisch et Parisi est susceptible d'une interprétation en termes d'espaces fonctionnels lorsque  $p$  est positif: si  $L^{p,s}$  désigne l'espaces de Sobolev des fonctions de  $L^p$  dont la dérivée fractionnaire d'ordre  $s$  appartient encore à  $L^p$ , alors

$$\zeta(p) = \sup\{s : f \in L^{p,s/p}\}$$

(si  $p < 1$ , dans la définition de  $L^{p,s}$ , il faut remplacer  $L^p$  par l'espace de Hardy réel  $H^p$ ). On peut donc résumer l'information fournie par la fonction d'échelle pour  $p > 0$  par le fait que  $f$  appartient "de justesse" à un certain espace fonctionnel. Cette remarque très simple a ouvert la voie à une suite de travaux où cette approche "analyse fonctionnelle" est systématiquement exploitée: par exemple, on peut se demander si "presque toute" fonction d'un tel espace fonctionnel est multifractale, et vérifie le formalisme multifractal (au moins pour  $p > 0$ ). Cette question doit être précisée; en effet, il n'y a pas de notion évidente de "presque partout" dans un espace fonctionnel. Dans [32] j'ai obtenu une réponse positive à cette question, en prenant comme "presque partout" la notion de généricité au sens de Baire; puis, en collaboration avec Aurélia Fraysse, nous avons montré que c'est également le cas pour une notion de généricité beaucoup plus naturelle (mais nettement plus difficile à manier...), la prévalence, cf. [3, 10]. Avec Yves Meyer, nous avons également obtenu des résultats précis concernant le spectre de singularités des fonctions appartenant aux espaces de Besov "critiques", c'est-à-dire tels que, en dimension  $d$ ,  $s - d/p = 0$  (majorations de spectre et résultats génériques de multifractalité), cf. [31].

Bien qu'ils soient de nature théorique, les résultats de généricité ont contribué à changer l'opinion que les physiciens et les spécialistes de traitement du signal se faisaient de l'analyse multifractale: auparavant, on considérait que la multifractalité était un phénomène exceptionnel et nécessairement conséquence de propriétés très spécifiques des fonctions considérées (une autosimilarité en un sens plus ou moins strict, et de nature déterministe ou stochastique). Ces résultats de généricité ont permis d'établir que le contraire est vrai: ils ont contribué à "desinhiber" les praticiens qui, aujourd'hui, n'hésitent plus à tester les techniques d'analyse multifractale sur des signaux qui n'ont aucune raison de présenter une quelconque autosimilarité (par opposition aux modèles théoriques de cascades en turbulence qui présentent toujours une telle autosimilarité). A plus long terme, les résultats de généricité devraient permettre de corriger un a priori méthodologique fortement répandu dans la communauté appliquée: il consiste à considérer que, si le formalisme multifractal fournit un spectre strictement convexe porté par un intervalle d'intérieur non vide, c'est le signe caractéristique de la présence d'une cascade multiplicative dans les données.

### **Exposants ponctuels généralisés et domaines à bord fractals**

De nombreuses situations conduisent à considérer des domaines à bords irréguliers; le cas le plus évident est celui de la modélisation d'images naturelles (silhouettes d'arbres, de montagnes, de nuages, photographies aériennes de côtes), mais on rencontre également de multiples exemples en physique (ligne de brisure de plaques métalliques, rugosité de roches), en chimie (électro-déposition, croissances cristallines), en physiologie (surfaces des poumons), etc. Un problème central pour étudier et modéliser ces domaines "fractals" est de pouvoir leur associer plusieurs paramètres mathématiques qui puissent rendre compte de leur diversité. En pratique, on ne disposait que d'un seul paramètre de classification effectivement calculable: la dimension de boîte de la frontière, ce qui s'est vite avéré très réducteur: des domaines d'apparences complètement différentes peuvent avoir même dimension de boîte. A la fin des années 90, des chercheurs du CEA m'ont contacté pour savoir s'il serait possible d'effectuer une "analyse multifractale de frontières irrégulières". Leur motivation était l'instabilité de Raleigh-Taylor, dans laquelle on considère l'interface complexe qui se développe entre deux liquides non miscibles et très peu visqueux lorsque l'un d'entre eux est injecté avec une grande énergie dans l'autre: les simulations sont extrêmement coûteuses et numériquement instables; on souhaiterait dans un premier temps disposer au moins de quelques paramètres qualitatifs effectivement mesurables sur des données expérimentales, ce qui permettrait, entre autre, de tester la qualité des simulations. L'idée était de réaliser une analyse multifractale de la fonction caractéristique de l'un des domaines. Elle m'a paru tout d'abord absurde puisqu'une telle fonction ne peut présenter que deux exposants de Hölder : 0 et  $+\infty$ . Plus tard, j'ai compris que l'idée était fondamentalement correcte à condition d'assouplir la définition de la régularité höldérienne; en effet, pour des notions de régularité ponctuelle plus faibles, l'exposant correspondant peut fluctuer le long du bord d'un domaine, ouvrant ainsi la voie à une analyse multifractale de frontières. La bonne notion de régularité ponctuelle était en fait disponible depuis longtemps, mais était restée confidentielle: en 1961, Calderón et Zygmund avaient introduit les conditions de régularité ponctuelle suivantes. On dit que  $f \in T_u^p(x_0)$  s'il existe  $R, C > 0$  et un polynôme  $P$  de degré

inférieur à  $u$  tels que

$$\forall r \leq R, \quad \left( \frac{1}{r^d} \int_{B(x_0, r)} |f(x) - P(x - x_0)|^p dx \right)^{1/p} \leq Cr^u.$$

Le  $p$ -exposant de  $f$  en  $x_0$  est  $u_f^p(x) = \sup\{u : f \in T_u^p(x)\}$ . En collaboration avec Clotilde Melot, nous avons établi dans [11] l'équivalence entre cette propriété analytique de la fonction indicatrice d'un domaine  $\Omega$  et une condition locale de type géométrique sur sa frontière: Un point  $x_0$  de la frontière de  $\Omega$  est dit  $\alpha$ -accessible s'il existe  $C > 0$  et  $r_0 > 0$  tels que  $\forall r \leq r_0$ ,

$$\min \left[ \text{mes}(\Omega \cap B(x, r)), \text{mes}(\Omega^c \cap B(x, r)) \right] \leq Cr^{\alpha+d}.$$

Le lien entre notions analytiques et géométriques est alors le suivant. Soit  $p \geq 1$ ; le domaine  $\Omega$  est  $\alpha$ -accessible en  $x_0$  si et seulement si sa fonction caractéristique appartient à  $T_{\alpha/p}^p(x_0)$ . Sur le plan théorique, cela nous a permis d'associer à tout domaine un spectre multifractal. Ce spectre a une définition géométrique, mais, grâce à une "presque caractérisation" de la régularité  $T_u^p$  par ondelettes, nous avons construit un formalisme multifractal qui permettra de le calculer effectivement à partir des coefficients d'ondelette de l'image considérée, cf. [12]. Ce nouveau spectre constitue un outil de classification très riche qui devrait trouver des applications tant en géométrie qu'en analyse d'image.

Ce travail a eu plusieurs prolongements récents. En collaboration avec Yanick Heurteaux, nous avons déterminé les propriétés générales, tant topologiques que métriques induites par la notion d'accessibilité, ainsi que les propriétés du spectre et de la fonction d'échelle correspondante, cf [2]. Ici encore, de nombreux problèmes restent ouverts: ainsi le spectre d'accessibilité de graphes de fonctions simples (fonctions de Weierstrass, ou trajectoires de mouvements browniens fractionnaires par exemple) ne sont encore que partiellement connus.

Dans [8], j'ai amélioré les résultats de [11] en obtenant la caractérisation exacte par ondelettes de la régularité  $T_u^p$ ; ce résultat était inattendu car une telle caractérisation n'existe pas pour le concept, pourtant plus simple, de régularité hölderienne. En approfondissant la compréhension de la différence entre ces deux situations, j'ai montré dans [9] comment toute notion de régularité ponctuelle dérive d'un espace fonctionnel "global", et quelles propriétés "naturelles" cet espace doit posséder pour que la notion de régularité ponctuelle correspondante soit caractérisable par ondelettes.

### Travaux ne relevant pas exclusivement de l'analyse multifractale

Suite aux travaux fondateurs d'Yves Meyer, on sait aujourd'hui que la plupart des espaces fonctionnels classiques (Sobolev, Hardy, Besov,...) ont une caractérisation portant sur les modules des coefficients d'ondelette, et on dispose d'une "presque caractérisation" pour les autres espaces ( $L^1$ ,  $L^\infty$ , BV,...). En parallèle, de nombreux travaux ont porté sur l'étude des histogrammes de coefficients d'ondelettes d'un signal ou d'une image. Un problème fondamental est donc de déterminer si l'on peut déduire de ces histogrammes une information effectivement plus riche sur une fonction  $f$  que celle fournie par son *domaine fonctionnel*, c'est-à-dire les espaces fonctionnels (par exemple, les espaces de Besov) auxquels elle

appartient; et, si c'est le cas, comment caractériser cette information. Dans [20], j'ai apporté une réponse positive à cette question: l'information supplémentaire fournie par les histogrammes de coefficients d'ondelette est entièrement décrite par une fonction croissante  $\nu_f$  qui est "intrinsèque" (c'est-à-dire ne dépend pas de la base d'ondelettes choisie), alors que la connaissance du domaine fonctionnel de  $f$  ne fournit que l'enveloppe concave de  $\nu_f$ . De plus, il est facile de construire en pratique des exemples très élémentaires où l'on constate une perte d'information importante si l'on se restreint au domaine fonctionnel, cf. [20, 24]. On peut alors construire de nouveaux espaces  $S_\nu$ , associés à chacune de ces fonctions croissantes  $\nu$ , et qui sont donc plus riches que les espaces fonctionnels classiques. J'ai continué l'étude de ces espaces en collaboration avec Jean-Marie Aubry, Françoise Bastin et Sophie Dispa dans [4], où nous avons étudié leurs propriétés topologiques très particulières.

Un autre point de vue qui fournit aussi une information plus riche que le domaine fonctionnel est de considérer les *espaces d'oscillation* (définis par des conditions  $l^p$  sur les coefficients dominants, déjà mentionnés plus haut, cf. [13, 23]); Le "lemme des grumeaux" montre que les espaces d'oscillation fournissent une information précise sur la répartition spatiale des grands coefficients d'ondelettes d'une fonction, information qui n'est pas contenue dans le domaine fonctionnel traditionnel. Ils permettent donc de décrire les corrélations entre les positions des grands coefficients, et cela en l'absence de tout modèle statistique donné a priori.

Dans [22], j'ai également étudié un type de fonctions particulières, les séries de Davenport, définies de la façon suivante: soit  $\{x\}$  la fonction "en dents de scie" définie par

$$\begin{aligned} \{x\} &= x - [x] - \frac{1}{2} & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \\ &= 0 & \text{else.} \end{aligned}$$

Les séries de Davenport sont de la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \{nx\}.$$

Riemann a étudié les premiers exemples de telles fonctions, puis Hecke a montré leur lien avec les séries de Dirichlet et l'approximation diophantienne; Davenport a renforcé la connexion avec la théorie analytique des nombres en montrant la pertinence des techniques de Vinogradov pour l'étude de leur convergence ponctuelle; plus récemment de la Bretèche et Tenenbaum ont testé sur la convergence ponctuelle de ces séries la technique de "p-sommabilité". J'ai déterminé leur régularités Sobolev, complété les cas connus de convergence ponctuelle (liés à des propriétés d'approximation diophantienne, ou de discrédance), et mis en évidence des lois du "tout ou rien" inattendues: par exemple, si l'on considère les deux espaces fonctionnels obtenus en prenant des conditions de type  $l^2$  à poids sur les coefficients de Fourier d'une part et les coefficients de Davenport d'autre part, alors, ou bien les espaces ainsi définis coïncident, ou bien leur intersection se réduit à la fonction nulle. Enfin, j'ai montré que, sous des hypothèses très générales sur la suite de coefficients, les séries de Davenport sont multifractales. Là encore, de nombreux problèmes restent ouverts; en particulier, il semble que des résultats plus précis d'analyse multifractale ne seraient possibles qu'au prix d'avancées profondes en approximation diophantienne.

Pour en savoir plus sur les questions ouvertes autour de l'analyse multifractale, le lecteur pourra consulter [19].

## Bibliographie (2000-2005)

- [1] *Multifractal processes with a most general multifractal spectrum* (en collaboration avec Antoine Ayache et Murad Taqqu) à paraître dans la Revista Matematica Iberoamericana
- [2] *Multifractal analysis of images : New connexions between analysis and geometry* (en collaboration avec Yanick Heurteaux), à paraître dans les Proceedings of the NATO-ASI Conference on Imaging for Detection and Identification (Springer).
- [3] *How smooth is almost every function in a Sobolev space?* (en collaboration avec Aurelia Fraysse) à paraître dans la Revista Matematica Iberoamericana
- [4] *The topology of the spaces  $S^\nu$*  (en collaboration Jean-Marie Aubry, Françoise Bastin et Sophie Dispa) à paraître dans le Journal of Mathematical Analysis and Applications
- [5] *Random wavelet series: Theory and applications* (en collaboration avec J.-M. Aubry), à paraître aux Annales de l'Université Blaise Pascal
- [6] *Wavelet leaders in multifractal analysis* (en collaboration avec Patrice Abry et Bruno Lashermes) A paraître dans "Wavelet analysis and Applications", dans la série Applied and Numerical Harmonic Analysis (Springer)
- [7] *Wavelet leaders based multifractal formalism: A comprehensive multifractal analysis of turbulent velocity* (en collaboration avec Patrice Abry, Stéphane Roux et Bruno Lashermes)
- [8] *Pointwise regularity associated with function spaces and multifractal analysis* Banach Center Pub. Vol. 72 Approximation and Probability, T. Figiel and A. Kamont Eds. (2006) pp. 93–110
- [9] *Wavelet Techniques for pointwise regularity*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Vol. 15 n. 1 pp. 3–33 (2006)
- [10] *The Sobolev embeddings are usually sharp* (en collaboration avec Aurelia Fraysse) Abstract and Applied Analysis Vol. 2005 Issue 4 pp. 437-448
- [11] *Wavelet analysis of fractal Boundaries, Part 1: Local regularity* (en collaboration avec C. Melot), Communications in Mathematical Physics Vol. 258 n. 3 pp. 513-539 (2005)
- [12] *Wavelet analysis of fractal Boundaries, Part 2: Multifractal formalism* (en collaboration avec C. Melot), Communications in Mathematical Physics Vol. 258 n. 3 pp. 541-565 (2005)
- [13] *Beyond Besov Spaces part 2: Oscillation spaces*, Constructive Approximation, Vol 21 n. 1 pp. 29-61. (2005)
- [14] *Some generic properties in analysis*, (en collaboration avec A. Fraysse et J.-P. Kahane) C.R.A.S. Vol. 340 Série 1, pp. 645-651 (2005).

- [15] *Contribution à l'étude des performances statistiques des estimateurs multifractals* (en collaboration avec Stéphane Roux, Bruno Lashermes et Patrice Abry), XXIème Colloque GRETSI 2005 Louvain-La-Neuve, Belgique.
- [16] *Wavelet leader based multifractal analysis* (en collaboration avec Patrice Abry et Bruno Lashermes), à paraître dans les proceedings de 2005 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing
- [17] *Revisiting scaling, multifractal and multiplicative cascades with the wavelet leader lens* (en collaboration avec Patrice Abry et Bruno Lashermes) In *Optic East, Wavelet applications in Industrial applications II* Vol. 5607 pp. 103-117 Philadelphia, USA (2004)
- [18] *Pointwise regularity criteria*, C.R.A.S. Vol. 339 Série 1, pp. 757-762 (2004).
- [19] *Multifractal functions: Recent advances and open problems*, Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, Vol. 73 pp. 129-153 (2004)
- [20] *Beyond Besov Spaces Part 1: Distributions of wavelet coefficients*, The Journal of Fourier Analysis and its Applications, Vol 10, n. 3 pp. 221-246 (2004)
- [21] *L'analyse multifractale des signaux* (en collaboration avec Alain Arneodo), "Images des Mathématiques 2004", pp. 7-14.
- [22] *On Davenport expansions: Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoit Mandelbrot*, M. Lapidus et M. van Frankenhuijsen Eds., Proceedings of Symposia in Pure Mathematics (AMS) Vol. 72 Part 1, pp. 273-303 (2004).
- [23] *Wavelet techniques in multifractal analysis*, Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoit Mandelbrot, M. Lapidus et M. van Frankenhuijsen Eds., Proceedings of Symposia in Pure Mathematics (AMS) Vol. 72 Part 2, pp. 91-151 (2004).
- [24] *Function spaces based on wavelet expansions*, Sampling, Wavelets and Tomography, J. Benedetto and A. Zayed eds. , Birkhäuser pp. 157–177 (2004).
- [25] *Random wavelet series* (en collaboration avec J-M. Aubry), Communications in Mathematical Physics, Vol. 227, p. 483-514 (2002)
- [26] *Méthodes d'ondelettes pour l'analyse multifractale de fonctions dans: Lois d'échelles et Fractales vol. 1.* (Eds: P. Abry, P. Goncalves et J. Lévy-Véhel, pp. 71–105 (2002)
- [27] *Perturbed sampling in satellite images and reconstruction algorithms* (en collaboration avec A. Almansa et B. Rougé, proceedings du congrès GRETSI 20001 on Signal and Image processing
- [28] *Estimates of the constants in generalized Ingham's inequality and applications to the control of the wave equation* (en collaboration avec S. Micu) Asymptotic Analysis Vol. 28, No.3-4, p. 181-214 (2001).

- [29] *Wavelets: Tools for Science and Technology*, (en collaboration avec Yves Meyer et Robert Ryan), SIAM, 2001.
- [30] *Construction of functions with prescribed Hölder and Chirps exponents*, Revista Matematica Iberoamericana Vol. 16 n. 2 p. 331-349 (2000)
- [31] *On the pointwise regularity of functions in critical Besov Spaces* (en collaboration avec Y. Meyer) Journal of Functional analysis Vol. 175 p. 415-434 (2000)
- [32] *On the Frisch-Parisi conjecture* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Vol. 79 n. 6 p. 525-552 (2000).
- [33] *Lacunary wavelet series*, Annals of Applied Probability. Vol. 10, No. 1, p. 313-329 (2000)
- [34] *Décompositions en ondelettes* “Developments of Mathematics 1950-2000” (J-P. Pier Ed.) Birkhauser, p. 609-634 (2000).
- [35] *Conjecture de Frisch et Parisi et généricité des fonctions multifractales*, C.R.A.S. Vol. 330 Série 1, pp. 265-270 (2000).