

Scandales isopérimétriques

Benoît R. Kloeckner

LAMA, Université Paris-Est Créteil

18 décembre 2015

Schéma général

Espace géométrique M

Schéma général

Espace géométrique M

Ensemble de formes $\ni \Omega$

Schéma général

Espace géométrique M

Ensemble de formes $\ni \Omega$

Périmètre \longleftrightarrow Volume
 $\text{per}(\Omega)$ $\text{vol}(\Omega)$

Schéma général

Espace géométrique M

Ensemble de formes $\ni \Omega$

$$\begin{array}{rcl} \text{Périmètre} & & \text{Volume} \\ \text{per}(\Omega) & \geq & F(\text{vol}(\Omega)) \end{array}$$

Plus grande fonction F possible : *profil isopérimétrique*.

Dans le plan

$$M = \mathbb{R}^2$$

Ω intérieur d'une courbe de Jordan

$\text{per}(\Omega)$: longueur de la courbe

$\text{vol}(\Omega)$: aire

$$\text{per}(\Omega)^2 \geq 4\pi \text{vol}(\Omega)$$

et le disque est l'unique cas d'égalité.

Dans le plan

$$M = \mathbb{R}^2$$

Ω intérieur d'une courbe de Jordan

$\text{per}(\Omega)$: longueur de la courbe

$\text{vol}(\Omega)$: aire

Théorème (date ?)

$$\text{per}(\Omega)^2 \geq 4\pi \text{vol}(\Omega)$$

et le disque est l'unique cas d'égalité.

Dans le plan

$$M = \mathbb{R}^2$$

Ω intérieur d'une courbe de Jordan

$\text{per}(\Omega)$: longueur de la courbe

$\text{vol}(\Omega)$: aire

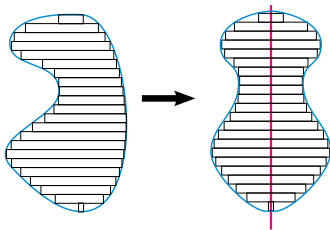
Théorème (Zenodorus II^e BC, Steiner, Weierstrass, ... XIX^e)

$$\text{per}(\Omega)^2 \geq 4\pi \text{vol}(\Omega)$$

et le disque est l'unique cas d'égalité.

Dans le plan : preuve par symétrisation

Idée de Steiner : symétriser par rapport à une droite diminue le périmètre sans changer l'aire.

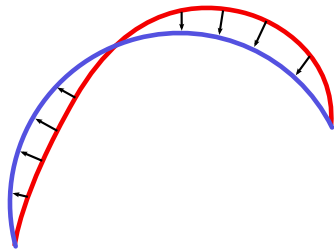


Un minimiseur doit donc être symétrique par rapport à un axe dans chaque direction.

Pour conclure il faut l'existence d'un minimiseur.

Dans le plan : preuve par calcul des variations

Idée de Weierstrass : on montre que si la courbure du bord n'est pas constante, on peut réduire infinitésimalement le périmètre sans changer le volume.



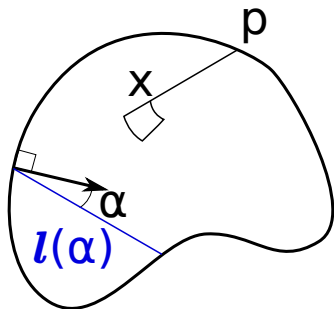
Un minimiseur doit donc avoir le bord de courbure constante.
Pour conclure il faut l'existence d'un minimiseur.

Dans le plan : preuve par relations géométriques

Idée de Chris Croke.

On a

$$V = \frac{1}{2\pi} \int \ell(\alpha) \cos \alpha \, d\alpha \, dp \quad (\text{Santaló})$$

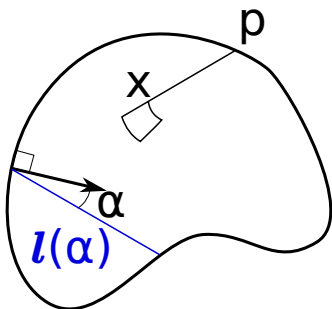


Dans le plan : preuve par relations géométriques

Idée de Chris Croke.

et

$$dx = dt \cdot t d\alpha \quad VP \geq \int \frac{\ell(\alpha)^2}{2} d\alpha dp$$



Dans le plan

$$2\pi V = \int \ell(\alpha) \cos \alpha \, d\alpha \, dp$$

$$2VP \geq \int \ell(\alpha)^2 \, d\alpha \, dp$$

$$4\pi^2 V^2 \leq \int \ell(\alpha)^2 \, d\alpha \, dp \int \cos^2(\alpha) \, d\alpha \, dp$$

$$\leq 2VP \frac{\pi}{2} P$$

$$4\pi V \leq P^2$$

Dans le plan

$$2\pi V = \int \ell(\alpha) \cos \alpha \, d\alpha \, dp$$

$$2VP \geq \int \ell(\alpha)^2 \, d\alpha \, dp$$

$$4\pi^2 V^2 \leq \int \ell(\alpha)^2 \, d\alpha \, dp \int \cos^2(\alpha) \, d\alpha \, dp$$

$$\leq 2VP \frac{\pi}{2} P$$

$$4\pi V \leq P^2$$

Dans le plan

$$2\pi V = \int \ell(\alpha) \cos \alpha \, d\alpha \, dp$$

$$2VP \geq \int \ell(\alpha)^2 \, d\alpha \, dp$$

$$4\pi^2 V^2 \leq \int \ell(\alpha)^2 \, d\alpha \, dp \int \cos^2(\alpha) \, d\alpha \, dp$$

$$\leq 2VP \frac{\pi}{2} P$$

$$4\pi V \leq P^2$$

Dans le plan

$$2\pi V = \int \ell(\alpha) \cos \alpha \, d\alpha \, dp$$

$$2VP \geq \int \ell(\alpha)^2 \, d\alpha \, dp$$

$$4\pi^2 V^2 \leq \int \ell(\alpha)^2 \, d\alpha \, dp \int \cos^2(\alpha) \, d\alpha \, dp$$

$$\leq 2VP \frac{\pi}{2} P$$

$$4\pi V \leq P^2$$

Dans le plan

$$2\pi V = \int \ell(\alpha) \cos \alpha \, d\alpha \, dp$$

$$2VP \geq \int \ell(\alpha)^2 \, d\alpha \, dp$$

$$4\pi^2 V^2 \leq \int \ell(\alpha)^2 \, d\alpha \, dp \int \cos^2(\alpha) \, d\alpha \, dp$$

$$\leq 2VP \frac{\pi}{2} P$$

$$4\pi V \leq P^2$$

Dans le plan

$$2\pi V = \int \ell(\alpha) \cos \alpha \, d\alpha \, dp$$

$$2VP \geq \int \ell(\alpha)^2 \, d\alpha \, dp$$

$$\begin{aligned} 4\pi^2 V^2 &\leq \int \ell(\alpha)^2 \, d\alpha \, dp \int \cos^2(\alpha) \, d\alpha \, dp \\ &\leq 2VP \frac{\pi}{2} P \end{aligned}$$

$$4\pi V \leq P^2$$

Dans l'espace euclidien

$$M = \mathbb{R}^n$$

Ω domaine (à préciser...)

$\text{per}(\Omega)$: volume de dimension $n - 1$ du bord (à préciser...)

$\text{vol}(\Omega)$: volume (mesure de Lebesgue)

$$\text{per}(\Omega)^n \geq \Gamma_n \text{vol}(\Omega)^{n-1}$$

et la boule est l'unique cas d'égalité.

Dans l'espace euclidien

$$M = \mathbb{R}^n$$

Ω domaine (à préciser...)

$\text{per}(\Omega)$: volume de dimension $n - 1$ du bord (à préciser...)

$\text{vol}(\Omega)$: volume (mesure de Lebesgue)

Théorème (date ?)

$$\text{per}(\Omega)^n \geq \Gamma_n \text{vol}(\Omega)^{n-1}$$

et la boule est l'unique cas d'égalité.

Dans l'espace euclidien

$$M = \mathbb{R}^n$$

Ω domaine (à préciser...)

$\text{per}(\Omega)$: volume de dimension $n - 1$ du bord (à préciser...)

$\text{vol}(\Omega)$: volume (mesure de Lebesgue)

Théorème (Schwarz XIX^e, De Giorgi, ... XX^e)

$$\text{per}(\Omega)^n \geq \Gamma_n \text{vol}(\Omega)^{n-1}$$

et la boule est l'unique cas d'égalité.

Dans l'espace Euclidien : démonstrations

Beaucoup de démonstration de dimension 2 ne s'étendent pas.

Dans l'espace Euclidien : démonstrations

Beaucoup de démonstration de dimension 2 ne s'étendent pas.

La **symétrisation** de Steiner s'étend, mais l'existence d'un minimiseur est ardue.

Dans l'espace Euclidien : démonstrations

Beaucoup de démonstration de dimension 2 ne s'étendent pas.

La **symétrisation** de Steiner s'étend, mais l'existence d'un minimiseur est ardue.

Le **calcul des variations** donne la courbure moyenne de $\partial\Omega$ constante, insuffisant.

Dans l'espace Euclidien : démonstrations

Beaucoup de démonstration de dimension 2 ne s'étendent pas.

La **symétrisation** de Steiner s'étend, mais l'existence d'un minimiseur est ardue.

Le **calcul des variations** donne la courbure moyenne de $\partial\Omega$ constante, insuffisant.

La démonstration par **relations géométriques** de Croke nécessite un miracle : il y a exactement une inégalité de Hölder reliant

$$V \propto \int \ell(\alpha) \cos \alpha \quad \text{et} \quad VP \propto \int \ell(\alpha)^n$$

avec égalité pour $\ell(\alpha) \propto \cos^{\frac{1}{n-1}} \alpha$ qui ne correspond à la boule que pour $n = 2$.

Dans l'espace Euclidien : preuve par transport optimal

Démonstration de Knothe / Gromov / McCann / Trudinger :
on construit une application $T : \Omega \rightarrow B(r)$ boule de même volume
avec

$$\frac{1}{n} \nabla \cdot T \geq \det(dT)^{\frac{1}{n}} \equiv 1.$$

Alors :

$$\text{vol}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \leq \frac{1}{n} \int_{\Omega} \nabla \cdot T = \frac{1}{n} \int_{\partial\Omega} T \cdot N \leq \frac{r}{n} \text{per}(\Omega)$$

et on conclut car

$$\text{per}(\Omega) \geq \frac{n}{r} \text{vol}(\Omega) = \frac{n}{r} \text{vol}(B(r)) = \text{per}(B(r)).$$

Dans l'espace Euclidien : preuve par transport optimal

Démonstration de Knothe / Gromov / McCann / Trudinger :
on construit une application $T : \Omega \rightarrow B(r)$ boule de même volume
avec

$$\frac{1}{n} \nabla \cdot T \geq \det(dT)^{\frac{1}{n}} \equiv 1.$$

Alors :

$$\text{vol}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \leq \frac{1}{n} \int_{\Omega} \nabla \cdot T = \frac{1}{n} \int_{\partial\Omega} T \cdot N \leq \frac{r}{n} \text{per}(\Omega)$$

et on conclut car

$$\text{per}(\Omega) \geq \frac{n}{r} \text{vol}(\Omega) = \frac{n}{r} \text{vol}(B(r)) = \text{per}(B(r)).$$

Dans l'espace Euclidien : preuve par transport optimal

Démonstration de Knothe / Gromov / McCann / Trudinger :
on construit une application $T : \Omega \rightarrow B(r)$ boule de même volume
avec

$$\frac{1}{n} \nabla \cdot T \geq \det(dT)^{\frac{1}{n}} \equiv 1.$$

Alors :

$$\text{vol}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \leq \frac{1}{n} \int_{\Omega} \nabla \cdot T = \frac{1}{n} \int_{\partial\Omega} T \cdot N \leq \frac{r}{n} \text{per}(\Omega)$$

et on conclut car

$$\text{per}(\Omega) \geq \frac{n}{r} \text{vol}(\Omega) = \frac{n}{r} \text{vol}(B(r)) = \text{per}(B(r)).$$

Dans l'espace Euclidien : preuve par transport optimal

Démonstration de Knothe / Gromov / McCann / Trudinger :
on construit une application $T : \Omega \rightarrow B(r)$ boule de même volume
avec

$$\frac{1}{n} \nabla \cdot T \geq \det(dT)^{\frac{1}{n}} \equiv 1.$$

Alors :

$$\text{vol}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \leq \frac{1}{n} \int_{\Omega} \nabla \cdot T = \frac{1}{n} \int_{\partial\Omega} T \cdot N \leq \frac{r}{n} \text{per}(\Omega)$$

et on conclut car

$$\text{per}(\Omega) \geq \frac{n}{r} \text{vol}(\Omega) = \frac{n}{r} \text{vol}(B(r)) = \text{per}(B(r)).$$

Dans l'espace Euclidien : preuve par transport optimal

Démonstration de Knothe / Gromov / McCann / Trudinger :
on construit une application $T : \Omega \rightarrow B(r)$ boule de même volume
avec

$$\frac{1}{n} \nabla \cdot T \geq \det(dT)^{\frac{1}{n}} \equiv 1.$$

Alors :

$$\text{vol}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \leq \frac{1}{n} \int_{\Omega} \nabla \cdot T = \frac{1}{n} \int_{\partial\Omega} T \cdot N \leq \frac{r}{n} \text{per}(\Omega)$$

et on conclut car

$$\text{per}(\Omega) \geq \frac{n}{r} \text{vol}(\Omega) = \frac{n}{r} \text{vol}(B(r)) = \text{per}(B(r)).$$

Dans l'espace Euclidien : preuve par transport optimal

Démonstration de Knothe / Gromov / McCann / Trudinger :
on construit une application $T : \Omega \rightarrow B(r)$ boule **de même volume**
avec

$$\frac{1}{n} \nabla \cdot T \geq \det(dT)^{\frac{1}{n}} \equiv 1.$$

Alors :

$$\text{vol}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \leq \frac{1}{n} \int_{\Omega} \nabla \cdot T = \frac{1}{n} \int_{\partial\Omega} T \cdot N \leq \frac{r}{n} \text{per}(\Omega)$$

et on conclut car

$$\text{per}(\Omega) \geq \frac{n}{r} \text{vol}(\Omega) = \frac{n}{r} \text{vol}(B(r)) = \text{per}(B(r)).$$

Dans l'espace Euclidien : preuve par transport optimal

Démonstration de Knothe / Gromov / McCann / Trudinger :
on construit une application $T : \Omega \rightarrow B(r)$ boule de même volume
avec

$$\frac{1}{n} \nabla \cdot T \geq \det(dT)^{\frac{1}{n}} \equiv 1.$$

Alors :

$$\text{vol}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \leq \frac{1}{n} \int_{\Omega} \nabla \cdot T = \frac{1}{n} \int_{\partial\Omega} T \cdot N \leq \frac{r}{n} \text{per}(\Omega)$$

et on conclut car

$$\text{per}(\Omega) \geq \frac{n}{r} \text{vol}(\Omega) = \frac{n}{r} \text{vol}(B(r)) = \text{per}(B(r)).$$

Dans l'espace Euclidien : preuve par transport optimal

Démonstration de Knothe / Gromov / McCann / Trudinger :
on construit une application $T : \Omega \rightarrow B(r)$ boule de même volume
avec

$$\frac{1}{n} \nabla \cdot T \geq \det(dT)^{\frac{1}{n}} \equiv 1.$$

Alors :

$$\text{vol}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \leq \frac{1}{n} \int_{\Omega} \nabla \cdot T = \frac{1}{n} \int_{\partial\Omega} T \cdot N \leq \frac{r}{n} \text{per}(\Omega)$$

et on conclut car

$$\text{per}(\Omega) \geq \frac{n}{r} \text{vol}(\Omega) = \frac{n}{r} \text{vol}(B(r)) = \text{per}(B(r)).$$

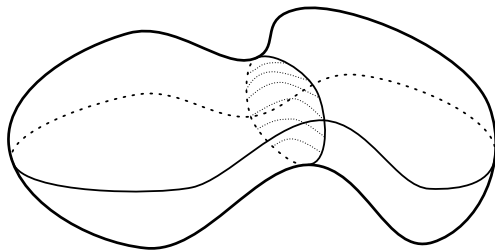
Doubles bulles de savon

$$M = \mathbb{R}^3$$

Ω deux composantes bornées délimitée par une surface

$\text{per}(\Omega)$: aire de la surface

$\text{vols}(\Omega) = (v_1, v_2)$: volumes des composantes



Doubles bulles de savon

$$M = \mathbb{R}^3$$

Ω deux composantes bornées délimitée par une surface

$\text{per}(\Omega)$: aire de la surface

$\text{vols}(\Omega) = (v_1, v_2)$: volumes des composantes

À v_1, v_2 fixés $\text{per}(\Omega)$ est minimisé par la *double bulle standard*.

Double bulle standard : trois calottes sphériques collées le long d'un cercle avec angles dièdres égaux

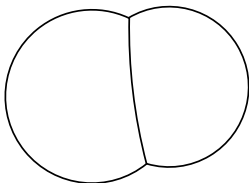
Doubles bulles de savon

$$M = \mathbb{R}^3$$

Ω deux composantes bornées délimitée par une surface

$\text{per}(\Omega)$: aire de la surface

$\text{vols}(\Omega) = (v_1, v_2)$: volumes des composantes



Double bulle standard : trois calottes sphériques collées le long d'un cercle avec angles dièdres égaux.

Doubles bulles de savon

$$M = \mathbb{R}^3$$

Ω deux composantes bornées délimitée par une surface

$\text{per}(\Omega)$: aire de la surface

$\text{vols}(\Omega) = (v_1, v_2)$: volumes des composantes

Théorème (Hass-Schlafly 2000, Hutchings-Morgan-Ritoré-Ros 2002)

À v_1, v_2 fixés $\text{per}(\Omega)$ est minimisé par la *double bulle standard*.

Double bulle standard : trois calottes sphériques collées le long d'un cercle avec angles dièdres égaux

Double bulles : démonstration

La démonstration mélange l'existence et la régularité d'un minimiseur Ω_0 (Almgren-Taylor), des arguments géométriques et analytiques réduisant le problème, et des calculs numériques.

F. Morgan / White on montré qu'un minimiseur doit être invariant par les rotations d'un axe. En effet :

- il existe une famille à un paramètre d'hyperplans bisectant les deux volumes ;
- si H bissecte les deux volumes, le symétrisé d'une moitié de Ω_0 est encore minimisant, donc Ω_0 est orthogonal à H ;
- les hyperplans ont un axe commun qui est un axe de rotation.

Bulles multiples

Dans \mathbb{R}^3 , la surface d'aire minimale entourant trois composantes bornées de même volume est une *triple bulle standard*.

Triple bulle standard : union de six calottes sphériques se rencontrant suivant des angles dièdres de $2\pi/3$.

Bulles multiples

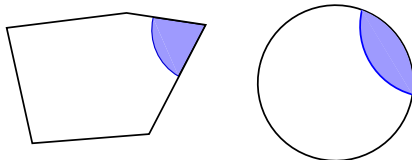
Conjecture

Dans \mathbb{R}^3 , la surface d'aire minimale entourant trois composantes bornées de même volume est une *triple bulle standard*.

Triple bulle standard : union de six calottes sphériques se rencontrant suivant des angles dièdres de $2\pi/3$.

Dans un convexe

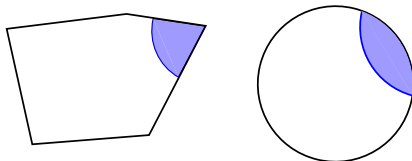
Soit C un convexe compact de \mathbb{R}^n et B la boule de même volume. On note $I_C(\lambda)$ la plus petite aire d'une hypersurface séparant C en deux parts, l'une de volume $\lambda \text{vol}(C)$.



$$I_C \leq I_B$$

Dans un convexe

Soit C un convexe compact de \mathbb{R}^n et B la boule de même volume. On note $I_C(\lambda)$ la plus petite aire d'une hypersurface séparant C en deux parts, l'une de volume $\lambda \text{vol}(C)$.



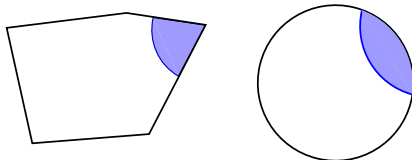
Conjecture

$$I_C \leq I_B$$

Cette question est ouverte même pour $n = 2$!

Dans un convexe

Soit C un convexe compact de \mathbb{R}^n et B la boule de même volume. On note $I_C(\lambda)$ la plus petite aire d'une hypersurface séparant C en deux parts, l'une de volume $\lambda \text{vol}(C)$.



Esposito-Ferone-Kawohl-Nitsch-Trombetti 2012 :

$$I_C(1/2) \leq I_B(1/2) \quad \text{quand } n = 2.$$

Dans les cubes

Quand C est un cube de \mathbb{R}^3 , les hypersurfaces réalisant I_C sont des huitièmes de sphères, des quarts de cylindres ou des plans.

Dans les cubes

Conjecture

Quand C est un cube de \mathbb{R}^3 , les hypersurfaces réalisant I_C sont des huitièmes de sphères, des quarts de cylindres ou des plans.

C'est-à-dire : on ne connaît pas de façon sûre le profil isopérimétrique du tore plat $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$.

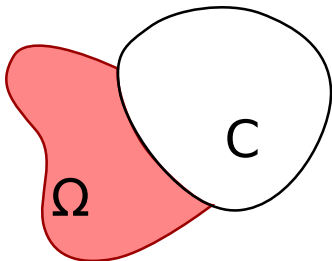
À l'extérieur d'un convexe

$M = \mathbb{R}^n \setminus C$ avec C convexe fermé

Ω un domaine

$\text{per}_{\text{rel}}(\Omega)$: volume de dimension $n - 1$ de $\partial\Omega \setminus C$

$\text{vol}_{\text{rel}}(\Omega)$: volume de $\Omega \setminus C$.



À l'extérieur d'un convexe

$M = \mathbb{R}^n \setminus C$ avec C convexe fermé

Ω un domaine

$\text{per}_{\text{rel}}(\Omega)$: volume de dimension $n - 1$ de $\partial\Omega \setminus C$

$\text{vol}_{\text{rel}}(\Omega)$: volume de $\Omega \setminus C$.

$$\text{per}_{\text{rel}}(\Omega)^n \geq \frac{1}{2} \Gamma_n \text{vol}_{\text{rel}}(\Omega)^{n-1}$$

En cas d'égalité, Ω est une demi-boule appuyée sur une face plate de C .

À l'extérieur d'un convexe

$M = \mathbb{R}^n \setminus C$ avec C convexe fermé

Ω un domaine

$\text{per}_{\text{rel}}(\Omega)$: volume de dimension $n - 1$ de $\partial\Omega \setminus C$

$\text{vol}_{\text{rel}}(\Omega)$: volume de $\Omega \setminus C$.

Théorème (Choe-Ghomi-Ritoré 2007)

$$\text{per}_{\text{rel}}(\Omega)^n \geq \frac{1}{2} \Gamma_n \text{vol}_{\text{rel}}(\Omega)^{n-1}$$

En cas d'égalité, Ω est une demi-boule appuyée sur une face plate de C .

À l'extérieur d'un convexe : démonstration

Problème isopérimétrique *relatif* à C convexe dans \mathbb{R}^n , de profil noté I^C .

- Le cas où $C = E_+$ est un demi-espace s'obtient par réflexion ;
- on montre qu'il y a un minimiseur Ω_0 , dont la courbure moyenne est constante ;
- la courbure moyenne de $\partial\Omega_0$ est plus grande que celle de l'hémisphère de même $(n - 1)$ -volume ;
- on déduit $(I^C)' \geq (I^{E_+})'$ puis $I^C \geq I^{E_+}$.

Variétés à courbure constante

$$M = \begin{cases} \mathbb{RH}_{\kappa}^n & \text{espace hyperbolique à courbure } \kappa < 0 \text{ ou} \\ \mathbb{S}_{\kappa}^n & \text{sphère à courbure } \kappa > 0 \end{cases}$$

Ω un domaine

$\text{per}(\Omega)$ volume de dimension $n - 1$ de $\partial\Omega$

$\text{vol}(\Omega)$ volume de Ω .

$$\text{per}(\Omega) \geq I_{\kappa}^n(\text{vol}(\Omega))$$

et la boule est l'unique cas d'égalité.

Variétés à courbure constante

$$M = \begin{cases} \mathbb{RH}_{\kappa}^n & \text{espace hyperbolique à courbure } \kappa < 0 \text{ ou} \\ \mathbb{S}_{\kappa}^n & \text{sphère à courbure } \kappa > 0 \end{cases}$$

Ω un domaine

$\text{per}(\Omega)$ volume de dimension $n - 1$ de $\partial\Omega$

$\text{vol}(\Omega)$ volume de Ω .

Théorème (Schmidt, années 40)

$$\text{per}(\Omega) \geq I_{\kappa}^n(\text{vol}(\Omega))$$

et la boule est l'unique cas d'égalité.

Variétés à courbure constante : démonstrations

Seules certaines démonstrations euclidiennes s'adaptent : arguments de réflexion.

En particulier la démonstration de Knothe / Gromov / McCann / Trudinger n'a pas de contrepartie connue dans $\mathbb{R}H^n$, S^n .

L'espace hyperbolique complexe

$\mathbb{C}H^m$: boule unité de \mathbb{C}^m , munie d'une métrique naturelle (invariante par les transformations biholomorphes).

Il est *isotrope* : tous les points et toutes les directions jouent le même rôle.

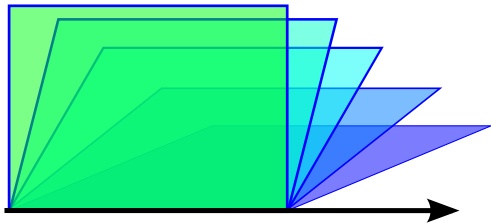
L'espace hyperbolique complexe

$\mathbb{C}\mathbb{H}^m$: boule unité de \mathbb{C}^m , munie d'une métrique naturelle (invariante par les transformations biholomorphes).

Il est *isotrope* : tous les points et toutes les directions jouent le même rôle.

$\forall (x, u), (y, v) \in T\mathbb{C}\mathbb{H}^m :$

$\exists \varphi$ isométrie t.q. $\varphi(x) = y$ et $D\varphi_x(u) = v$.



L'espace hyperbolique complexe

$\mathbb{C}H^m$: boule unité de \mathbb{C}^m , munie d'une métrique naturelle (invariante par les transformations biholomorphes).

Il est *isotrope* : tous les points et toutes les directions jouent le même rôle.

Les boules de $\mathbb{C}H^n$ sont optimales pour le problème isopérimétrique.

L'espace hyperbolique complexe

$\mathbb{C}H^m$: boule unité de \mathbb{C}^m , munie d'une métrique naturelle (invariante par les transformations biholomorphes).

Il est *isotrope* : tous les points et toutes les directions jouent le même rôle.

Conjecture

Les boules de $\mathbb{C}H^n$ sont optimales pour le problème isopérimétrique.

Variétés à courbure constante : comparaison

$$M = \begin{cases} \mathbb{RH}_\kappa^n & \text{espace hyperbolique à courbure } \kappa < 0 \text{ ou} \\ \mathbb{S}_\kappa^n & \text{sphère à courbure } \kappa > 0 \end{cases}$$

Ω un domaine

$\text{per}(\Omega)$ volume de dimension $n - 1$ de $\partial\Omega$

$\text{vol}(\Omega)$ volume de Ω .

Théorème (Schmidt, années 40)

$$\text{per}(\Omega) \geq I_\kappa^n(\text{vol}(\Omega))$$

et la boule est l'unique cas d'égalité.

À n et v fixés, $\kappa \mapsto I_\kappa^n(v)$ est décroissante.

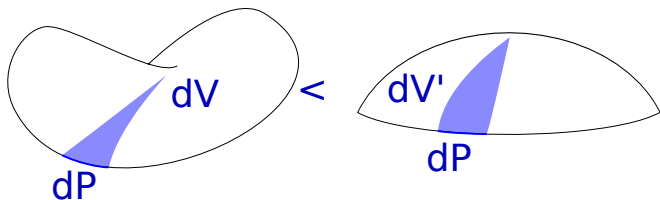
Variétés à courbure constante : comparaison

$$M = \begin{cases} \mathbb{RH}_\kappa^n & \text{espace hyperbolique à courbure } \kappa < 0 \text{ ou} \\ \mathbb{S}_\kappa^n & \text{sphère à courbure } \kappa > 0 \end{cases}$$

Ω un domaine

$\text{per}(\Omega)$ volume de dimension $n - 1$ de $\partial\Omega$

$\text{vol}(\Omega)$ volume de Ω .



À n et v fixés, $\kappa \mapsto I_\kappa^n(v)$ est décroissante.

Variétés à courbure majorée

M variété Riemannienne de dimension n à courbure $K \leq \kappa$

Ω un domaine

$\text{per}(\Omega)$ volume de dimension $n - 1$ de $\partial\Omega$

$\text{vol}(\Omega)$ volume de Ω

Il faut des hypothèses pour dire quelque chose d'intéressant !

Variétés à courbure majorée

M variété Riemannienne de dimension n à courbure $K \leq \kappa$

Ω un domaine

$\text{per}(\Omega)$ volume de dimension $n - 1$ de $\partial\Omega$

$\text{vol}(\Omega)$ volume de Ω

Si M est simplement connexe et $K \leq \kappa \leq 0$, alors

$$\text{vol}(\partial\Omega) \geq I_{\kappa}^n(\text{vol}(\Omega)).$$

Variétés à courbure majorée

M variété Riemannienne de dimension n à courbure $K \leq \kappa$

Ω un domaine

$\text{per}(\Omega)$ volume de dimension $n - 1$ de $\partial\Omega$

$\text{vol}(\Omega)$ volume de Ω

Conjecture (Gromov, Aubin, ...)

Si M est simplement connexe et $K \leq \kappa \leq 0$, alors

$$\text{vol}(\partial\Omega) \geq I_{\kappa}^n(\text{vol}(\Omega)).$$

Variétés à courbure majorée

M variété Riemannienne de dimension n à courbure $K \leq \kappa$

Ω un domaine

$\text{per}(\Omega)$ volume de dimension $n - 1$ de $\partial\Omega$

$\text{vol}(\Omega)$ volume de Ω

Théorème (Weil 1926)

Si $n = 2$, $\kappa = 0$ et Ω est topologiquement un disque,

$$\text{per}(\Omega)^2 \geq 4\pi \text{vol}(\Omega)$$

avec égalité si et seulement si Ω est un disque rond et plat.

Voir aussi Beckenbach and Radó 1933, Bol 1941 ($\kappa < 0$)

Variétés à courbure majorée

M variété Riemannienne de dimension n à courbure $K \leq \kappa$

Ω un domaine

$\text{per}(\Omega)$ volume de dimension $n - 1$ de $\partial\Omega$

$\text{vol}(\Omega)$ volume de Ω

Théorème (Croke 1984)

Si $n = 4$, $\kappa = 0$ et M simplement connexe,

$$\text{per}(\Omega)^4 \geq \Gamma_4 \text{vol}(\Omega)^3$$

avec égalité si et seulement si Ω est une boule ronde et plate.

Variétés à courbure majorée

M variété Riemannienne de dimension n à courbure $K \leq \kappa$

Ω un domaine

$\text{per}(\Omega)$ volume de dimension $n - 1$ de $\partial\Omega$

$\text{vol}(\Omega)$ volume de Ω

Théorème (Kleiner 1992)

Si $n = 3$, $\kappa < 0$ et M simplement connexe,

$$\text{per}(\Omega) \geq I_{\kappa}^3(\text{vol}(\Omega))$$

avec égalité si et seulement si Ω est une boule ronde à courbure constante κ .

Variétés à courbure majorée

M variété Riemannienne de dimension n à courbure $K \leq \kappa$

Ω un domaine

$\text{per}(\Omega)$ volume de dimension $n - 1$ de $\partial\Omega$

$\text{vol}(\Omega)$ volume de Ω

Théorème (K.-Kuperberg)

Si $\kappa < 0$ et M simplement connexe et

$n = 2$ ou $n = 4$ et Ω est assez petit,

$$\text{per}(\Omega) \geq I_{\kappa}^n(\text{vol}(\Omega))$$

avec égalité si et seulement si Ω est une boule ronde à courbure constante κ .

Variétés à courbure majorée

M variété Riemannienne de dimension n à courbure $K \leq \kappa$

Ω un domaine

$\text{per}(\Omega)$ volume de dimension $n - 1$ de $\partial\Omega$

$\text{vol}(\Omega)$ volume de Ω

Théorème (K.-Kuperberg)

Si $n = 2$ ou 4 , $\kappa > 0$ et Ω contient au plus une géodésique entre deux points quelconques,

$$\text{per}(\Omega) \geq I_{\kappa}^n(\text{vol}(\Omega))$$

avec égalité si et seulement si Ω est une boule ronde à courbure constante.

Variétés à courbure majorée

M variété Riemannienne de dimension n à courbure $K \leq \kappa$

Ω un domaine

$\text{per}(\Omega)$ volume de dimension $n - 1$ de $\partial\Omega$

$\text{vol}(\Omega)$ volume de Ω

Théorème (K.-Kuperberg)

Il existe des métriques riemanniennes sur B^3 de courbure ≤ -1 , de volume arbitrairement grand et de périmètre arbitrairement petit.

Variétés à courbure majorée : démonstrations

- Cas $n = 2$: nombreuses preuves ; p. ex. la démonstration donnée pour le plan (Croke) ;
- cas $n = 3$: semblable au complémentaire d'un convexe ;
- cas $n = 4$: démonstration de Croke pour $\kappa = 0$; utilisation de programmation linéaire pour $\kappa \neq 0$.

Variétés à courbure majorée : conjecture générale

La version la plus générale serait :

Conjecture

Toute variété à bord Ω avec au plus une géodésique entre deux points quelconques, dont la courbure est majorée par $\kappa \in \mathbb{R}$, vérifie $\text{vol}(\partial\Omega) \geq I_{\kappa}^n(\text{vol}(\Omega))$.

Elle est complètement ouverte en dimension ≥ 5 même pour $\kappa = 0$, le cas $n = 3, \kappa > 0$ n'a pas été vraiment considéré.