Sur les variétés complexes à bord qui ont beaucoup de symétries

Benoît Kloeckner

29 septembre 2007

Sommaire

Sommaire

Sommaire

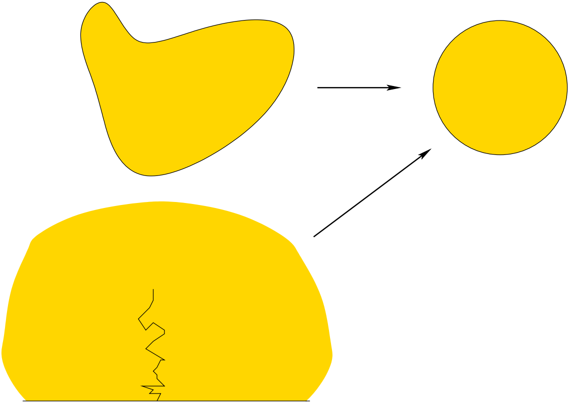
Le théorème de représentation de Riemann

Théorème (Riemann 1851 – Carathéodory 1912 – ...)

Si D est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ qui n'est pas $\mathbb{C}$ lui-même, alors il est biholomorphe au disque unité.

$$D \overset{\text{hol}}{\simeq} B^2 = \{|z| < 1\}$$

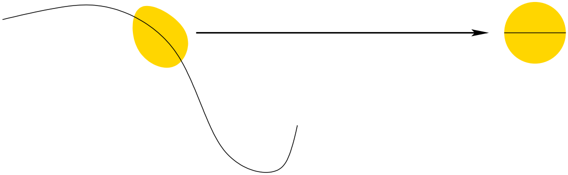
Exemples



Un résultat plus simple

Théorème

Toute courbe analytique réelle de $\mathbb{C}$ est localement biholomorphe à un morceau de droite.



La découverte de Poincaré

Théorème (Poincaré)

Le bidisque $B^2 \times B^2$ et la boule unité de $\mathbb{C}^2$ ne sont pas biholomorphes.

$$B^{2\times 2} = \{|z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$$

$$B^2 \times B^2 = \{|z_1| < 1, |z_2| < 1\}$$

Sommaire

L'opérateur complexe

Opérateur complexe J :

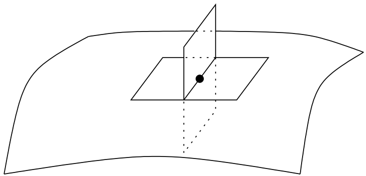
$$\begin{array}{rcl} T\mathbb{C}^2 & \longrightarrow & T\mathbb{C}^2 \\ (x, v) & \longmapsto & (x, iv) \end{array}$$

En tout point, $J_x^2 = -\mathrm{Id}$.

Hypersurfaces

Une hypersurface réelle $H \subset \mathbb{C}^2$ est munie

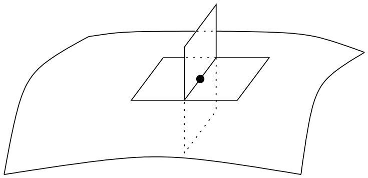
- d'un champ d'hyperplans $\xi = TH \cap J(TH)$



Hypersurfaces

Une hypersurface réelle $H \subset \mathbb{C}^2$ est munie

- d'un champ d'hyperplans $\xi = TH \cap J(TH)$
- d'un opérateur complexe $J : \xi \to \xi$



Variétés CR

Définition

Une structure CR sur une variété M de dimension 3 est la donnée

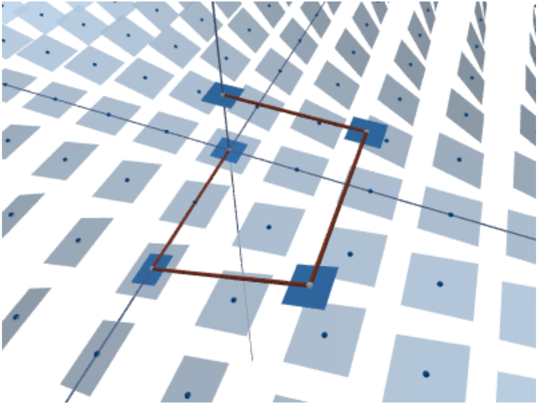
- *d'un champ d'hyperplans $\xi \subset TM$*
- *d'un opérateur complexe $J : \xi \to \xi$*

Les automorphismes d'un variété CR sont les difféomorphismes qui respectent ξ et J. On note leur groupe $\mathrm{Aut}(M)$. Ce sont les symétries de la structure.

Forme de Levi

Forme de Levi associée à une 1-forme θ définissant ξ

$$L_x(V) = -\theta([V, JV]) \qquad \forall V \in \xi_x$$



Des géométries différentes

Signature de L	La variété est dite	ξ induit
nulle	Levi-plate	un feuilletage en surfaces de Riemann
définie	strictement pseudoconvexe	une structure de contact

Exemples

Un hyperplan de la forme $\{\mathrm{Im}\, z_2 = 0\}$ est Levi-plat.
La sphère standard est strictement pseudo-convexe.

$$S^3 = \{|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

Sommaire

Sommaire

Variétés complexes

Une variété complexe est une variété X dont :

- les cartes sont à valeur dans $\mathbb{C}$;
- les changement de carte sont biholomorphes.

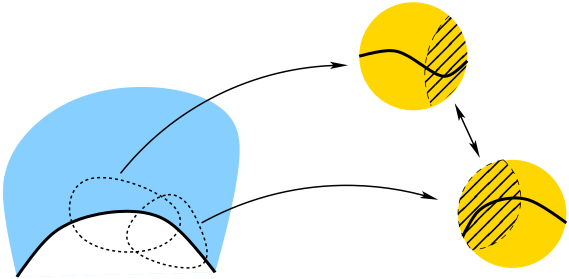
Elle hérite d'un opérateur complexe J.

Automorphismes

Un automorphisme de X est un difféoméorphisme qui est un biholomorphisme lu dans les cartes, ou encore qui préserve l'opérateur complexe.
On note leur groupe $\mathrm{Aut}(X)$.

Variétés complexe à bord

Dans le cas d'une variété complexe à bord, on demande que les changements de carte au bord se prolongent en biholomorphismes dans un voisinage.



Automorphismes des variétés à bord

Les automorphismes d'une variété complexe à bord X sont les difféomorphismes qui sont biholomorphes lus dans les cartes. On a :

$$\mathrm{Aut}(X) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\partial X)$$

Notons que $\mathrm{int}(X)$ porte une structure complexe et ∂X une structure CR.

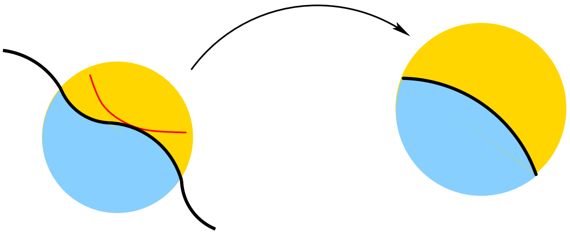
Sommaire

Côtés d'une hypersurface

Proposition

Soit H une hypersurface strictement pseudo-convexe de $\mathbb{C}^2$. Localement, exactement un des côtés de H est biholomorphe à un domaine affinement convexe de $\mathbb{C}^2$.

On l'appelle le côté convexe de H, l'autre en étant le côté concave.



Convexité et concavité des variétés

Si ∂X est connexe et strictement pseudo-convexe, on dit que X est à bord convexe ou concave suivant de quel côté de son bord il se trouve.

Exemples

Par exemple, dans $\mathbb{C}P^2$:

- l'adhérence de la boule

$$B^{2\times 2} = \{|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_0|^2\}$$

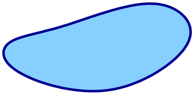
  est une variété complexe à bord strictement pseudoconvexe ;
- le plan projectif privé de la boule $\mathbb{C}P^2 \setminus B^{2\times 2}$ est une variété à bord strictement pseudo-concave ;

et tous deux ont pour bord la boule standard

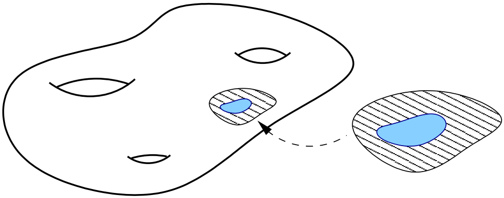
$$S^3 = \{|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_0|^2\}.$$

Exemples

D domaine de $\mathbb{C}^2$ à bord lisse et strictement pseudo-convexe



- $\overline{D}$ est une variété à bord convexe ;
- on obtient des variétés à bord concave en perçant n'importe quelle variété complexe sans bord.



Sommaire

Sommaire

Le théorème de Wong

Théorème (Wong 1977)

Soit D un domaine ouvert de $\mathbb{C}^2$ à bord lisse et strictement pseudo-convexe. Si $\mathrm{Aut}(D)$ est non compact, alors D est biholomorphe à la boule.

Ce théorème est vrai en dimension n, et a été amélioré (entre autres) par Rosay et Pinčuk.

Le cas des variétés

Théorème

Soit X une variété complexe à bord telle que $\mathrm{Aut}(X)$ *est non compact et l'application* $\mathrm{Aut}(X) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\partial X)$ *est propre. Alors :*

- *Si X est à bord strictement pseudo-convexe, $X \overset{hol}{\simeq} \overline{B}^{2\times 2}$.*
- *Si X est à bord strictement pseudo-concave, $X \overset{mér}{\simeq} \mathbb{C}\mathrm{P}^2 \setminus B^{2\times 2}$.*

Sommaire

Un résultat essentiel

Théorème (Webster–Schoen)

La seule variété CR strictement pseudoconvexe et compacte dont le groupe d'automorphisme est non compact est la sphère standard.

Les exemples de McMullen

McMullen a exhibé des surfaces complexes possédant un automorphisme qui possède :

1. de l'entropie topologique ;
2. un domaine de Siegel.

Or 1 implique que cet automorphisme engendre un groupe non compact, et 2 signifie qu'il est conjugué à une rotation au voisinage d'un point fixe.
En enlevant une boule dans le domaine de Siegel, on obtient un contre-exemple au théorème précédent sans l'hypothèse de propreté.

Principe de la démonstration (I)

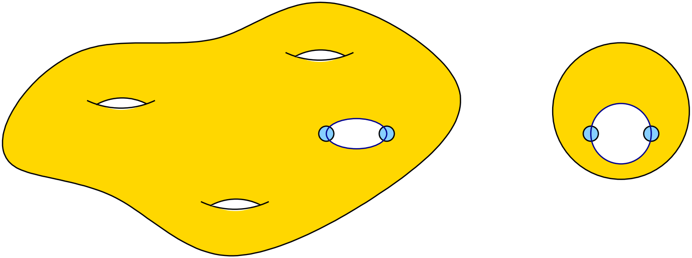
- Sous-groupes purement elliptiques : toute la non-compacité de F est contenue dans un élément.

Principe de la démonstration (I)

- Sous-groupes purement elliptiques : toute la non-compacité de F est contenue dans un élément.
- Étude de l'action des paraboliques et hyperboliques sur $\mathbb{C}P^2$.

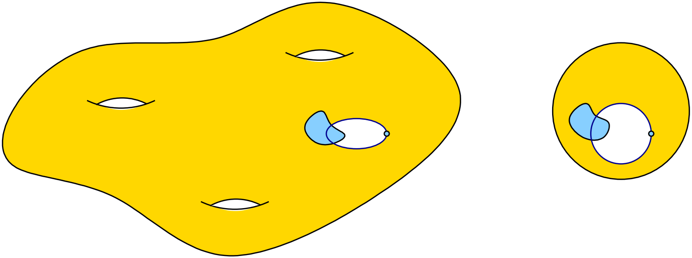
Principe de la démonstration (II)

Extension de la conjugaison locale entre le remplissage et le modèle.



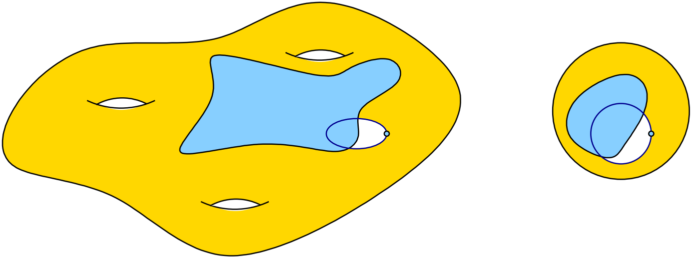
Principe de la démonstration (II)

Extension de la conjugaison locale entre le remplissage et le modèle.



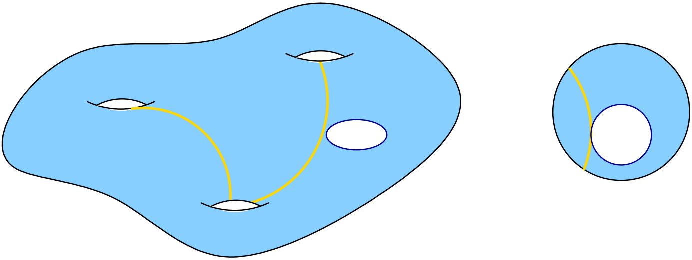
Principe de la démonstration (II)

Extension de la conjugaison locale entre le remplissage et le modèle.



Principe de la démonstration (II)

Extension de la conjugaison locale entre le remplissage et le modèle.



Principe de la démonstration (III)

On utilise la conjugaison et la connaissance du modèle pour :

- se ramener aux surfaces rationnelles ;

Principe de la démonstration (III)

On utilise la conjugaison et la connaissance du modèle pour :

- se ramener aux surfaces rationnelles ;
- contracter les courbes exceptionnelles ;

Principe de la démonstration (III)

On utilise la conjugaison et la connaissance du modèle pour :

- se ramener aux surfaces rationnelles ;
- contracter les courbes exceptionnelles ;
- écarter les surfaces de Hirzebruch.