Le théorème de Schoen–Webster

Benoît Kloeckner

25 octobre 2007

Table of contents

Sommaire

Principe vague

Une structure géométrique sera dite *rigide* s'il existe peu d'espaces possédant beaucoup de symétries.

Voir Gromov & D'Ambra.

Avoir beaucoup de symétries,

ce sera ici :

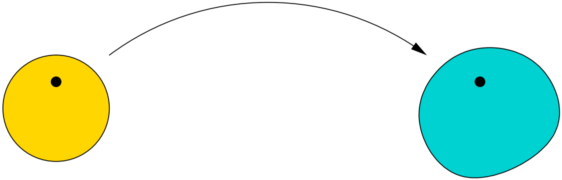
- pour une variété M compacte, posséder un groupe d'automorphismes G non compact.
- pour une variété quelconque, avoir un groupe d'automorphismes qui agit non proprement.

Définition

L'action de G sur M est *propre* si pour tous compacts K, L de M l'ensemble $\{g \in G; gK \cap L \neq \varnothing\}$ est compact.

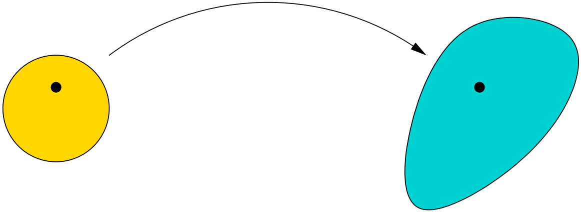
Actions non propres

Si l'action n'est pas propre, on peut trouver deux suites convergentes $(x_i), (y_i)$ de M et une suite (g_i) de G qui sort de tout compact telles que $g_i(x_i) = y_i$.



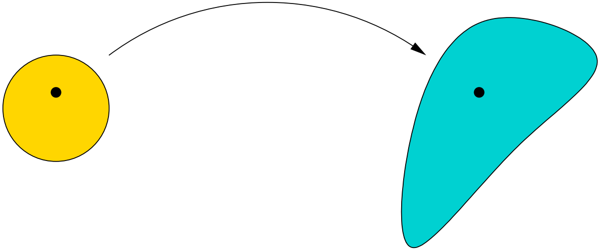
Actions non propres

Si l'action n'est pas propre, on peut trouver deux suites convergentes $(x_i), (y_i)$ de M et une suite (g_i) de G qui sort de tout compact telles que $g_i(x_i) = y_i$.



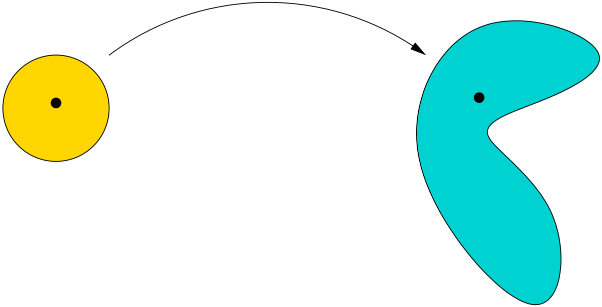
Actions non propres

Si l'action n'est pas propre, on peut trouver deux suites convergentes $(x_i), (y_i)$ de M et une suite (g_i) de G qui sort de tout compact telles que $g_i(x_i) = y_i$.



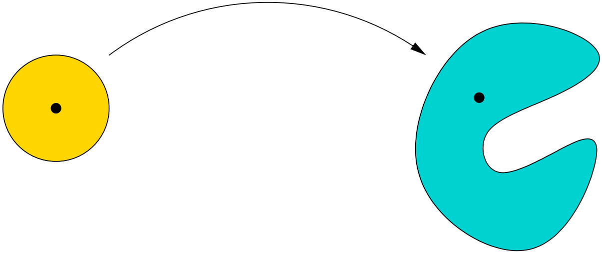
Actions non propres

Si l'action n'est pas propre, on peut trouver deux suites convergentes $(x_i), (y_i)$ de M et une suite (g_i) de G qui sort de tout compact telles que $g_i(x_i) = y_i$.



Actions non propres

Si l'action n'est pas propre, on peut trouver deux suites convergentes $(x_i), (y_i)$ de M et une suite (g_i) de G qui sort de tout compact telles que $g_i(x_i) = y_i$.



Contre-exemples

La géométrie symplectique, la géométrie de contact ne sont pas rigides :

toute variété symplectique ou de contact admet un groupe d'automorphismes de dimension infinie.

Exemples

Géométrie riemannienne :

Si M est une variété riemannienne, alors G agit proprement.

Géométrie conforme :

Théorème (Ferrand–Obata)

Une variété riemannienne dont le groupe *conforme* n'agit pas proprement est conformément équivalente à la sphère ou à l'espace euclidien.

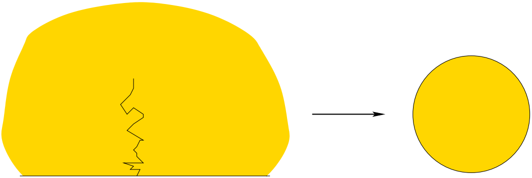
Géométrie CR strictement pseudoconvexe : le théorème de Schoen–Webster.

Sommaire

Motivation

Théorème de représentation de Riemann

Tous les domaines simplement connexes de $\mathbb{C}$, sauf $\mathbb{C}$ lui même, sont biholomorphes entre eux.

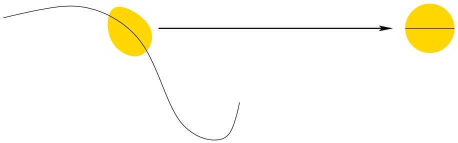


Poincaré : pas de généralisation en dimension supérieure.

Motivation

Théorème

Deux courbes analytiques réelles de $\mathbb{C}$ sont toujours localement biholomorphes.



Qu'en est-il pour les hypersurfaces réelles en dimension supérieure ?

Structure complexe

La structure complexe de $\mathbb{C}^n$ est décrite par l'opérateur J :

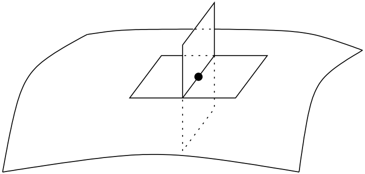
$$\begin{array}{ccc} T\mathbb{C}^n & \longrightarrow & T\mathbb{C}^n \\ (x, v) & \longmapsto & (x, iv) \end{array}$$

En chaque point, $J_x^2 = -\mathrm{Id}$, et J vérifie une condition d'intégrabilité.

Hypersurfaces

Une hypersurface réelle $H \subset \mathbb{C}^n$ hérite d'une structure géométrique :

- un champs d'hyperplans $\xi = TH \cap J(TH)$;
- un opérateur complexe $J : \xi \to \xi$ (qui vérifie une condition d'intégrabilité).



Variétés CR abstraites

Définition

Une *structure CR* sur une variété M de dimension $2n-1$ est la donnée :

- d'un champs d'hyperplans ξ ;
- d'un opérateur complexe $J : \xi \to \xi$ (vérifiant une condition d'intégrabilité).

La forme de Levi

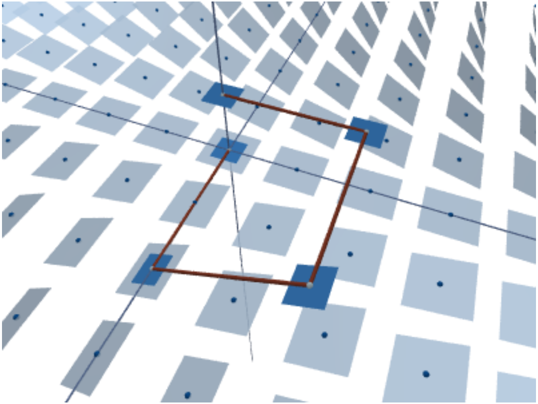
On appelle *calibration* le choix d'une 1-forme θ qui définit ξ. Étant donnée une calibration, on peut définir une forme quadratique sur ξ :

Forme de Levi associée à θ

$$\begin{aligned} L_\theta(v) &= d\theta(v, Jv) \qquad \forall v \in \xi \\ &= -\theta([V, JV]) \qquad \forall V \text{ tangent à } \xi \text{ prolongeant } v. \end{aligned}$$

La forme de Levi est homogène : $L_{f\theta} = fL_\theta$.

Description de la forme de Levi



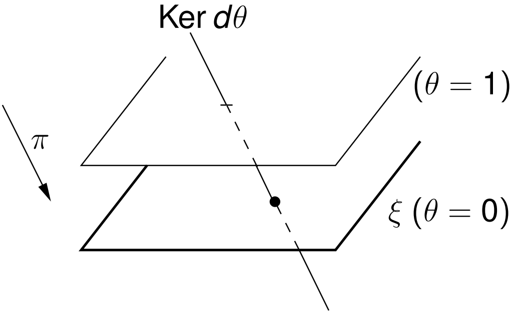
Les différentes géométries CR

Signature de L	la variété est dite	ξ induit
zéro	Levi-plate	un feuilletage par variétés complexes
définie	strictement pseudo-convexe	une structure de contact

La métrique de Webster

Soit (M, ξ, J) une variété CR strictement pseudo-convexe et θ une calibration. On a :

- Ker$(d\theta)$ est une direction transverse à ξ ;
- la formule suivante définit une métrique riemannienne sur M : $W_\theta(v) = L_\theta(\pi v) + \theta(v)^2$.



Les modèles plats

Sphère standard

La sphère $\mathcal{S}^{2n-1} = \{\sum |z_i|^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^n$, munie de la structure CR induite par $\mathbb{C}^n$, est strictement pseudo-convexe.

Groupe de Heisenberg

Le groupe de Heisenberg $\mathcal{H}^{2n-1} = \mathcal{S} \setminus \{*\}$ en est l'analogue non compact.

Leurs groupes d'automorphismes agissent non proprement.
Une variété CR localement isomorphe à $\mathcal{S}$ est dites *plate*.

Sommaire

Deux versions

Théorème (version compacte)

La seule variété CR strictement pseudo-convexe compacte, dont le groupe d'automorphismes n'est pas compact, est $\mathcal{S}$.

Théorème (version générale)

Une variété CR strictement pseudo-convexe dont le groupe d'automorphisme agit non proprement est isomorphe à $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{H}$.

Deux étapes

L'énoncé local

Une variété CR strictement pseudo-convexe dont le groupe d'automorphisme agit non proprement est plate.

Le passage du local au global

Une variété CR strictement pseudo-convexe plate dont le groupe d'automorphisme agit non proprement est isomorphe à $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{H}$.

Historique des résultats

- 1977 : S. WEBSTER, version compacte faible de l'énoncé local,
- 1993 : Y. KAMISHIMA, version compacte faible du passage du local au global,
- 1995 : R. SCHOEN, le théorème dans toute sa généralité (utilise le problème de Yamabe ; démontre le théorème de Ferrand–Obata avec les mêmes méthodes),
- 1996 : J. LEE, version compacte faible (s'appuie sur un résultat partiel de Webster),
- 2007 : C. FRANCES, le théorème dans un cadre plus général (inclut le théorème de Ferrand–Obata).

Travaux proches

Beaucoup de résultats ont été obtenu dans le cadre des domaines de $\mathbb{C}^n$ à bord lisse strictement pseudo-convexe, entre autres par :

WONG, ROSAY, BURNS and SCHNIDER, PINCHUK, KLEMBECK,

...

Sommaire

Sommaire

Invariants relatifs

Soit (M, ξ, J) une variété CR strictement pseudo-convexe.

Définition

Un *invariant relatif* est une famille de fonctions $F_\theta : M \to \mathbb{R}$, indicée par l'ensemble des calibrations, qui vérifie :

- (positivité) F_θ est positive ;
- (caractérisation de la platitude) F_θ s'annule sur un ensemble ouvert si et seulement si celui-ci est plat ;
- (régularité) F_θ est continue, lisse là où elle ne s'annule pas ;
- (homogénéité) il existe $-k < 0$ tel que $F_{f\theta} = |f|^{-k} F_\theta$,

Existence

- En dimension $2n - 1 = 3$, il existe un invariant relatif de degré -2 (Cartan).
- En dimension $2n - 1 > 3$, il existe un invariant relatif de degré -1 :

Chern et Moser définissent un tenseur de courbure S mesurant le défaut de platitude de M ;
la forme de Levi L_θ permet de définir une norme tensorielle $\|S\|_\theta$ qui est l'invariant relatif cherché.

Calibration canonique

Soit $(F_\theta)_\theta$ un invariant relatif de degré -1.
Soit θ une calibration quelconque.
la *calibration canonique* définie par

$$\theta^* = F_\theta \theta,$$

- est un invariant CR,
- s'annule exactement là où M est plate,
- est continue, lisse là où elle ne s'annule pas,
- sa métrique de Webster est singulière mais invariante.

Semi-distance canonique

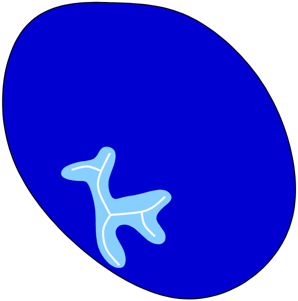
Supposons M compacte, pas plate.
On définit une semi-distance par

$$d(x,y) = \inf_{\gamma} \quad \ell_{W_{\theta^*}}(\gamma)$$

Soit U l'ouvert où θ^* ne s'annule pas ; d est une vraie distance sur U.

Compacité

L'ensemble $U_\varepsilon = \{x \in U ; d(x, M \setminus U) \geqslant \varepsilon\}$ est compact d'intérieur non vide.
L'action des automorphismes CR préserve U_ε et W_{θ^*}, donc $\mathrm{Aut}(M)$ est compact.



Sommaire

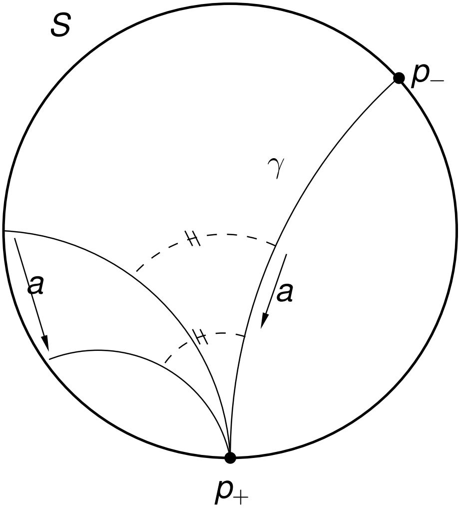
Dynamique nord-sud

Proposition

Soit $(\phi_k)_k$ une suite non bornée de $\mathrm{Aut}(\mathcal{S})$. Quitte à en extraire une sous-suite, il existe deux points éventuellement confondus p_+ et p_- tels que :

$$\begin{aligned} \lim \phi_k(p) &= p_+ \qquad && \forall p \neq p_- \\ \lim \phi_k^{-1}(p) &= p_- \qquad && \forall p \neq p_+ \end{aligned}$$

Dynamique nord-sud



L'application développante

soit M une variété CR plate. Il existe une *application développante* :

$$D : \widetilde{M} \longrightarrow \mathcal{S}$$

telle que

- D est un difféomorphisme local ;
- toute application CR $\tilde{f} \in \mathrm{Aut}(\widetilde{M})$ est semi-conjuguée à une application dans le modèle $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{S})$:

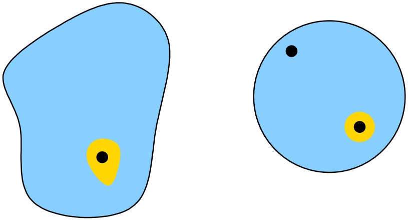
$$D\tilde{f} = \phi D.$$

Semi-conjugaison des dynamiques

- Si $\mathrm{Aut}(M)$ agit non proprement, alors $\mathrm{Aut}(\widetilde{M})$ également.
- On considère une suite non bornée $\tilde{f}_i$ envoyant une suite convergente $x_i \to x_\infty$ sur une autre $y_i \to y_\infty$.
- La suite des semi-conjuguées ϕ_i a une dynamique nord-sud, de pôles p_+ and p_-.
- On peut supposer que $D(y_\infty) = p_+$.

Extension de l'injectivité

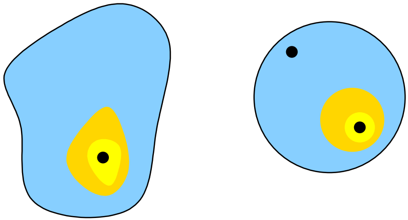
L'image d'un domaine d'injectivité contient le bassin d'attraction de p_+.



L'application développante conjugue un ouvert U de $\widetilde{M}$ avec $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{H}$.

Extension de l'injectivité

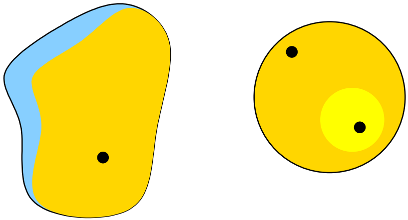
L'image d'un domaine d'injectivité contient le bassin d'attraction de p_+.



L'application développante conjugue un ouvert U de $\widetilde{M}$ avec $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{H}$.

Extension de l'injectivité

L'image d'un domaine d'injectivité contient le bassin d'attraction de p_+.



L'application développante conjugue un ouvert U de $\widetilde{M}$ avec $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{H}$.

Conclusion

- On montre facilement que $\widetilde{M} \setminus U$ contient au plus un point, et $\widetilde{M}$ est isomorphe à $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{H}$.
- On montre que $\widetilde{M} = M$ en utilisant la dynamique : y_∞ a au plus un antécédent dans le revêtement universel.