
Actions algébriques de $SL_2(\mathbb{R})$ sur le disque

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction | 2 |
| 1 Actions analytiques de $SL_2(\mathbb{R})$ sur le disque fermé | 3 |
| 1.1 L'action projective | 3 |
| 1.2 L'action conforme | 4 |
| 1.3 La famille des actions analytiques | 4 |
| 1.4 Actions algébriques | 6 |
| 1.5 Deux exemples : les actions projectives et conformes sont algébriques | 6 |
| 2 Topologie des orbites de petite dimension pour les représentations irréductibles | 7 |
| 2.1 Représentations irréductibles | 7 |
| 2.2 Orbites en dimensions 0, 1 et 2 | 7 |
| 2.3 Orbites en dimension quelconque | 8 |
| 3 Topologie des orbites de petite dimension pour les représentations quelconques | 11 |
| 3.1 Définitions et notations | 12 |
| 3.2 Cas elliptique | 13 |
| 3.3 Cas parabolique | 13 |
| 3.4 Cas hyperbolique | 15 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4 | Assemblage des orbites de petite dimension | 16 |
| 4.1 | Cas elliptique | 16 |
| 4.2 | Cas parabolique | 17 |
| 4.3 | Cas hyperbolique | 19 |
| 5 | Classification des actions algébriques sur le disque | 20 |
| 5.1 | Classification des actions topologiques | 20 |
| 5.2 | Classification des actions analytiques | 21 |
| | Bibliographie | 27 |

Remerciements

Je tiens particulièrement à remercier Abdelghani Zeghib pour sa confiance et surtout la qualité du sujet qu'il m'a proposé. Idéalement ciblé, il m'a permis de réaliser un travail personnel qui comptera dans ma motivation à faire de la recherche.

Je me dois également de remercier ceux qui m'ont permis de m'orienter vers la géométrie à un moment critique de mes études : Thierry Barbot et à nouveau Ghani pour leur cours de géométrie hyperbolique et anti-de Sitter, Serge Cantat pour m'avoir accueilli en stage à Rennes, Alberto Verjovsky qui a agrémenté ce stage d'exercices pendant les repas ainsi que Patrick Massot pour les innombrables discussions et conseils bibliographiques.

Introduction

On connaît une façon classique de faire agir $SL_2(\mathbb{R})$ sur le disque ouvert : il suffit de l'identifier aux isométries du disque de Poincaré. Cette action est analytique (on notera parfois \mathcal{C}^ω), et à équivalence analytique près elle est unique. Elle se compactifie de façon topologiquement unique en une action analytique sur le disque fermé.

Mais si on considère les prolongements au disque fermé à équivalence analytique près, il n'y a plus unicité.

En effet on connaît explicitement deux telles actions (l'action projective et l'action conforme) non analytiquement équivalentes. En fait, il existe une famille infinie dénombrable de telles actions ($[4],[2],[1]$).

Après avoir décrit ces actions, on s'intéresse à celles d'entre elles qui obéissent à une contrainte d'*algébricité* en se demandant si elle amène une certaine rigidité.

Une action algébrique d'un groupe est une action engendrée par une représentation linéaire de ce groupe. On définira plus précisément cette notion avant de l'étudier dans le cas des actions de $SL_2(\mathbb{R})$.

Les deux actions (projective et conforme) citées précédemment sont algébriques, et le but du reste de ce rapport sera de prouver qu'elles sont les seules actions algébriques analytiques sur le disque fermé (et donc en particulier les seules compactifications algébriques en un disque fermé de l'action sur le disque ouvert), l'algébricité introduisant donc une forte rigidité. Pour cela on étudiera en détail la topologie des orbites de petite dimension (2 ou moins) dans les actions algébriques de $SL_2(\mathbb{R})$.

1 Actions analytiques de $SL_2(\mathbb{R})$ sur le disque fermé

Avant toute chose, précisons la définition d'*équivalence entre actions* que l'on considère.

Définition 1 (Équivalence)

Soit k un entier ou ∞ ou ω . Tous les objets considérés seront supposés de régularité \mathcal{C}^k .

Soient :

- G un groupe de Lie;
- A et B deux variétés;
- $\alpha : G \rightarrow \text{Diff}(A)$ et $\beta : G \rightarrow \text{Diff}(B)$ deux actions.

On dit que α et β sont \mathcal{C}^k -équivalentes s'il existe un difféomorphisme $f : A \rightarrow B$ tel que pour tout élément g de G on a $f^{-1} \circ \beta(g) \circ f = \alpha(g)$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \alpha(g) \downarrow & & \downarrow \beta(g) \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

1.1 L'action projective

Considérons la représentation adjointe de $SL_2(\mathbb{R})$ sur son algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. Une base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est donnée par :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La forme de Killing qui s'écrit dans cette base $\theta(aH+bX+cY) = 8(a^2+bc)$ est de signature (2,1). L'image de $SL_2(\mathbb{R})$ par sa représentation adjointe est

exactement la composante de l'identité dans les automorphismes de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ qui préservent la forme de Killing.

Ainsi quand on projectivise cette action on obtient une action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur \mathbb{RP}^2 qui comporte trois orbites : un disque (avec une structure d'espace hyperbolique), un cercle et un ruban de Möbius (avec une structure d'espace de Sitter). La restriction de cette action au disque compact sera appelée l'*action projective*.

Pour vérifier que l'actions projective n'est pas équivalente à l'action conforme, calculons-en un invariant \mathcal{C}^1 . Si on considère le point $[Y]$ de l'orbite circulaire, les éléments de $SL_2(\mathbb{R})$ qui le laisse stable sont ceux qui s'écrivent $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a^{-1} \end{pmatrix}$ et la différentielle en $[Y]$ de l'action d'un tel élément a pour valeurs propres a^2 et a^4 .

1.2 L'action conforme

Considérons la représentation naturelle de $SL_2(\mathbb{C})$, qui se projectivise en une action algébrique sur la droite projective complexe qu'on restreint à $SL_2(\mathbb{R})$. Cette action étant l'action usuelle de $SL_2(\mathbb{R})$ sur la sphère de Riemann, elle est constituée de deux orbites en forme de disques qui se recollent le long d'une troisième orbite, circulaire. La restriction de cette action à l'un quelconque des deux disques compacts sera appelée l'*action conforme*.

La sphère de Riemann privée d'un point donne le plan complexe sur lequel $SL_2(\mathbb{R})$ agit par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Si on considère le point 0, les éléments de $SL_2(\mathbb{R})$ qui le laissent fixe sont ceux qui s'écrivent $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a^{-1} \end{pmatrix}$ et la différentielle en 0 de l'action d'un tel élément a pour unique valeur propre a^2 , ce qui prouve que l'action projective et l'action conforme ne sont pas \mathcal{C}^1 -équivalentes donc *a fortiori* pas analytiquement équivalentes.

1.3 La famille des actions analytiques

Il existe de nombreux modèles topologiques différents correspondant à des actions analytiques de $SL_2(\mathbb{R})$ sur le disque fermé (voir l'article de Stowe [4], théorème 3.1) qui sont composés d'orbites ponctuelles, circulaires, cylindriques et en forme de disques (ouverts).

Le problème qui nous intéresse plus précisément ici est la compactification analytique en un disque fermé de l'unique action analytique de $SL_2(\mathbb{R})$ sur

le disque ouvert. On utilise la définition suivante.

Définition 2

On appelle compactification d'une action α d'un groupe G sur une variété M la donnée d'une variété (éventuellement à bord) compacte N , d'un plongement $\phi : M \rightarrow N$ tel que $\phi(M)$ soit dense dans N et d'une action $\bar{\alpha}$ qui prolonge l'action induite par α sur $\phi(M)$. Selon la régularité des objets considérés on parle de compactification topologique, différentiable, lisse ou encore analytique.

Par rapport au problème des actions analytiques de $SL_2(\mathbb{R})$ sur le disque fermé, cela revient donc à se limiter au modèle topologique constitué d'une orbite elliptique, en forme de disque, et d'une orbite circulaire.

Même avec cette restriction, il existe une famille infinie dénombrable de compactifications analytiques qu'on peut décrire par leurs générateurs infinitésimaux (sous une forme normale) autour de l'orbite de dimension 1 (voir [1]). L'action projective correspond aux champs de vecteurs suivant ($L = X + Y$ et $K = Y - X$) :

$$\begin{aligned} \bar{K}_{1+} &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \\ \bar{H}_{1+} &= 2 \left((\sin x)(1 + y) \frac{\partial}{\partial x} + (\cos x)(2y + y^2) \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \bar{L}_{1+} &= 2 \left((\cos x)(1 + y) \frac{\partial}{\partial x} - (\sin x)(2y + y^2) \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Ces champs de vecteurs sont donnés sur \mathbb{R}^2 donc ne sont pas complets (l'orbite circulaire est formée de l'axe des x et d'un point à l'infini) ; l'orbite en forme de disque est constituée par le demi-plan supérieur et en envoyant ce demi-plan sur le disque unité les champs se complètent de façon à décrire l'action sur tout le disque fermé.

La classification des compactifications analytiques est alors donnée (bien que de manière peu explicite) [4][2][1] par :

Théorème 1

En tirant en arrière les champs de vecteurs $\bar{K}_{1+}, \bar{H}_{1+}, \bar{L}_{1+}$ par les applications $F_n(x, y) = (x, y^n)$ où n parcourt les entiers naturels non nuls on obtient une famille de compactifications analytiques au disque fermé de l'action analytique de $SL_2(\mathbb{R})$ sur le disque ouvert qui sont deux à deux non analytiquement équivalentes. Toute telle compactification est analytiquement équivalente à l'une d'entre elles.

On trouve également dans les articles cités des expressions des champs tirés en arrière.

1.4 Actions algébriques

Définition 3 (action algébrique)

Une action α d'un groupe G sur une variété (éventuellement à bord) M est dite algébrique s'il existe :

- un \mathbb{R} -espace vectoriel V ;
- une représentation linéaire $\tilde{\rho}$ de G sur V

$$\tilde{\rho} : G \longrightarrow \text{Aut}(V) ;$$

- un plongement $\Phi : M \longrightarrow \mathbb{P}(V)$;

vérifiant :

- $\Phi(M)$ est une union d'orbites pour l'action ρ induite par $\tilde{\rho}$ sur $\mathbb{P}(V)$;
- α coïncide avec ρ via Φ , c'est-à-dire :

$$\Phi \circ \alpha(g) = \rho(g) \circ \Phi \quad \forall g \in G.$$

On dit que le triplet $(V, \tilde{\rho}, \Phi)$ est une réalisation de l'action algébrique α .

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{P}(V) \\ \alpha(g) \downarrow & & \downarrow \rho(g) \\ M & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{P}(V) \end{array}$$

L'exemple non trivial le plus simple est donné par la représentation canonique (l'injection de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ dans $\text{GL}_2(\mathbb{R})$) qui donne une action algébrique transitive de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}\mathbb{P}^1$.

1.5 Deux exemples : les actions projectives et conformes sont algébriques

L'action projective est algébrique par définition. Pour l'action conforme, on peut le voir de la façon suivante : on plonge la droite projective complexe dans la grassmannienne des 2-plans de \mathbb{R}^4 en identifiant \mathbb{C}^2 à \mathbb{R}^4 . Ensuite on identifie cette grassmannienne à $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4 \wedge \mathbb{R}^4) \approx \mathbb{P}(\mathbb{R}^6)$. Ce plongement qui s'écrit au final

$$[x + iy, u + iv] \longmapsto [(x, y, u, v) \wedge (-y, x, -v, u)]$$

permet de voir que l'action de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ obtenue est bien algébrique.

2 Topologie des orbites de petite dimension pour les représentations irréductibles

On commence par recenser les différents types d'orbite de dimension inférieure ou égale à deux qui apparaissent dans les actions algébriques obtenues par des représentation irréductibles.

2.1 Représentations irréductibles

La structure des représentations irréductibles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est entièrement connue (on peut consulter [3] pour une preuve du théorème 2 dans le cas complexe qui s'adapte directement au cas réel).

On construit une famille de représentations de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ en définissant pour $n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\rho}_n : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_n[X, Y]$$

où :

- $\mathbb{R}_n[X, Y]$ est l'espace des polynômes réels homogènes de degré n en X, Y ;
- $\tilde{\rho}_n$ est défini par $\tilde{\rho}_n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot X = aX + cY$, $\tilde{\rho}_n \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot Y = bX + dY$ et $\tilde{\rho}_n(A) \cdot P(X, Y) = P(\tilde{\rho}_n(A) \cdot X, \tilde{\rho}_n(A) \cdot Y)$.

Théorème 2 (représentations irréductibles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$)

Les représentations irréductibles de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sont exactement les $\tilde{\rho}_n$ pour n parcourant \mathbb{N} .

2.2 Orbites en dimensions 0, 1 et 2

Le cas des représentations irréductibles de très basse dimension est très simple.

Proposition 4

La représentation irréductible de dimension 1 est triviale, son projectivé comprend une seule orbite réduite à un point.

La représentation irréductible de dimension 2 est la représentation naturelle, son projectivé comprend une seule orbite, en forme de cercle.

Le cas de la représentation irréductible de dimension 2 est plus intéressant. Comme la représentation adjointe est irréductible de dimension 2 elle est conjuguée à $\tilde{\rho}_2$ mais la présentation polynômiale est fructueuse.

On définit sur $\mathbb{R}_2[X, Y]$ le discriminant, forme bilinéaire de signature (2,1), par : $\Delta(aX^2 + bXY + cY^2) = b^2 - 4ac$.

On vérifie facilement que Δ est préservée par $\tilde{\rho}_2$. Vu que la situation est conjuguée à la représentation adjointe on a :

Proposition 5

Il y a trois orbites pour l'action induite sur le projectivé $\mathbb{P}(\mathbb{R}_2[X, Y])$:

- **un disque** correspondant aux polynômes de discriminant négatif, qui sont donc de la forme $c(zX + Y)(\bar{z}X + Y)$ où z appartient au demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) > 0\}$. Les points de cette orbite sont analytiquement paramétrés par \mathbb{H}^+ et dans ce paramétrage l'action de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ sur cette orbite coïncide avec l'action isométrique sur \mathbb{H}^+ ;
- **un cercle** correspondant aux polynômes de discriminant nul, qui sont donc de la forme $c(tX + Y)^2$ où t appartient à $\partial \mathbb{H}^+ = \mathbb{RP}^1 = \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$ avec la convention $(\infty X + Y) = X$. Les points de cette orbites sont paramétrés par $\partial \mathbb{H}^+$ et dans ce paramétrage l'action de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ sur cette orbite coïncide avec l'action usuelle sur \mathbb{RP}^1 ;
- **un ruban de Möbius** correspondant aux polynômes de discriminant positif, qui sont donc de la forme $c(t_1X + Y)(t_2X + Y)$ où t_1 et t_2 sont distincts dans $\partial \mathbb{H}^+$. Cette orbite est paramétrée topologiquement par les paires (non ordonnées) $\{t_1, t_2\}$ et $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ agit sur chaque t_i selon l'action naturelle sur $\partial \mathbb{H}^+$.

Remarque importante : L'action obtenue sur le disque compact est bien l'action projective ; la flèche

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^+ \sqcup \partial \mathbb{H}^+ &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_2[X, Y]) \\ z &\longmapsto [(zX + Y)(\bar{z}X + Y)] \end{aligned}$$

n'est pas un paramétrage analytique jusqu'au bord, ce qui explique pourquoi on n'obtient pas l'action conforme.

2.3 Orbites en dimension quelconque

On va généraliser cette méthode de factorisation aux autres représentations.

Considérons donc l'action ρ_n obtenue en projectivant une représentation irréductible

$$\tilde{\rho}_n : \text{SL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}_n[X, Y].$$

Un élément P de $\mathbb{P}(\mathbb{R}_n[X, Y])$ s'écrit, en factorisant chacun des polynômes qui le composent :

$$\left[\prod_{i=1}^k (t_i X + Y)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^l (z_j X + Y)^{\beta_j} (\bar{z}_j X + Y)^{\beta_j} \right] \quad (1)$$

où les t_i sont distincts dans $\partial \mathbb{H}^+$, les z_i distincts dans \mathbb{H}^+ et $\sum \alpha_i + 2 \sum \beta_j = n$.

Pour déterminer la dimension de l'orbite d'un élément on va calculer la dimension de son stabilisateur (ou, ce qui revient au même, de sa composante contenant l'identité).

Lemme 6

On considère un élément P sous la forme factorisée (1). Alors l'orbite de P sous ρ_n est de dimension inférieure ou égale à 2 si et seulement si $k + 2l \leq 2$.

DÉMONSTRATION : on énumère les différents cas.

Si $l = 1$ et $k = 1$, P s'écrit $[(tX + Y)^\alpha (zX + Y)^\beta (\bar{z}X + Y)^\beta]$ où t appartient à $\partial \mathbb{H}^+$ et z à \mathbb{H}^+ . Le stabilisateur de P est l'ensemble des isométries directes de \mathbb{H}^+ qui fixent t et z et est donc réduit à l'identité. L'orbite de P est donc de dimension 3.

Si $l \geq 1$ et $k \geq 1$ l'orbite de P est donc *a fortiori* de dimension 3.

Si $l = 2$ et $k = 0$ P s'écrit $[(z_1 X + Y)^{\beta_1} (\bar{z}_1 X + Y)^{\beta_1} (z_2 X + Y)^{\beta_2} (\bar{z}_2 X + Y)^{\beta_2}]$ où z_1 et z_2 sont distincts dans \mathbb{H}^+ . Un élément du stabilisateur fixe ou permute z_1 et z_2 . En considérant la composante de l'identité du stabilisateur on se limite au cas des isométries directes de \mathbb{H}^+ qui fixent deux points, réduites à l'identité. Donc l'orbite de P est de dimension 3.

Si $l \geq 2$ et $k \geq 0$ l'orbite de P est donc *a fortiori* de dimension 3.

Si $l \geq 0$ et $k \geq 3$ la composante connexe de l'identité du stabilisateur de P est constituée d'isométries de \mathbb{H}^+ qui fixent au moins trois points du bord donc est réduite à l'identité et l'orbite de P est de dimension 3.

Si $l = 0$ et $k = 1$, P s'écrit $[(tX + Y)^\alpha]$ où t appartient à $\partial \mathbb{H}^+$. Le stabilisateur de P est l'ensemble des isométries directes de \mathbb{H}^+ qui fixent t , donc est un disque (une telle isométrie est décrite par l'image de ι) donc l'orbite de P est de dimension 1.

Si $l = 0$ et $k = 2$, P s'écrit $[(t_1 X + Y)^{\alpha_1} (t_2 X + Y)^{\alpha_2}]$ où t_1 et t_2 sont distincts dans $\partial \mathbb{H}^+$. La composante de l'identité du stabilisateur de P est l'ensemble des isométries directes de \mathbb{H}^+ qui fixent t_1 et t_2 c'est donc un groupe à un paramètre d'isométries hyperboliques et l'orbite de P est de dimension 2.

Si $l = 1$ et $k = 0$, P s'écrit $[(zX + Y)^\beta (\bar{z}X + Y)^\beta]$ où z est un élément de \mathbb{H}^+ . Le stabilisateur de P est l'ensemble des isométries directes de \mathbb{H}^+ qui

fixent z , c'est donc un cercle d'isométries elliptiques et l'orbite de P est de dimension 2. ■

Il y a donc trois situations qu'on nomme *elliptique* ($l = 1$ et $k = 0$), *parabolique* ($l = 0$ et $k = 1$) et *hyperbolique* ($l = 0$ et $k = 2$).

Proposition 7

La forme des orbites de dimension inférieure ou égale à 2 pour l'action ρ_n sont déterminées par la forme factorisée (1) de n'importe lequel de leurs éléments P de la façon suivante :

1. si $l = 0$ et $k = 1$: l'orbite de P est le cercle

$$\{[(tX + Y)^n]; t \in \partial \mathbb{H}^+\}$$

où $SL_2(\mathbb{R})$ agit de façon usuelle sur t . Il y a une seule orbite de cette forme;

2. si $l = 0$, $k = 2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$: l'orbite de P est un ruban de Möbius

$$\{[(t_1X + Y)^\alpha(t_2X + Y)^\alpha]; t_1 \neq t_2 \in \partial \mathbb{H}^+\}$$

où $SL_2(\mathbb{R})$ agit de façon usuelle sur t_1 et t_2 . Il y a une orbite de ce type si n est pair, aucune sinon;

3. si $l = 0$, $k = 2$ et $\alpha_1 \neq \alpha_2$: l'orbite de P est un cylindre

$$\{[(t_1X + Y)^{\alpha_1}(t_2X + Y)^{\alpha_2}]; t_1 \neq t_2 \in \partial \mathbb{H}^+\}$$

paramétré par les couples (ordonnés) (t_1, t_2) d'éléments distincts de $\partial \mathbb{H}^+$. L'action de $SL_2(\mathbb{R})$ est encore une fois induite par l'action sur $\partial \mathbb{H}^+$. Il y a $\frac{n-1}{2}$ orbites de cette forme (une pour chaque valeur de α_1) si n est impair et $\frac{n-2}{2}$ si n est pair.

4. si $l = 1$ et $k = 0$: l'orbite de P est le disque

$$\{[(zX + Y)^\beta(\bar{z}X + Y)^\beta]; z \in \mathbb{H}^+\}$$

avec l'action usuelle de $SL_2(\mathbb{R})$. Il y a une orbite de ce type si n est pair et aucune sinon.

DÉMONSTRATION : l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ ne change pas la forme factorisée du polynôme mais seulement la valeur des t_i et des z_j , donc comme l'action des isométries de \mathbb{H}^+ est transitive sur \mathbb{H}^+ et 2-transitive sur $\partial \mathbb{H}^+$ l'ensemble donné est bien à chaque fois une orbite.

Le dénombrement des orbites de chaque type est clair vu la condition $\sum \alpha_i + 2 \sum \beta_j = n$.

Il reste à vérifier la forme topologique des orbites.

Les cas 1, 2 et 4 se déduisent de l'étude en dimension 2 car l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbb{R}_m[X, Y]) &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}_{\alpha m}[X, Y]) \\ [P] &\longmapsto [P^\alpha] \end{aligned}$$

est un homéomorphisme sur son image.

Le cas 3 découle du fait qu'un tore privé de sa diagonale (au sens de la réalisation du tore comme le carré cartésien d'un cercle) est un cylindre (voir figure 1).

■

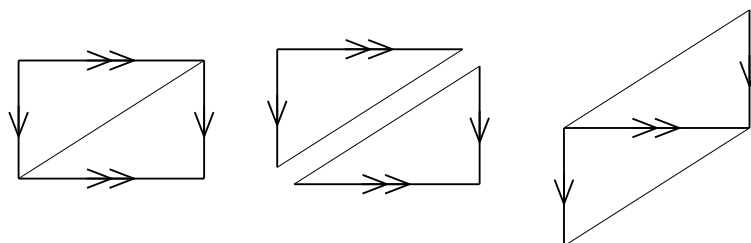


FIG. 1 – Topologie du cas 3

Il n'y a donc qu'une possibilité pour l'organisation de ces orbites les unes par rapport aux autres : le cercle est le bord de toutes les orbites de dimension 2 avec lesquelles il forme des tores et éventuellement un plan projectif.

3 Topologie des orbites de petite dimension pour les représentations quelconques

On considère maintenant une représentation linéaire réelle quelconque $\tilde{\rho}$ de $SL_2(\mathbb{R})$. Comme $SL_2(\mathbb{R})$ est semi-simple toute représentation est somme directe de représentations irréductibles et on peut donc écrire :

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{n_1} \oplus \tilde{\rho}_{n_2} \oplus \cdots \oplus \tilde{\rho}_{n_p}.$$

3.1 Définitions et notations

On note

$$V = \mathbb{R}_{n_1}[X, Y] \oplus \mathbb{R}_{n_2}[X, Y] \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}_{n_p}[X, Y]$$

l'espace de la représentation $\tilde{\rho}$.

Quitte à permuter les représentations irréductibles qui interviennent, on suppose $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_p$.

De plus on souhaite grouper les représentations irréductibles de même dimension; pour cela on note I_1, \dots, I_r les intervalles d'entiers $I_1 = \llbracket i_1 = 1, i_2 - 1 \rrbracket, I_2 = \llbracket i_2, i_3 - 1 \rrbracket, \dots, I_r = \llbracket i_r, i_{r+1} - 1 = p \rrbracket$ tels que pour tout s entre 1 et r , tout i dans I_s , $n_i = n_{i_s}$:

$$\underbrace{n_1 = \cdots = n_{i_2-1}}_{I_1} > \underbrace{n_{i_2} = \cdots = n_{i_3-1}}_{I_2} > \cdots > \underbrace{n_{i_r} = \cdots = n_p}_{I_r}.$$

On dira que I_s est *pair* si n_{i_s} est pair, sinon qu'il est *impair*.

Un élément x de $\mathbb{P}(V)$ s'écrit sous forme factorisée :

$$x = \left[u_q \prod_{i=1}^{k_q} (t_q^i X + Y)^{\alpha_q^i} \prod_{j=1}^{l_q} (z_q^j X + Y)^{\beta_q^j} (\overline{z_q^j} X + Y)^{\beta_q^j} \right]_{1 \leq q \leq p} \quad (2)$$

où $[u_1, u_2, \dots, u_p]$ appartient à $\mathbb{R}\mathbb{P}^{p-1}$ et pour tout q : $\sum \alpha_q^i + 2 \sum \beta_q^j = n_q$.

On appelle *support* de x l'ensemble des I_s vérifiant : il existe $i \in I_s$ tel que $u_i \neq 0$.

On définit de la même façon le *support* d'un élément projectif $[u_1, \dots, u_p]$.

On dira qu'un support est *pair* si tous ses éléments le sont. on définit de la même manière un support *impair*.

On note $I_+(x)$ l'élément du support de x qui correspond aux plus grandes dimensions et $I_-(x)$ celui qui correspond aux plus petites dimensions. On note $q_+(x)$ [respectivement $q_-(x)$] ou s'il n'y a pas ambiguïté q_+ [respectivement q_-] le plus petit [respectivement plus grand] indice q tel que u_q est non nul. On a $q_+ \in I_+(x)$ et $q_- \in I_-(x)$.

Lemme 8

On considère un élément x sous la forme factorisée (2). On note k le nombre d'éléments t_q^i distincts de $\partial \mathbb{H}^+$ et l le nombre de z_q^j distincts dans \mathbb{H}^+ qui interviennent dans cette écriture. Alors si l'orbite de x sous ρ est de dimension inférieure ou égale à 2, nécessairement $k + 2l \leq 2$.

DÉMONSTRATION : Un élément de la composante de l'identité dans le stabilisateur de x est nécessairement une isométrie directe de \mathbb{H}^+ qui fixe l'ensemble des $t \in \partial\mathbb{H}^+$ et des $z \in \mathbb{H}^+$ qui interviennent dans (2). Le raisonnement utilisé pour démontrer le lemme 6 donne donc le résultat. ■

On va maintenant préciser ce résultat en donnant la forme topologique des différents types d'orbites. On reprend la terminologie donnée avant la proposition 7.

On écarte le cas où les seules représentations irréductibles qui interviennent sont de dimension 1, puisqu'alors l'action est triviale.

3.2 Cas elliptique

On suppose ici que $k = 0$ et $l = 1$, c'est-à-dire qu'on considère l'orbite d'un élément

$$x = [u_q(zX + Y)^{\beta_q}(\bar{z}X + Y)^{\beta_q}]_{1 \leq q \leq p}.$$

En faisant agir $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ on peut envoyer z sur ι , on peut donc supposer sans perdre de généralité que $z = \iota$. Un élément du stabilisateur de x s'écrit nécessairement, vu qu'il fixe ι ,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

où $a^2 + b^2 = 1$.

Mais on a alors

$$A \cdot x = [u_q |a - b\iota|^{n_q} (\iota X + Y)^{\beta_q} (-\iota X + Y)^{\beta_q}]_q$$

où $|a - b\iota| = 1$ donc cette condition nécessaire est également suffisante.

On peut donc paramétrer l'orbite par $z \in \mathbb{H}^+$:

Lemme 9

L'orbite d'un élément elliptique est homéomorphe à un disque et il existe une orbite de ce type pour chaque élément $[u_1, \dots, u_p]$ de support pair.

3.3 Cas parabolique

On suppose que $k = 1$ et $l = 0$, c'est-à-dire que l'on considère (quitte à faire agir un élément de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ pour se ramener en 0) l'orbite d'un élément

$$x = [u_q Y^{n_q}]_q.$$

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ fixe x alors nécessairement A fixe 0 pour l'action projective sur \mathbb{RP}^1 donc $b = 0$ (et $d = a^{-1}$).

De plus on a

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a^{-1} \end{pmatrix} \cdot x = [u_q a^{-n_q} Y^{-n_q}]_q.$$

Si le support de x est réduit à un élément la condition $b = 0$ est suffisante pour que A fixe x .

Si $d \neq 0$ on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \left[u_q d^{n_q} \left(\frac{b}{d} X + Y \right)^{n_q} \right]_q = \left[u_q \left(\frac{b}{d} X + Y \right)^{n_q} \right]_q$$

et sinon

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \cdot x = [u_q b^{n_q} X^{n_q}]_q = [u_q X^{n_q}]_q.$$

L'orbite est donc homéomorphe à \mathbb{RP}^1 *i.e.* est un cercle.

Si le support de x contient au moins deux éléments le stabilisateur de x est réduit aux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ donc l'orbite est de dimension 2.

Si $d \neq 0$ on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \left[u_q d^{n_q} \left(\frac{b}{d} X + Y \right)^{n_q} \right]_q$$

et sinon

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \cdot x = [u_q b^{n_q} X^{n_q}]_q.$$

Un point de l'orbite est donc décrit par $\frac{b}{d} \in \mathbb{RP}^1$ et un paramètre réel non nul (b ou d). Le cas où $d \neq 0$ donne deux disques disjoints $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ qui se recollent le long de $d = 0$ en un cylindre (voir figure 2). Si les éléments du support de x ne sont pas tous de même parité ce cylindre décrit exactement l'orbite de x , dans le cas contraire $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x$ et l'orbite est à nouveau un cylindre, revêtu deux fois par le précédent.

On en déduit :

Lemme 10

L'orbite d'un élément parabolique de support réduit à un élément est homéomorphe à un cercle. Il y a une telle orbite pour chaque couple $(I_s, [u_q]_{q \in I_s})$.

L'orbite d'un élément parabolique dont le support contient au moins deux éléments est homéomorphe à un cylindre. Il y a une telle orbite pour chaque ensemble $\{[u_q d^{n_q}]_q; d \in \mathbb{R}^\}$ où le support de $[u_q]_q$ contient au moins deux éléments.*

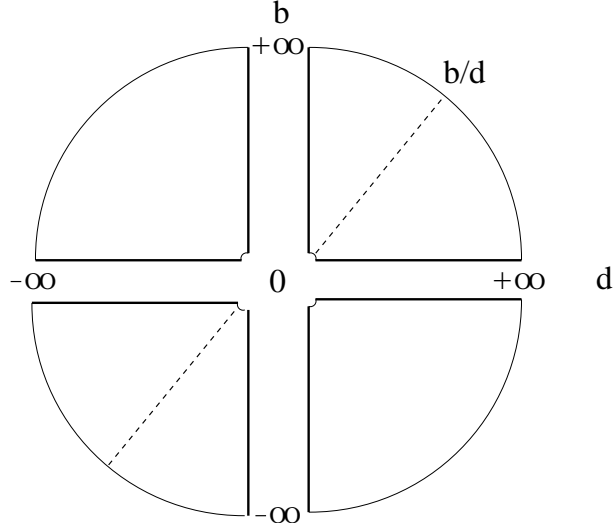


FIG. 2 – Orbite parabolique avec un support à plusieurs éléments

3.4 Cas hyperbolique

On suppose que $k = 2$ et $l = 0$. On considère donc l'orbite d'un élément

$$x = [u_q X^{\alpha_q} Y^{n_q - \alpha_q}]_q.$$

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est dans la composante de l'identité du stabilisateur de x alors nécessairement A fixe 0 et ∞ donc est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$.

De plus on a

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \cdot x = [u_q a^{2\alpha_q - n_q} X^{\alpha_q} Y^{n_q - \alpha_q}]$$

donc l'orbite de x est de dimension 2 si $2\alpha_q - n_q$ est constant et de dimension 3 sinon.

Supposons que l'on soit dans le premier cas.

L'orbite peut être paramétrée par deux points de $\partial \mathbb{H}^+$ comme dans le cas d'une représentation irréductible.

Notons $I = \bigcup \{I_s; I_s \text{ est dans le support de } x\}$. Si pour tout $q \in I$, n_q est pair et $\alpha_q = \frac{n_q}{2}$, alors ces deux points sont indiscernables, c'est-à-dire que l'orbite est paramétrée par les *paires* de points de $\partial \mathbb{H}^+$. Sinon on peut discerner les deux points (l'un est associé à un facteur de plus grand degré que l'autre) et l'orbite peut être paramétré par les *couples* de points de $\partial \mathbb{H}^+$.

En conclusion :

Lemme 11

Avec les notations de cette section, un élément hyperbolique x tel que $\delta = 2\alpha_q - n_q$ est constant a une orbite homéomorphe à un ruban de Möbius si $\delta = 0$ (et il y a une telle orbite pour chaque $[u_q]_q$ de support pair), à un cylindre sinon (et il y a une telle orbite pour chaque couple $([u_q]_q, \delta)$).

4 Assemblage des orbites de petite dimension

On connaît la forme des orbites de petite dimension, on va maintenant déterminer le comportement au bord des orbites de dimension 2. Chacune va se recoller sur une ou plusieurs orbites en forme de cercle et points stationnaires (qui sont exactement les $[u_q]_q, n_q=0$).

4.1 Cas elliptique

On considère l'orbite d'un élément elliptique, ce qui revient d'après la section 3.2 à choisir un élément projectif $[u_q]_q$ de support pair. Un point de l'orbite est alors donné par l'action d'un élément de $SL_2(\mathbb{R})$ sur l'élément x de l'orbite associé à ι :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \left[u_q |ci + d|^{n_q} \left(\frac{ai + b}{ci + d} X + Y \right)^{\frac{n_q}{2}} \left(\overline{\frac{ai + b}{ci + d} X + Y} \right)^{\frac{n_q}{2}} \right]_q$$

Or on remarque que comme $ad - bc = 1$, on a :

$$\frac{ai + b}{ci + d} = \frac{(ai + b)(-ci + d)}{|ci + d|^2} = \frac{ac + bd}{|ci + d|^2} + \iota \frac{1}{|ci + d|^2}.$$

Ainsi l'orbite est l'ensemble des points

$$x(z) = \left[u_q (\text{Im } z)^{\frac{n_q + -n_q}{2}} (zX + Y)^{\frac{n_q}{2}} (\bar{z}X + Y)^{\frac{n_q}{2}} \right]_q$$

pour $z \in \mathbb{H}^+$.

Ainsi z approche de $\partial \mathbb{H}^+$ quand $\text{Im } z$ tend vers 0 et $\text{Re } z$ vers un réel ou quand z tend vers l'infini. Dans tous les cas, si $x(z)$ a une limite dans $\mathbb{P}(V)$ cette limite est de la forme

$$[u_q(tX + Y)^{n_q}]_{q \in I_+(x)}$$

où t est éventuellement infini.

Lemme 12

Le bord dans $\mathbb{P}(V)$ de l'orbite de x est l'orbite circulaire associée à $[u_q]_{q \in I_+(x)}$.
L'union de l'orbite de x et de son bord forme un disque compact.

Remarque : ici on entend par bord d'une orbite O l'ensemble $\overline{O} \setminus O$.

4.2 Cas parabolique

On se limite évidemment aux deux types d'orbites cylindriques.

Parités identiques : soit $[u_q]_q$ un élément de $\mathbb{P}(V)$ dont le support contient au moins deux éléments et est pair ou impair.

On considère l'orbite de

$$x = [u_q Y^{n_q}]_q$$

qui est constituée des éléments

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \left[u_q d^{n_q} \left(\frac{b}{d} X + Y \right)^{n_q} \right]_q$$

où $d \neq 0$ et

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \cdot x = [u_q b^{n_q} X^{n_q}]_q.$$

Un élément du bord est obtenu en faisant tendre $\frac{b}{d}$ vers une limite dans \mathbb{RP}^1 et b et d vers 0 ou l'infini.

En écrivant pour $d \neq 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \left[u_q d^{n_q - n_{q+}} \left(\frac{b}{d} X + Y \right)^{n_q} \right]_q$$

et pour $d = 0$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \cdot x = [u_q b^{n_q - n_{q+}} X^{n_q}]_q$$

on voit que si $\frac{b}{d}$ tend vers une limite non infinie et non nulle et b et d tendent vers l'infini, on obtient un point de l'orbite circulaire associée à $[u_q]_{q \in I_+(x)}$. On obtient également un point de cette même orbite si $\frac{b}{d}$ tend vers 0 et d tend vers l'infini ou si $\frac{b}{d}$ tend vers l'infini ($\frac{b}{d}$ peut être par exemple constamment égal à l'infini si d est nul) et b tend vers l'infini.

De même si $\frac{b}{d}$ tend vers une limite non infinie et non nulle et b et d tendent vers 0, ou si $\frac{b}{d}$ tend vers 0 et d tend vers 0 ou si $\frac{b}{d}$ tend vers l'infini et b tend vers 0 on obtient un point de l'orbite associée à $[u_q]_{q \in I_-(x)}$, qui peut être circulaire si $n_{q-} > 0$ ou un point stationnaire si $n_{q-} = 0$.

Lemme 13

Le bord dans $\mathbb{P}(V)$ d'une orbite parabolique associée à un élément $[u_q]_q$ dont le support contient au moins deux éléments et est pair ou impair est la réunion disjointe des deux orbites associées à $[u_q]_{q \in I_+(x)}$ et à $[u_q]_{q \in I_-(x)}$. La réunion des trois orbites forme un cylindre compact si $n_{q_-} > 0$, un disque compact si $n_{q_-} = 0$.

Parités différentes : soit $[u_q]_q$ un élément de $\mathbb{P}(V)$ dont le support contient au moins deux éléments et n'est ni pair ni impair.

On considère l'orbite de

$$x = [u_q Y^{n_q}]_q.$$

La situation diffère ici du cas précédent en ce que les points de l'orbite associés à (b, d) et à $(-b, -d)$ sont distincts. Par contre les limites obtenues en prenant des paires de paramètres opposés sont les mêmes. On obtient donc (voir figures 3 et 4) :

Lemme 14

Le bord dans $\mathbb{P}(V)$ d'une orbite parabolique associée à un élément $[u_q]_q$ dont le support contient au moins deux éléments et n'est ni pair ni impair est la réunion disjointe des deux orbites associées l'une à $[u_q]_{q \in I_+(x)}$ et l'autre à $[u_q]_{q \in I_-(x)}$. La réunion des trois orbites forme une bouteille de Klein si $n_{q_-} > 0$, un plan projectif si $n_{q_-} = 0$.

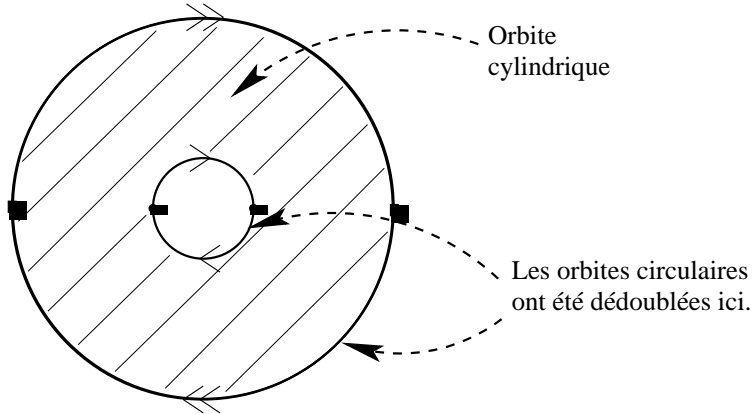


FIG. 3 – Une orbite parabolique ni paire ni impaire avec un bord constitué de deux cercles.

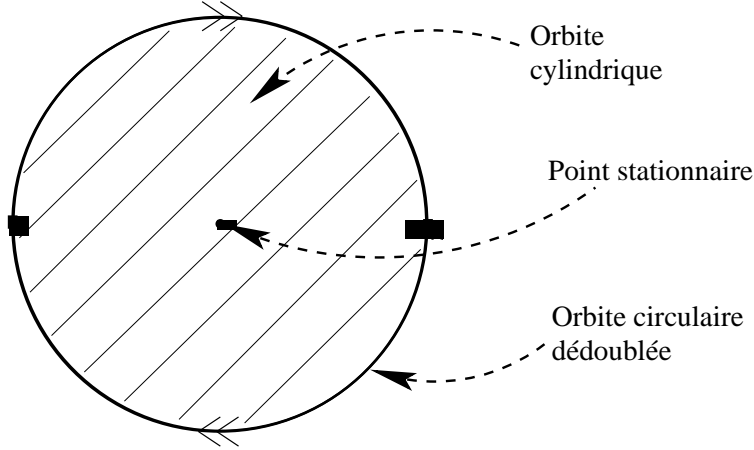


FIG. 4 – Une orbite parabolique ni paire ni impaire avec un bord constitué d'un cercle et d'un point stationnaire.

4.3 Cas hyperbolique

On utilise les notations de 3.4. On note $\beta_q = n_q - \alpha_q$ et $\delta = \alpha_q - \beta_q$ qui ne dépend pas de q .

Un élément de l'orbite de x est donné (si c et d sont non nuls) par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \left[u_q c^{\alpha_q} d^{\beta_q} \left(\frac{a}{c} X + Y \right)^{\alpha_q} \left(\frac{b}{d} X + Y \right)^{\beta_q} \right].$$

Si $d \neq 0$ on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} ad & bd^{-1} \\ cd & 1 \end{pmatrix} \cdot x$$

donc on peut supposer que d vaut 0 ou 1.

Commençons par supposer $d = 1$ et $c \neq 0$. En notant $t_1 = \frac{a}{c}$ et $t_2 = b$, avec la contrainte $a - bc = 1$ on obtient $c = (t_1 - t_2)^{-1}$ et un calcul simple donne :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \cdot x &= \left[u_q (t_1 - t_2)^{\alpha_q + -\alpha_q} (t_1 X + Y)^{\alpha_q} (t_2 X + Y)^{\beta_q} \right]_q \\ &= \left[u_q \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} \right)^{\alpha_q + -\alpha_q} \left(X + \frac{1}{t_1} Y \right)^{\alpha_q} \left(X + \frac{1}{t_2} Y \right)^{\beta_q} \right]_q. \end{aligned}$$

Ainsi comme α_q croît avec n_q , si une suite $(x_l)_l$ de points de l'orbite de x tend vers un élément de $\mathbb{P}(V)$ en dehors de l'orbite, les t_1 et t_2 associés

tendent vers une même limite (finie ou infinie) et la limite de $(x_l)_l$ est le point correspondant à la limite commune de t_1 et t_2 dans l'orbite circulaire associée à $[u_q]_{q \in I_+(x)}$.

Supposons maintenant $d = 1$ et $c = 0$. On a alors $a = 1$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \left[u_q b^{\beta_q} X^{\alpha_q} \left(X + \frac{1}{b} Y \right)^{\beta_q} \right]_q$$

donc comme β_q croît avec n_q on obtient la même conclusion que plus haut.

Enfin si $d = 0$, nécessairement $c \neq 0$ et comme précédemment on peut supposer $c = 1$ et aboutir à la même conclusion. En résumé :

Lemme 15

Le bord dans $\mathbb{P}(V)$ de l'orbite d'un élément hyperbolique x associé à $([u_q]_q, \delta)$ est l'orbite circulaire associée à $[u_q]_{q \in I_+(x)}$. Si δ est non nul l'union des deux orbites forme un tore, si δ est nul on obtient un ruban de Möbius compact.

5 Classification des actions algébriques sur le disque

On va utiliser les résultats précédents pour établir la classification des actions algébriques de $SL_2(\mathbb{R})$ sur le disque compact.

5.1 Classification des actions topologiques

D'après la section précédente nous disposons, pour construire une action algébrique de $SL_2(\mathbb{R})$ sur une surface compacte, de disques, de tores, de bouteilles de Klein, de cylindres, de rubans de Möbius, de plans projectifs, de cercles et de points stationnaires.

Comme les points stationnaires sont de la forme $[u_q]_q, n_q=0$ et que les cercles sont les orbites de points $[u_q Y^{n_q}]_q$ de support réduit à un élément (de degré n_q non nul), il n'existe pas de famille de tels cercles et points stationnaires formant un disque de $\mathbb{P}(V)$. Ainsi toute action algébrique topologique de $SL_2(\mathbb{R})$ sur le disque contient au moins une orbite de dimension 2.

Par ailleurs, il est toujours possible de choisir un certain nombre d'orbites circulaires de degrés pairs différents (par exemple les orbites des points $[Y^2], [Y^4], \dots, [Y^{2v}]$) et de coller une orbite elliptique ($[(X^2 + Y^2)^v]$) à celle de plus haut degré et des orbites paraboliques cylindriques ($[Y^{2v}, Y^{2(v-1)}], \dots, [Y^4, Y^2]$) entre deux orbites circulaires de degrés consécutifs.

On peut également, de la même façon, choisir un certain nombre d'orbites circulaires de degrés pairs différents, un point fixe (degré zéro) et coller entre le point fixe et l'orbite circulaire de plus bas degré une orbite parabolique cylindrique, et à nouveau placer une telle orbite entre deux orbites circulaires de degrés consécutifs.

Il en découle le résultat suivant :

Théorème 3

Une action algébrique topologique de $SL_2(\mathbb{R})$ est composée soit d'exactlyement une orbite elliptique, d'un certain nombre v (qui peut être n'importe quel entier ≥ 1) d'orbites paraboliques circulaires et de $v - 1$ orbites paraboliques cylindriques, soit d'un point stationnaire, de v orbites paraboliques circulaires et de v orbites paraboliques cylindriques.

Les différentes orbites sont assemblées comme indiqué sur les figures 5 et 6.

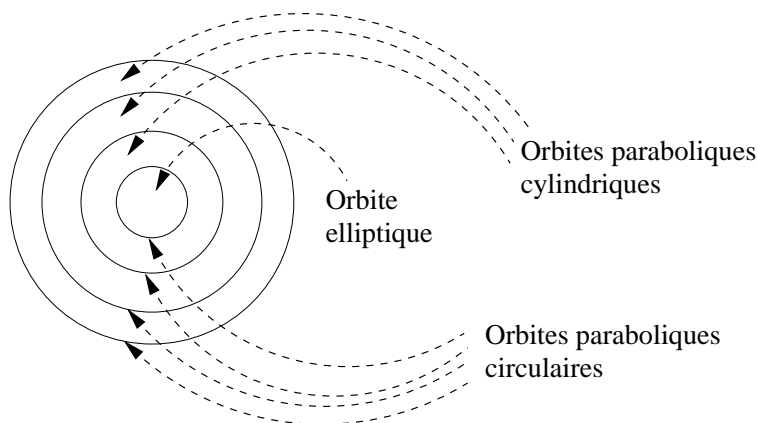


FIG. 5 – Structure d'une action topologique algébrique sur le disque avec une orbite elliptique.

5.2 Classification des actions analytiques

La classification analytique est plus délicate. On a déjà identifié les actions projective et conforme, on va voir que ce sont les seules existantes.

Pour cela on va commencer par écarter toutes les actions algébriques topologiques décrites dans le théorème 3 qui possèdent une orbite parabolique de dimension 2, montrer l'équivalence analytique entre les deux actions précitées et des familles de compactification d'orbites elliptiques et enfin montrer que

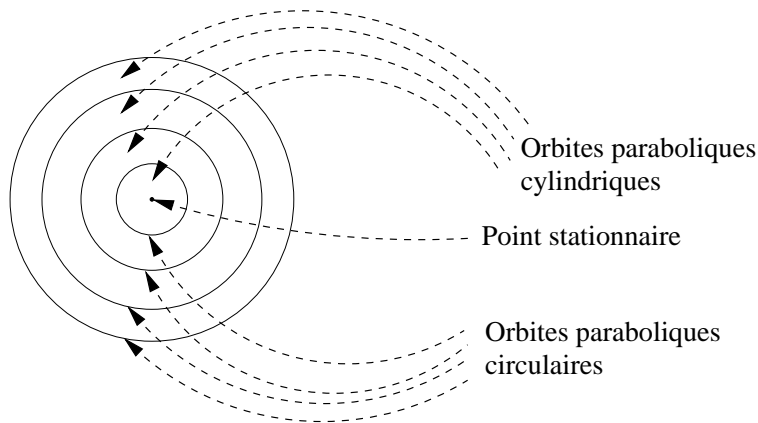


FIG. 6 – Structure d’une action topologique algébrique sur le disque avec un point stationnaire.

les familles de compactifications d’orbites elliptiques restantes ne forment pas des sous-variétés analytiques de $\mathbb{P}(V)$

Proposition 16

Une action analytique algébrique de $SL_2(\mathbb{R})$ sur le disque compact est nécessairement constituée d’une orbite elliptique et d’une orbite parabolique circulaire.

DÉMONSTRATION : Commençons par écarter le cas où coexistent une orbite elliptique et une orbite parabolique de dimension 2. On peut invoquer l’impossibilité générale d’une telle coexistence pour une action analytique (voir [4]), mais on peut aussi donner un argument simple.

On note $[u_q]_q$ l’élément projectif associé à l’orbite elliptique et x le point de cette orbite correspondant à z . De même on définit $[v_q]_q$ et y (correspondant au couple (O, ∞)) pour l’orbite cylindrique adjacente. On a donc $I_+(x) = I_+(y)$ (c’est le support associé à l’orbite circulaire qui fait la jonction), et on peut supposer sans perdre de généralité que $I_+(x) = I_+(y)$. On a alors $[u_q]_{q \in I_+(x)} = [v_q]_{q \in I_+(y)}$ et on peut supposer, quitte à se placer sur un sous-espace projectif, que $I_+(x) = I_+(y) = \llbracket 1, i_1 - 1 \rrbracket$ et que $u_1 \neq 0, v_1 \neq 0$. On note enfin $n = n_1$.

Définissons l’application δ par :

$$\begin{aligned}
 C &\longmapsto \mathbb{R} \\
 [Y^n + aXY^{n-1} + bX^2Y^{n-2} + \dots, \dots] &\longmapsto \frac{n-1}{2n}a^2 - b
 \end{aligned}$$

où C est le domaine de carte des éléments s’écrivant $[Y^n + \dots, \dots]$.

L'application δ est \mathcal{C}^ω sur C . De plus on a $(tX + Y)^n = Y^n + ntXY^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}t^2X^2Y^{n-2} + \dots$ donc δ est nulle sur les deux orbites paraboliques. Si l'union des trois orbites est une sous-variété analytique, nécessairement δ y est partout nulle car l'orbite cylindrique en est un ouvert.

Mais on a

$$\begin{aligned} (zX + Y)^{\frac{n}{2}}(\bar{z}X + Y)^{\frac{n}{2}} &= Y^n + n\operatorname{Re} zXY^{n-1} \\ &+ \left(\frac{n(n-1)}{2}(\operatorname{Re} z)^2 + \frac{n}{2}(\operatorname{Im} z)^2 \right) X^2Y^{n-2} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

donc δ est non nulle sur l'orbite elliptique et l'union de ces trois orbites ne peut être une sous-variété analytique de $\mathbb{P}(V)$.

Considérons maintenant le cas d'une orbite parabolique cylindrique dont un des bords est un point stationnaire. On note $x = [u_q Y^{n_q}]_q$ un point de cette orbite. Le point stationnaire adhérent à l'orbite est alors $y = [u_q]_{q \in I_-(x)}$ où $I_-(x) = I_r$ (rappelons que I_r est l'intervalle des entiers associés aux représentations irréductibles de dimension 1).

On se place dans la carte donnée par $u_{q_-} = 1$ et on note $(\partial_{q,k})_{q \neq q_-, 0 \leq k \leq n_q}$ la base naturelle de l'espace tangent en un point de $\mathbb{P}(V)$ ($\partial_{q,k}$ est associé à une variation infinitésimale du coefficient de $X^k Y^{n_q-k}$ du polynôme correspondant à la q -ième représentation irréductible).

Le plan tangent à l'orbite cylindrique en un point

$$[u_q d^{n_q} (tX + Y)^{n_q}]_q$$

où d est réel non nul et t est dans $\partial \mathbb{H}^+ = \mathbb{R}\mathbb{P}^1$ est engendré par les vecteurs

$$\sum_{q,k} u_q n_q d^{n_q-1} C_{n_q}^k t^k \partial_{q,k}$$

$$\sum_{q,k} u_q d^{n_q} k C_{n_q}^k t^{k-1} \partial_{q,k}.$$

En prenant $t = 0$ puis en faisant tendre d vers 0 on obtient comme limite le plan (de l'espace tangent basé au point stationnaire y) engendré par les vecteurs

$$\sum_{q \in I_{2-}(x)} u_q \partial_{q,0}$$

$$\sum_{q \in I_{2-}(x)} u_q \partial_{q,1}$$

où $I_{2-}(x)$ est l'élément du support de x qui correspond aux plus petits degrés non nuls.

En prenant $t = 1$ puis en faisant tendre d vers 0 on obtient comme limite le plan (basé au même point) engendré par les vecteurs

$$\sum_{q \in I_{2-}(x), k} u_q C_{n_q}^k \partial_{q,k}$$

$$\sum_{q \in I_{2-}(x), k} u_q C_{n_q}^k k \partial_{q,k}.$$

Si l'union de l'orbite cylindrique et du point fixe est une sous-variété ne serait-ce que différentielle de $\mathbb{P}(V)$ ces deux plans doivent coïncider, ce qui implique que pour q appartenant à $I_{2-}(x)$, on a $n_q = 1$. Mais alors le support de x n'est ni pair ni impair donc l'union de l'orbite cylindrique, de son bord circulaire et de son point stationnaire est un plan projectif et non un disque. ■

On termine maintenant la classification analytique.

Proposition 17

Considérons l'orbite elliptique de

$$x = \left[u_q (\iota X + Y)^{\frac{n_q}{2}} (-\iota X + Y)^{\frac{n_q}{2}} \right].$$

- Si la famille des $(\frac{n_{q_+} - n_q}{2})_{q \in I(x)}$ (où q_+ est toujours tel que n_{q_+} soit maximal et u_{q_+} non nul, supposé égal à 1) est entièrement constituée de nombres pairs, alors le disque union de l'orbite de x et de son bord est une sous-variété analytique de $\mathbb{P}(V)$ et l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur ce disque est conjuguée à l'action projective ;
- si la famille des $(\frac{n_{q_+} - n_q}{2})_{q \in I(x)}$ contient le nombre 1, alors le disque union de l'orbite de x et de son bord est une sous-variété analytique de $\mathbb{P}(V)$ et l'action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur ce disque est conjuguée à l'action conforme ;
- dans tous les autres cas, le disque union de l'orbite de x et de son bord n'est pas une sous-variété analytique de $\mathbb{P}(V)$.

En conséquence :

Théorème 4

Les seules actions algébriques analytiques de $SL_2(\mathbb{R})$ sur le disque compact sont, à équivalence analytique près, l'action projective et l'action conforme.

DÉMONSTRATION : On traite successivement chacun des cas.

Un modèle pour l'action projective est donné par l'adhérence dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}_2[X, Y])$ de l'orbite de $[X^2 + Y^2]$. Cette adhérence est incluse dans la carte $\{[aX^2 + bXY + (1 - a)Y^2]; a, b \in \mathbb{R}\}$ et l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}(\mathbb{R}_2[X, Y]) &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \\ [aX^2 + bXY + (1 - a)Y^2] &\longmapsto \left[\begin{array}{c} u_q \left(a(1 - a) - \frac{b^2}{4} \right)^{\frac{n_{q+} - n_q}{4}} \\ (aX^2 + bXY + (1 - a)Y^2)^{\frac{n_q}{2}} \end{array} \right]_q \end{aligned}$$

est injective, analytique et conjugue l'action projective et l'action sur l'adhérence de l'orbite de x . De plus c'est une immersion car en notant $s(a, b)$, $t(a, b)$, $u(a, b)$, $v(a, b)$ les coefficients des termes en $X^{n_{q+}}$, $X^{n_{q+}-1}Y$, $Y^{n_{q+}}$, $XY^{n_{q+}-1}$ on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial a} &= \frac{n_{q+}}{2} a^{\frac{n_{q+}}{2}-1} \\ \frac{\partial s}{\partial b} &= 0 \\ \frac{\partial t}{\partial b} &= \frac{n_{q+}}{2} a^{\frac{n_{q+}}{2}-1} \\ \frac{\partial u}{\partial a} &= -\frac{n_{q+}}{2} (1 - a)^{\frac{n_{q+}}{2}-1} \\ \frac{\partial u}{\partial b} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial b} &= \frac{n_{q+}}{2} (1 - a)^{\frac{n_{q+}}{2}-1} \end{aligned}$$

donc la différentielle de φ est de rang 2 en tout point. On en déduit à la fois que l'adhérence de l'orbite de x est une sous-variété analytique à bord de $\mathbb{P}(V)$ et que l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur ce modèle du disque est conjugquée à l'action projective.

Un modèle pour l'action conforme est donné par l'adhérence du disque de Poincaré. On va cette fois donner une immersion de l'adhérence du demi-plan de Poincaré vers l'orbite considérée, ce qui laisse de côté le point à l'infini. Ceci n'a pas d'importance car on peut toujours ramener cette application en une application du disque de Poincaré (privé d'un point appelé point à l'infini) vers l'adhérence de l'orbite de x et la prolonger au point à l'infini en conjuguant par une inversion qui échange ce dernier avec un autre point du

bord. On considère donc l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{H}^+ &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \\ a + ib &\longmapsto \left[u_q b^{\frac{n_q + -n_q}{2}} ((a + ib)X + Y)^{\frac{n_q}{2}} ((a - ib)X + Y)^{\frac{n_q}{2}} \right]_q \end{aligned}$$

qui est injective, analytique et conjugue l'action conforme et l'action sur l'adhérence de l'orbite de x . De plus une des coordonnées de $\psi(a + ib)$ vaut $n_{q_+} a$ et comme il existe $q_0 \in I(x)$ avec $\frac{n_{q_+} - n_{q_0}}{2} = 1$ une des coordonnées de $\psi(a + ib)$ vaut $u_{q_0} b$, donc ψ est une immersion. On en déduit le deuxième résultat comme précédemment.

Enfin, dans le troisième cas il existe $\alpha \neq 1$ le plus petit élément impair de $(\frac{n_{q_+} - n_q}{2})_{q \in I(x)}$. Alors en écrivant un élément de l'orbite de x sous la forme :

$$\left[u_q (\operatorname{Im} z)^{\frac{n_q + -n_q}{2}} (zX + Y)^{\frac{n_q}{2}} (\bar{z}X + Y)^{\frac{n_q}{2}} \right]_q$$

on voit qu'en faisant jouer à a le rôle de $\operatorname{Re} z$, à b celui de $\operatorname{Im} z^2$ et à c celui de $\operatorname{Im} z^\alpha$ on définit un plongement

$$\theta : (a, b, c) \longmapsto \left[u_q b^{\eta_q} c^{\zeta_q} ((a^2 + b)X^2 + 2aXY + Y^2)^{\frac{n_q}{2}} \right]_q$$

(où η_q et ζ_q sont des entiers bien choisis) d'un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^3 dans $\mathbb{P}(V)$ qui envoie 0 sur $[u_q Y^{n_q}]_q$.

On raisonne maintenant par l'absurde. Si l'adhérence de l'orbite de x est une sous-variété analytique à bord de $\mathbb{P}(V)$, alors l'image inverse par θ d'un voisinage dans cette sous-variété de $[u_q Y^{n_q}]_q$ est une sous-variété analytique à bord de dimension 2 de \mathbb{R}^3 , or cette image inverse est un voisinage de 0 dans $\{(a, b, c); b^\alpha = c^2, c \geq 0\}$.

On pourrait donc exhiber une fonction analytique

$$f : (s, t) \longmapsto (a(s, t), b(s, t), c(s, t))$$

d'un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^2 vers un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^3 , qui envoie 0 sur 0, dont la différentielle en 0 est de rang 2 et vérifiant pour tous (s, t) : $b(s, t)^\alpha = c(s, t)^2$ et pour tous s : $b(s, 0) = c(s, 0) = 0$.

En écrivant les développements en série : $b(s, t) = \sum b_{i,j} s^i t^j$ et $c(s, t) = \sum c_{i,j} s^i t^j$ on voit que $b(s, 0) = c(s, 0) = 0$ impose $b_{i,0} = c_{i,0} = 0$ pour tout i et $b(s, t)^\alpha = c(s, t)^2$ impose que pour tout s , $\sum_i b_{i,1} s^i = \sum_i c_{i,1} s^i = 0$ donc $b_{i,1} = b_{i,0} = c_{i,1} = c_{i,0} = 0$, ce qui est incompatible avec la condition sur le rang de df . Cette contradiction prouve que l'adhérence de l'orbite de x n'est pas une sous-variété analytique à bord de $\mathbb{P}(V)$ et achève la démonstration. ■

Références

- [1] Yoshihiko Mitsumatsu. $SL(2; \mathbf{R})$ -actions on surfaces. In *Geometric study of foliations (Tokyo, 1993)*, pages 375–389. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1994.
- [2] C. R. Schneider. $SL(2, R)$ actions on surfaces. *Amer. J. Math.*, 96 :511–528, 1974.
- [3] Jean-Pierre Serre. *Algèbres de Lie semi-simples complexes*. W. A. Benjamin, inc., New York-Amsterdam, 1966.
- [4] Dennis C. Stowe. Real analytic actions of $SL(2, \mathbf{R})$ on a surface. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 3(3) :447–499, 1983.