

CURRICULUM VITAE de Lingmin LIAO

1. Informations personnelles

Date de naissance : 01/09/1981
Nationalité : Chinoise
État Civil : Marié, un enfant (2018)
Adresse : 9 Place Jean Giraudoux, 94000 Créteil
Téléphone : +33 (1) 45 17 16 53
Fax : +33 (1) 45 17 16 49
Courriel : lingmin.liao@u-pec.fr
Pageweb : <http://perso-math.univ-mlv.fr/users/liao.lingmin/>

Domaines de recherche :

- Analyse multifractale des systèmes dynamiques
- Théorie métrique des nombres et approximation diophantienne
- Systèmes dynamiques sur le corps des nombres p -adiques
- Numération, β -transformations
- Conjecture de Fuglede dans les espaces p -adiques

2. Parcours scientifique

02/2019 : Qualifié aux fonctions de professeur des universités, Sections 25 et 26.

12/12/2017 : Habilitation à diriger des recherches, Université Paris-Est.
Différents aspects de systèmes dynamiques réels et p -adiques.
Président : Pierre ARNOUX; Rapporteurs : Julien BARRAL, Charles FAVRE, Marc POLLICOTT; Examineurs : Valérie BERTHÉ, Yann BUGEAUD, Stéphane SEURET.

Depuis le 01/09/2010 : Maître de Conférences, LAMA, Université Paris-Est Créteil.

2009 - 2010 : ATER, LAMA, Université Paris-Est Créteil.

2008 - 2009 : ATER, LMPT, Université François Rabelais de Tours.

2005 - 2008 : Thèse de l'Université de Picardie Jules Verne (soutenue le 20 mai 2008) :
Études sur la Récurrence de Certains Systèmes Dynamiques Topologiques et Arithmétiques. (198 pages)
Directeur : Ai-Hua FAN; Président : Jean-Pierre KAHANE; Rapporteurs : Yann BUGEAUD, Jörg SCHMELING; Examineurs : Jean-Luc CHABERT, Fabien DURAND, Bernard HOST.

1999 - 2005 : Licence, Maîtrise, Aspirant chercheur (Master)
Département de mathématiques, Université de Wuhan, Chine

3. Distinctions, projets, responsabilités scientifiques et administratives

PEDR et délégation au CNRS

- Obtention de la PEDR, classé A (2012-2016, 2016-2020).
- Demi-délégation CNRS (2013, 2015, 2019).

Participations à des projets scientifiques

- ANR Mutadis 2012-2016.
- GDR Analyse multifractale 2012-2020.
- PHC Orchid 2012 et 2013 France-Taïwan (Chef de Projet).
- BREUDS Brazil-Europe 2012-2016.
- PHC Cai Yuanpei France-Chine 2017-2018.
- PHC Star France-Corée du Sud 2017-2018.

Organisation des conférences, séminaires

- co-organisateur avec Nicolae Mihalache du *Séminaire COOL* en systèmes dynamiques (à l'IHP, mensuel) 2015/16 et depuis 2018.
- co-organisateur avec Thomas Richard du *Colloquium de Créteil* (mensuel) depuis 09/2016.
- co-organisateur avec A. Fan et S. Fan du colloque “*Dynamical systems and related topics*”, juillet 24-28, 2017 à Wuhan, trentaines participants.
- co-organisateur avec Y. Bugeaud et D. H. Kim du colloque “*Diophantine Approximation and related topics*”, janvier 18-19, 2018 à Créteil, 29 participants.

Investissement local

- mise en place du site web d'enseignement des mathématiques 2015-2017.
- responsable de la bibliothèque LAMA-Créteil depuis 2013.
- responsable des vacataires depuis 2018.

Participation à des comités de sélection pour le recrutement de MCF

- Université Paris-Est Créteil, 2014, 2015, 2016.

Participation à un jury de thèse

- Florent NGUEMA NDONG, *Étude de la Dynamique Symbolique des Développements en Base Négative, Système de Lyndon*, Université de Poitiers, septembre, 2013.

Activités d'expertise

- Rapporteur d'un projet de recherche pour Israel Science Foundation,
- Évaluateur pour les Bourses FRANCE L'Oréal-UNESCO Pour les Femmes et la Science,
- Rapporteur pour MathSciNet et Zentralblatt,
- Rapporteur pour 27 revues internationales dont :
International Mathematics Research Notices ; Communications in Mathematical Physics ; Mathematische Zeitschrift ; Chaos ; Ergodic Theory and Dynamical Systems.

Encadrements de TER de M1 et mémoires de M2

- Master 1 en mathématiques :
 - Grandes Déviations, 2011/12
 - Lemme de Borel-Cantelli, 2012/13
 - Retenues, mélanges de cartes et matrice incroyable, 2013/14
 - Marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} , 2014/15
 - Marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d , 2014/15
 - Transformée de Fourier sur un groupe abélien localement compact, 2016/17
 - Structure de la percolation de Mandelbrot, 2016/17
- Mémoire du Master 2 :
 - Kévin RIOU-NIVERT, *Théorie ergodique de la marche aléatoire sur arbre et dimension de Hausdorff*, 2014/2015. -
 - Yaoqiang LI, *Bernoulli-type measures related to bêta-expansions*, 2017/2018.

4. Encadrements de thèses

- (1) **Ruxi SHI**, *Ensembles et mesures spectrales et conjecture de Fuglede*, ancien élève normalien (Ulm), Contrat doctoral du Ministère de l'Education Nationale en cotutelle avec Ai-Hua FAN (Université de Picardie Jules Verne) **soutenue le 26/06/2018.**
- (2) **Ali AHMAD**, *Mesures de Gibbs p -adiques sur les arbres de Cayley et systèmes dynamiques sur le corps des nombres p -adiques*, Bourse de l'Ambassade de France en Malaisie et bourse Labex Bézout, séjours en France du 01/10/2016 au 31/03/2018 en cotutelle avec Mansoor SABUROV et Chin Hee PAH (Université Islamique Internationale de Malaisie) en cotutelle avec Arnaud LE NY (Université Paris-Est Créteil), **depuis septembre 2016.**
- (3) **Lixuan ZHENG**, *Bêta-développements et ses propriétés fractales*, Bourse du China Scholarship Council, séjours en France du 29/09/2017 au 28/09/2019 en cotutelle avec Min WU (Université de technologie de Chine méridionale, Chine) **depuis septembre 2017.**
- (4) **Wanlou WU**, *Dimension de Hausdorff dans des systèmes dynamiques non-uniformément hyperboliques*, Bourse du China Scholarship Council, séjours en France du 08/10/2017 au 07/10/2019 en cotutelle avec Dawei YANG (Université de Soochow, Chine) **depuis octobre 2017.**
- (5) **Kunkun SONG**, *Analyse multifractale et décomposition minimale des systèmes dynamiques*, Bourse du China Scholarship Council, séjours en France du 27/09/2018 au 26/09/2020 en cotutelle avec Jihua MA (Université de Wuhan, Chine) **depuis septembre 2018.**

5. Collaborations internationales

Collaborateurs principaux avec des projets en cours :

- (1) **Yann Bugeaud**, Professeur, Université de Strasbourg, sur *l'approximation diophantienne*
- (2) **Ai-Hua Fan**, Professeur, Université de Picardie, sur *l'analyse multifractale, les systèmes dynamiques p -adiques, et la conjecture de Fuglede*
- (3) **Shi-Lei Fan**, Professeur associé, Central China Normal University, Chine, sur *les systèmes dynamiques p -adiques et la conjecture de Fuglede*
- (4) **Dong Han Kim**, Professeur, Université de Dongguk, Corée du Sud, sur *l'approximation diophantienne*
- (5) **Michal Rams**, Professeur, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Pologne, sur *l'analyse multifractale des systèmes dynamiques et l'approximation diophantienne*

Autres collaborateurs :

Mohd Ali Khameini AHMAD, Vanessa BARROS, Thomas JORDAN, Ji-Hua MA, Jacques PEYRIERE, Jérôme ROUSSEAU, Mansoor SABUROV, Stéphane SEURET, Ronggang SHI, Ruxi SHI, Wolfgang STEINER, Omri SOLAN, Nattalie TAMAM, Bao-Wei WANG, Yue-Fei WANG, Meng WU, Jun WU, Dan ZHOU

6. Séjours, invitations, conférences et séminaires

Séjours de recherche

- En collaboration avec Ai-Hua Fan, Shilei Fan, j'étais invité à l'Université Normale Centrale de Chine, **Chine** pour trois semaines en 2014, un mois en 2017 (PHC Cai Yuanpei), deux semaines en 2018 (PHC Cai Yuanpei).
- En collaboration avec Michal Rams, j'étais invité à l'Institut de Mathématiques, Académie polonaise des Sciences, **Pologne** pour deux semaines en 2013, un mois en 2015, dix jours en 2018.
- En collaboration avec Dong Han Kim, j'étais invité à l'Université de Suwon puis à l'Université de Dongguk, **Corée du Sud** : un mois en 2009, un mois en 2010 et dix jours en 2018 (PHC Star).
- En collaboration avec Jung-Chao Ban, j'étais invité au Centre National pour les Sciences Théoriques à **Taïwan** pour un mois en 2012 (PHC Orchid) et un mois en 2013 (PHC Orchid).
- En collaboration avec Jérôme Rousseau, j'étais invité à Universidade Federal de Bahia, **Brésil** pour deux semaines en 2014 (BREUDS), et deux semaines en 2016 (BREUDS).
- J'ai effectué également des séjours à l'Institut de Mathématiques, Académie Chinoise des Sciences, à l'Université de Fudan, à l'Université de Technologie de Chine Méridionale en Chine, à l'Université de Lund, Université de Växjö en **Suède**, à l'Université Internationale Islamique de Malaisie, en **Malaisie**.

Exposés aux conférences

En 2018 :

1. Journées du GDR Analyse Multifractale, Chalès, France
2. Workshop on Dynamical systems and related topics, Wuhan, Chine
3. Workshop on Determinant and Stochastic Dynamical systems, Dalian, Chine
4. The final conference of the LAMBDA project, Toulouse, France

En 2017 :

1. Journées du GDR Analyse Multifractale, Porquerolles, France
2. Workshop on Diophantine approximation and Dynamical systems, Wuhan, Chine
3. Number Theory and Dynamics, Muuido, Corée du Sud
4. Biduum Limoges/Clermont "Théorie des nombres", Limoges, France

En 2016 :

1. **Premier Congrès de la Société Mathématique de France**, Tours, France
2. **14th International Conference on p -Adic Functional Analysis**, Aurillac, France
3. Analysis on Fractals and Graphs Workshop, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum, Sanya, Chine
4. Analysis on p -adic fields, p -adic Fuglede problem, Institut de Mathématiques de Toulouse, Toulouse, France
5. Journées du GDR Analyse Multifractale, Avignon, France
6. 2016 NCTS Workshop on Dynamical Systems, Taipei, Taïwan
7. Mathematical Symposium on Modern Analysis and Applications, Institute for Advanced Study in Mathematics, Harbin Institute of Technology, Harbin, Chine
8. Transversal Aspects of Tilings, Oléron, France

En 2015 :

1. **Fractals and related fields III**, Porquerolles, France
2. **Numeration 2015**, Nancy, France
3. **International Conference on p -adic Mathematical Physics and its applications**, Belgrade, Serbia
4. Fractal Geometry and Dynamics, the Mathematical Research and Conference Center, Będlewo, Pologne

En 2014 :

1. **The 20-th International Conference on Difference Equations and Applications**, Wuhan Institute of Physics and Mathematics, Wuhan, Chine
2. École de printemps d'analyse 2014, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France
3. Workshop on Fractals, The Hebrew University, Jerusalem, Israël
4. Journées du GDR Analyse Multifractale, Domaine de Chalès, France
5. Des martingales aux systèmes dynamiques, Université Paris-Est Marne-la-Vallée, France
6. Taiwan-Hong Kong-Mainland Workshop on Dynamics and Related Topics, Central China Normal University, Wuhan, Chine

J'ai donné également des exposés dans 25 conférences entre 2006 et 2013.

Exposés à des séminaires de mathématiques

Morningside center of Mathematics, Fudan University, South China University of Technology, Wuhan University, Huazhong University of Science and Technology (Chine); Lund University, Växjö University, Institut Mittag-Leffler (Suède); Korea institute for advanced study, Pohang University of Science and Technology, Dongguk University, Inha University (Corée du Sud); University of Bristol (Royaume-Uni); National Center for Theoretical Sciences, Chinese Culture University, Academia Sinica (Taiwan); Polish Academy of Sciences (Pologne); The Chinese University of Hong Kong (Hong Kong); International Islamic University Malaysia (Malaisie); Universités d'Amiens, de Brest, de Marseille, de Mulhouse, de Nancy, de Nice, d'Orléans, de Rouen, de Tours, Paris 11, Paris 12, Paris 13; Institut de Mathématiques de Luminy, Institut Henri Poincaré.

7. Activités de diffusion et vulgarisation des mathématiques

- Correspondant local de l'association AuDiMath.
- Animateur pour de l'Atelier MATH.en.JEANS :
 - Collège Watteau, Nogent-sur-Marne (13/14)
 - Collège Louis Issaurat, Créteil (11/12, 12/13, 13/14, 15/16, 16/17)
 - Collège Victor Duruy, Fontenay-sous-Bois (11/12, 12/13, 13/14, 14/15, 15/16, 16/17, 17/18, 18/19)
 - Collège de Lattre de Tassigny, Le Perreux-Sur-Marne (18/19)

8. Activités d'enseignement

Comme Maître de Conférences à l'Université Paris-Est Créteil, j'enseigne principalement les cours suivants.

- Cours **Analyse multifractale**, (M2 Mathématiques) (années universitaires 17/18, 18/19)

Charge horaire : 18h

Programme : Définition et calcul de l'exposant de Hölder d'une fonction et d'une mesure; Fonction de Takagi; Fonction de Lévy; Analyse multifractale de la fonction de Lévy; Analyse multifractale de la mesure de Bernoulli sur l'ensemble de Cantor triadique; Ondelettes et régularité; Formalisme multifractal.

- Cours/TD **Probabilités**, (M2 Mathématiques enseignement) (11/12, 12/13)

Charge horaire : 36h

Programme : Notions de probabilités; Inégalité de Paley-Zygmund; Lemme de Borel-Cantelli version générale; Fonctions génératrices; Transformée de Laplace; Lois usuelles; Inégalités de Chernov et grandes déviations; Inégalité de Kolmogorov; Convergences; Théorèmes limits.

- Cours **Probabilités**, (M1 Mathématiques) (11/12, 12/13, 13/14, 14/15)

Charge horaire : 36h

Programme : Notions de probabilités; Indépendance; Vecteurs aléatoires gaussiens; Convergences; Espérance conditionnelle; Martingale; Temps d'arrêt.

- TD **Ondelettes**, (M1 Mathématiques) (11/12, 14/15, 15/16, 16/17, 17/18, 18/19)

Charge horaire : 36h

Programme : séries de Fourier et la transformation de Fourier; les liens entre régularité et décroissance des coefficients; les espaces de Sobolev H^s lorsque s est réel; la résolution de l'équation des ondes et de la chaleur linéaires; introduction des bases d'ondelettes; construction de ces bases par analyse multirésolution (en dimensions 1 et 2), ondelette de Haar; décompositions en ondelettes; caractérisation de la régularité Holderienne uniforme par ondelettes; applications d'ondelettes.

- TD **Fonctions holomorphes**, (M1 Mathématiques) (10/11, 11/12, 12/13)

Charge horaire : 36h

Programme : Propriétés élémentaires des séries entières; Propriétés élémentaires des fonctions holomorphes; Équations de Cauchy-Riemann; Prolongement analytique, Poles, Singularités; Fonctions analytiques et holomorphes, Intégration sur des chemins; Fonctions méromorphes, Séries de Laurent, Théorèmes des résidus; Résidus et Formules remarquables.

- TD **Processus et finance**, (M1 Mathématiques) (10/11, 11/12)

Charge horaire : 36h

Programme : modèle de Black-Sholes; options européennes et américaines; théorie des Martingales; chaînes de Markov en temps discret.

- TD **Structures Algébriques**, (L3 Maths, L3 Math-Phys, L2 Math-Info) (16/17, 17/18, 18/19)

Charge horaire : 36h

Programme : - Groupes et sous-groupes. Morphismes de groupes. Sous-groupes distingués et groupes quotients - Groupes cycliques et monogènes - Groupe symétrique : décomposition en cycles, signature - Groupes classiques et applications à la géométrie - Anneaux. Idéaux. Anneaux quotients : anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, théorème chinois. Corps finis - Anneaux euclidiens et principaux : éléments irréductibles, factorisation, ppcm et pgcd, identité de Bézout - Anneau des entiers de Gauss - Polynômes à une indéterminée. Fractions rationnelles

- TD **Probabilités**, (L3 Mathématiques) (09/10, 12/13, 16/17).

Charge horaire : 36h

Programme : Tribu. Espace de probabilités. Variables aléatoires discrètes. Variable aléatoire à densité. Vecteurs aléatoires. Lois usuelles. Fonction de répartition. Calcul du moment. Inégalité

de Markov. Probabilité conditionnelle. Indépendance. Lemme de Borel-Cantelli. Formule de probabilité totale. Formule de Bayes. Convergence p.s. L^1 , en probabilité. Convergence en loi. Loi faible des grands nombres. Loi forte des grands nombres. Théorème central limite.

- TD **Algèbre III**, (L2 Mathématiques) (15/16, 16/17, 17/18)

Charge horaire : 36h

Programme : - Réduction des endomorphismes et des matrices : valeurs et vecteurs propres, sous-espaces propres, polynôme caractéristique, théorème de Cayley-Hamilton, polynôme minimal, diagonalisation et trigonalisation, décomposition de Dunford - Formes bilinéaires et quadratiques, structure euclidienne, groupe orthogonal - Réduction des matrices symétriques - Exponentielles de matrices et équations différentielles linéaires à coefficients constants

- TD **Analyse III**, (L2 Mathématiques) (18/19)

Charge horaire : 36h

Programme : - Topologie de \mathbb{R}^n et des espaces métriques : normes, ouverts, suites, compacité, complétude - Fonctions de plusieurs variables : continuité, dérivées partielles, dérivées directionnelles, différentielle, différentielle seconde, théorème de Schwarz, hessienne, Taylor d'ordre 2, extréma libres et points critiques, intégrales multiples. - Applications : convexité, difféomorphismes, edp simples, régression des moindres carrés, intégrales à paramètres...

Je suis également

- **responsable** du

- Cours Maths en Ingénierie 1 , (L3 Maintenance, Mécanique, Électronique, Physique, Alternance) (depuis 2012)

Il s'agit d'un amphi de 80 étudiants. Le contenu du cours est probabilité sur un espace fini et combinatoire ; espaces de probabilités, variable aléatoire, indépendance ; lois de variables aléatoires, espérance, variance, fonction de répartition, et fonction caractéristique ; onvergences, loi des grands nombres, théorème central limite.

- **responsable** du

- Cours Fonctions complexes et transformations linéaires, (L3 Maintenance, Mécanique, Électronique, Physique, Alternance) (2013/14 et 2014/15)

Il s'agit d'un amphi de 80 étudiants. Le contenu du cours est espace vectoriels ; norme ; fonction de la variable complexe ; transformation de Laplace ; transformation de Fourier ; séries de Taylor et séries de Laurant ; théorème des résidus ; théorème de Dirichlet ; égalité de Parseval ; intégrales de Fresnel ; application aux équations.

- **responsable** du

- Cours/TD Outils Maths/Physique 1, (L1 CB/SVT) (depuis 2016)
- Cours/TD Outils Maths/Physique 2, (L1 CB/SVT) (depuis 2017)

Il s'agit d'un amphi de 300 étudiants. Les contenus sont sur dérivés, intégrations, et équations différentielles.

J'ai assuré aussi

- TD Fonctions complexes et transformations linéaires, (L3 Maintenance, Mécanique, Électronique, Physique, Alternance) (09/10, 10/11, 12/13)
- Cours/TD Probabilités, (L2 Sciences économiques) (12/13)
- TD Analyse dans R^n et Statistiques, (L2 Chimie) (09/10, 10/11)

En tant qu'ATER à l'Université François Rabelais de Tours 2008-2009, j'ai enseigné

- TD Outils Mathématiques, (L1 Science du Vivant et Science de la Terre)
- TD Probabilités, (L1 Science du Vivant)
- TD Statistiques, (L2 Science du Vivant)
- TD Courbes paramétrées, (L2 Mathématiques)

9. Liste de publications

- Prépublications :

[32] *Fugelede's Conjecture holds in \mathbb{Q}_p* , (avec Ai-Hua Fan, Shi-Lei Fan et Ruxi Shi), soumis, <https://arxiv.org/abs/1512.08904>.

- Publications dans des revues à comité de lecture :

[31] *On the shortest distance between orbits and the longest common substring problem*, (avec Vanessa Barros, Jérôme Rousseau), **Advances in Mathematics**, 344, (2019), 311-339, Téléchargeable aussi sur : <https://arxiv.org/abs/1808.00078>.

[30] *Metric results on the distribution of fractional parts of powers of real numbers*, **Proceedings of Edinburgh Mathematical Society**, à paraître, (avec Yann Bugeaud et Michał Rams), Téléchargeable aussi sur : <https://arxiv.org/abs/1710.03596>.

[29] *Rational map $ax+1/x$ on the projective line over \mathbb{Q}_2* , **Science China Mathematics**, 2018, 61 : 2221-2236, (avec Shi-Lei Fan), Téléchargeable aussi sur : <https://arxiv.org/abs/1706.01227>.

[28] *Hausdorff dimension of weighted singular vectors in \mathbb{R}^2* , **Journal of the European Mathematical Society**, à paraître, (avec Ronggang Shi, Omri Solan et Nattalie Tamam), Téléchargeable aussi sur : <https://arxiv.org/abs/1605.01287>.

[27] *Dirichlet uniformly well-approximated numbers*, **International Mathematics Research Notices**, à paraître, (avec Dong Han Kim), Téléchargeable aussi sur : <http://arxiv.org/abs/1508.00520>.

[26] *Multifractal analysis of some multiple ergodic averages in linear Cookie-Cutter dynamical systems*, **Mathematische Zeitschrift**, (2018) 290 :63–81, (avec Ai-Hua Fan et Meng Wu). Téléchargeable aussi sur : <http://arxiv.org/abs/1208.1755>

[25] *Multifractal analysis of the Birkhoff sums of Saint-Petersburg potential*, **Fractals**, 26, No. 3 (2018) 1850026 (13 pages), (avec Dong Han Kim, Michał Rams et Bao-Wei Wang), Téléchargeable aussi sur : <https://arxiv.org/abs/1707.06059>.

[24] *Periodic p -adic Gibbs measures of q -states Potts model on Cayley tree: The chaos implies the vastness of p -adic Gibbs measures*, **Journal of Statistical Physics**, 171(2018),1000-1034, (avec Mohd Ali Khameini Ahmad et Mansoor Saburov), Téléchargeable aussi sur : <https://arxiv.org/abs/1708.02152>.

[23] *Rational map $ax+1/x$ on the projective line over \mathbb{Q}_p* , **Contemporary Mathematics** : Proceedings of 14th International Conference on p -adic Functional Analysis, 704(2018), 217-230, (avec Shilei Fan). Téléchargeable aussi sur : <https://arxiv.org/abs/1612.01881>

[22] *Minimality of p -adic rational maps with good reduction*, **Discrete Contin. Dyn. Syst. -A**, 37 (2017), 3161–3182, (avec Shilei Fan). Téléchargeable aussi sur : <https://arxiv.org/abs/1511.04856>

[21] *Dynamics of Chebyshev polynomials on \mathbb{Z}_2* , **J. Number Theor.**, 169 (2016), 174–182, (avec Shilei Fan). Téléchargeable aussi sur : <https://arxiv.org/abs/1511.03529>

[20] *Upper and lower fast Khintchine spectra in continued fractions*, **Monatsh. Math.**, 180 (2016), 65–81, (avec Michał Rams). Téléchargeable aussi sur : <http://arxiv.org/abs/1406.1148>

[19] *Subexponentially increasing sums of partial quotients in continued fraction expansions*, **Math. Proc. Camb. Phil. Soc.**, 160 (2016), 401–412, (avec Michał Rams). Téléchargeable aussi sur : <http://arxiv.org/abs/1405.4747>

[18] *Uniform Diophantine approximation related to b -ary and β -expansions*, **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, 36, no. 1, (2016), 1–22., (avec Yann Bugeaud). Téléchargeable aussi sur : <http://arxiv.org/abs/1404.1889>

- [17] *Dynamics of the square mapping on the ring of p -adic integers*, **Proceedings of the AMS**, 144 no. 3 (2016), 1183–1196, (avec Shi-Lei Fan). Téléchargeable aussi sur : <http://arxiv.org/abs/1408.4574>
- [16] *Dynamics of convergent power series on the integral ring of a finite extension of \mathbb{Q}_p* , **Journal of Differential Equations**, 259 (2015) 1628–1648, (avec Shi-Lei Fan). Téléchargeable aussi sur : <http://arxiv.org/abs/1401.1062>
- [15] *Multifractal analysis for expanding interval maps with infinitely many branches*, **Transactions of American Mathematical Society**, 367 (2015), 1847–1870, (avec Ai-Hua Fan, Thomas Jordan, et Michał Rams). Téléchargeable aussi sur : <http://arxiv.org/abs/1110.2856>
- [14] *On minimal decomposition of p -adic homographic dynamical systems*, **Advances in Mathematics**, 257, (2014), 92–135, (avec Ai-Hua Fan, Shi-Lei Fan and Yue-Fei Wang). Téléchargeable aussi sur : <http://arxiv.org/abs/1305.0762>
- [13] *On the fast Khintchine spectrum in continued fractions*, **Monatsh. Math.**, 171 (2013), 329–340, (avec Ai-Hua Fan, Bao-Wei Wang et Jun Wu). Téléchargeable aussi sur : <http://arxiv.org/abs/1208.1825>
- [12] *Multifractal analysis of some multiple ergodic averages for the systems with non-constant Lyapunov exponents*, **Real Analysis Exchange**, 39, no. 1, (2013), 1–14, (avec Michał Rams). Téléchargeable aussi sur : <http://arxiv.org/abs/1206.1397>
- [11] *Inhomogeneous Diophantine approximation with general error functions*, **Acta Arith.** 160 (2013), 25–35, (avec Michał Rams) Téléchargeable aussi sur : <http://arxiv.org/abs/1208.1826>
- [10] *Diophantine approximation by orbits of expanding Markov maps*, **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, 33, no. 2, (2013), 585–608, (avec Stéphane Seuret) Téléchargeable aussi sur : <http://arxiv.org/abs/1111.1081>
- [9] *Level sets of multiple ergodic averages*, **Monatsh. Math.**, 168, no. 1, (2012), 17–26, (avec Ai-Hua Fan et Ji-Hua Ma) Téléchargeable aussi sur : <http://arxiv.org/abs/1105.3032v1>
- [8] *Dynamical properties of negative beta transformation*, **Ergodic Theory and Dynamical Systems**, 32, no. 5, (2012), 1673–1690, (avec Wolfgang Steiner) Téléchargeable aussi sur : <http://arxiv.org/abs/1101.2366>
- [7] *On minimal decomposition of p -adic polynomial dynamical systems*, **Advances in Mathematics**, 228, no. 4, (2011), 2116–2144, (avec Ai-Hua Fan) Téléchargeable aussi sur : <http://arxiv.org/abs/1010.5583v2>
- [6] *Dimension of Besicovitch-Eggleston sets in the countable symbolic space*, **Nonlinearity**, 23 (2010) 1185–1197, (avec Ai-Hua Fan, Ji-Hua Ma et Bao-Wei Wang)
- [5] *On the frequency of partial quotients of regular continued fractions*, **Math. Proc. Camb. Phil. Soc.**, 148 (2010), 179–192, (avec Ai-Hua Fan et Ji-Hua Ma)
- [4] *On Khintchine exponents and Lyapunov exponents of continued fractions*, **Ergodic Theory and Dynam. Systems**, 29 (2009), 73–109, (avec Ai-Hua Fan, Bao-Wei Wang et Jun Wu) Téléchargeable aussi sur : <http://arxiv.org/abs/0802.3433v2>
- [3] *Dimension of some non-normal continued fraction sets*, **Math. Proc. Camb. Phil. Soc.**, 145 (2008), no. 1, 215–225, (avec Ji-Hua Ma et Bao-Wei Wang)
- [2] *Generic points in systems of specification and Banach valued Birkhoff ergodic average*, **Discrete Contin. Dyn. Syst.**, 21 (2008) 1103–1128, (avec Ai-Hua Fan et Jacques Peyrière)
- [1] *p -adic repellers in \mathbb{Q}_p are subshifts of finite type*, **C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I**, 344 (2007) 219–224, (avec Ai-Hua Fan, Yue-Fei Wang et Dan Zhou)

10. Présentation des activités de recherche

Je m'intéresse à l'analyse multifractale, aux systèmes dynamiques, et à l'approximation diophantienne. La plupart des objets de mes recherches sont issus de la théorie des nombres. Mes travaux de recherche se divisent en trois parties. La première partie concerne la dimension de Hausdorff des ensembles issus des systèmes dynamiques et de l'approximation diophantienne. La deuxième partie porte sur les propriétés dynamiques de certains systèmes dynamiques arithmétiques. La dernière partie est dédiée à la conjecture de Fuglede dans le corps des nombres p -adiques. Ces travaux ont fait l'objet de 31 publications et 1 prépublications.

La première partie de mes recherches qui comprend les articles [2-6, 9-13, 15, 18-20, 25-28, 30], est consacrée à l'analyse multifractale des moyennes ergodiques de Birkhoff simples et multiples des systèmes dynamiques (les systèmes dynamiques symboliques et le système de Gauss liée aux fractions continues) et à l'approximation diophantienne métrique.

Chaque nombre $x \in [0, 1]$ s'écrit en base 2 :

$$x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_k}{2^k} + \cdots,$$

avec les digits $x_k = x_1(T^{k-1}x) \in \{0, 1\}$, où x_1 est la fonction du premier digit $x \mapsto x_1$ et $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est le système "doubling map" défini par $x \mapsto 2x \bmod 1$. En 1909, Borel a montré que presque sûrement, la fréquence du digit 1 est $1/2$. C'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} x_1(T^j x)}{n} = \frac{1}{2}.$$

Néanmoins, il y en a aussi beaucoup de nombres "non-typique". Par exemple, les nombres qui ont la fréquence du digit 1 égale à $p \in [0, 1]$ avec $p \neq 1/2$. Alors, une question naturelle est qu'il y en a combien de ces nombres "non-typique" ? En 1934, Besicovitch, et en 1949, Eggleston (pour des cas en base b un entier supérieur à 2) ont répondu cette question. Ils ont montré qu'il y en a un nombre non-dénombrable de ces nombres et la dimension de Hausdorff de l'ensemble des nombres ayant la fréquence du digit 1 égale à p est

$$\frac{-p \log p - (1-p) \log(1-p)}{\log 2}.$$

Ceci est la première analyse multifractale des systèmes dynamiques (pour le système $x \mapsto 2x \bmod 1$).

En général, soit (X, \mathcal{B}, μ, T) un système dynamique ergodique, où \mathcal{B} est une tribu sur l'espace X , T est une transformation mesurable et invariante ergodique par rapport à la mesure μ . En 1931, Birkhoff a montré que pour un tel système dynamique, pour toute fonction $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable, les moyennes

$$A_n(\varphi, x) := \frac{\varphi(x) + \varphi(Tx) + \cdots + \varphi(T^{n-1}x)}{n}$$

convergent vers $\int_X \varphi(x) d\mu(x)$ pour μ -presque tout $x \in X$. Les points non μ -typiques qui ont des propriétés différentes pour leurs moyennes ergodiques ne sont pas concernés par le Théorème de Birkhoff. Ces points, comme les nombres "non-typiques" de Besicovitch–Eggleston, sont objets d'étude de l'analyse multifractale. Supposons que X est un espace métrique. Le but de l'analyse multifractale des moyennes ergodiques de Birkhoff est de calculer les dimensions de Hausdorff des ensembles de niveau :

$$\left\{ x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\varphi, x) = \alpha \right\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

La fonction de dimension de Hausdorff associée au niveau α est dite un spectre multifractal. La fonction φ est appelée souvent un potentiel.

L'exemple de Besicovitch–Eggleston, est donc, l'analyse multifractale des moyennes ergodiques de Birkhoff d'une fonction d'indicateur pour le système $Tx = 2x \bmod 1$ sur $[0, 1]$. Le travail de Besicovitch a été largement généralisé par Eggleston et beaucoup d'autres, pour les systèmes dynamiques symboliques finis et les transformations d'intervalle avec un nombre fini de branches.

Parmi ces généralisations, en collaboration avec Ai-Hua Fan et Jacques Peyrière, dans [2], nous prouvons que pour un système dynamique compact ayant la propriété de spécification, l'entropie topologique de l'ensemble des points génériques d'une mesure invariante est égale à l'entropie de la mesure. En corollaire, nous établissons un principe variationnel pour le spectre d'entropie topologique des moyennes de Birkhoff à valeurs dans un espace de Banach. Nous remarquons ici que l'entropie topologique est l'entropie de Bowen définie en analogie de la dimension de Hausdorff. Donc le spectre d'entropie est aussi un spectre multifractal.

Les résultats précédents concernent des systèmes dynamiques à nombre fini de symboles. Les résultats correspondants pour les systèmes dynamiques symboliques infinis et les transformations d'intervalle avec un nombre infini de branches, comme le système dynamique de Gauss associé aux fractions continues, sont assez peu nombreux. Par exemple, pendant longtemps, on ne connaissait pas exactement la dimension de Hausdorff de l'ensemble de nombres ayant la fréquence du digit k , dans leur développement en fraction continue, égale à p_k , pour $k \geq 1$. En 1975, Billingsley et Henningsen ont donné une borne supérieure de la dimension de Hausdorff de cet ensemble. Avec A. Fan et J. Ma, dans [5], nous avons répondu complètement la question et nous avons montré que la formule exacte de la dimension de Hausdorff est

$$\max \left\{ \frac{1}{2}, \sup \left\{ \frac{h_\mu}{2 \int |\log x| d\mu} : \mu \text{ est ergodique, } \mu\left(\left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]\right) = p_k \right\} \right\},$$

où h_μ est l'entropie de la mesure de μ .

L'analyse multifractale du potentiel $\log |T'|$ (T étant le système dynamique de Gauss), dont les moyennes ergodiques de Birkhoff sont des exposants de Lyapunov, a été partiellement réalisée par Pollicott et Weiss. En collaboration avec A. Fan, B. Wang et J. Wu, dans [4], nous avons complété cette analyse multifractale. Nous trouvons en s'appuyant sur la théorie de l'opérateur de Ruelle, les spectres multifractaux complets de l'exposant de Khintchine (concernant le potentiel $\log[1/x]$) et de l'exposant de Lyapunov, qui ne sont ni concaves ni convexes. Un résultat similaire pour le shift sur un espace symbolique d'un alphabet infini a aussi obtenu dans mon travail [6] en collaboration avec A. Fan, J. Ma et B. Wang. D'ailleurs, avec J. Ma et B. Wang, nous avons également étudié les fractions continues extrêmement non-normales dans [3]. Ce résultat qui réfute une conjecture d'Olsen porte sur la dimension de Hausdorff de l'ensemble de points dont les moyennes de Birkhoff oscillent de façon extrême.

En collaboration avec A. Fan, T. Jordan et M. Rams, dans [15], nous avons aussi largement généralisé les résultats de [4] et [5] aux potentiels continus par morceaux à valeurs dans \mathbb{R}^N pour une transformation d'intervalle ayant un nombre dénombrable de branches. Considérons (Λ, T) un système dynamique d'intervalle ayant un nombre dénombrable de branches, avec Λ son attracteur. Soit $\phi_i : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in \mathbb{N}$) une suite de fonctions bornées ayant les variations uniformément tendent vers 0 (voir [15] pour les détails). Posons

$$\Lambda_\gamma = \{x \in \Lambda : \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(\phi_i, x) = \gamma_i \text{ pour tout } i \in \mathbb{N}\}, \quad \underline{\gamma} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

Soit $\mathcal{M}(T)$ l'ensemble de mesure invariante sur Λ . Pour $\mu \in \mathcal{M}(T)$, notons h_μ et λ_μ son entropie et son exposant de Lyapunov. Posons

$$Z_0 = \left\{ \underline{\gamma} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \exists \mu \in \mathcal{M}(T), \forall i \in \mathbb{N}, \int \phi_i d\mu = \gamma_i \right\}, \text{ et } s_\infty = \inf \left\{ s \geq 0 : \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{diam}(I_i)^s < \infty \right\},$$

où I_i est la suite des sous-intervalles dans la définition de (Λ, T) .

Dans [15], nous obtenons le théorème suivant.

Theorem 10.1. *Si toutes les fonctions ϕ_i sont bornées, alors*

$$\dim \Lambda_\gamma = \max \left\{ s_\infty, \sup_{\mu \in \mathcal{M}(T)} \left\{ \frac{h_\mu}{\lambda_\mu} : \int \phi_i d\mu = \gamma_i \forall i \in \mathbb{N}, h_\mu < \infty \right\} \right\}.$$

Pour le système dynamique de Gauss T , la somme de Birkhoff $S_n(\varphi, x) := \varphi(x) + \varphi(Tx) + \dots + \varphi(T^{n-1}x)$ d'un potentiel φ peut aller à l'infini très vite. Nous nous intéressons également

aux points dont le taux de croissance de leurs sommes de Birkhoff est prescrit. Plus précisément, étant donnée une fonction croissante $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(n)/n = \infty$, nous nous intéressons à la dimension de Hausdorff de

$$(1) \quad \left\{ x : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n(\varphi, x)}{\Phi(n)} = 1 \right\}.$$

Avec M. Rams, dans [19], nous montrons que la dimension de Hausdorff de cet ensemble pour le potentiel $\varphi = a_1 : x \mapsto [1/x]$ (le premier quotient partiel de la fraction continue de $x \in [0, 1]$), et pour $\Phi(n) = \exp\{n^\gamma\}$ ($\gamma \in [1/2, 1)$) est toujours $1/2$, ce qui complète les travaux de Wu–Xu, et Xu. L’analyse multifractale de la somme de Birkhoff du potentiel $\varphi = \log a_1$ a été faite dans [13] en collaboration avec A. Fan, B. Wang et J. Wu. De plus, dans [20], avec M. Rams, nous remplaçons la limite dans (1) par liminf et limsup et obtenons les dimensions de Hausdorff correspondantes. En général, ces dimensions sont différentes, ce qui montre un nouveau phénomène dans le système dynamique de Gauss.

Soient X un espace métrique et T une transformation sur X . Soient f_1, \dots, f_ℓ ($\ell \geq 2$), ℓ fonctions bornées définies sur X à valeurs dans \mathbb{R} . Les moyennes ergodiques multiples

$$M_n(f_1, f_2, \dots, f_\ell, x) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_1(T^k x) f_2(T^{2k} x) \cdots f_\ell(T^{\ell k} x)$$

ont été bien étudiées par Furstenberg, Conze–Lesigne, Bourgain, Host–Kra, Bergelson–Host–Kra, Tao et al. Nous étudions ces moyennes ergodiques multiples du point de vue d’analyse multifractale. Nous nous intéressons aux dimensions de Hausdorff des ensembles de niveau :

$$(2) \quad \left\{ x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} M_n(f_1, f_2, \dots, f_\ell, x) = \alpha \right\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Comme un premier exemple, avec A. Fan et J. Ma, dans [9], nous obtenons la dimension de Hausdorff de l’ensemble dans (2) pour le décalage sur $\{+1, -1\}^{\mathbb{N}}$ et pour $f_1 = \dots = f_\ell : x = (x_0, x_1, \dots) \mapsto x_0$. Dans [9], nous avons aussi montré une formule de dimension de Minkowski :

$$\dim_M \left\{ x \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*} : x_k x_{2k} = 0 \ \forall k \geq 1 \right\} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\log_2 F_j}{2^{j+1}},$$

avec $F_0 = 1, F_1 = 2$ et $F_j = F_{j-1} + F_{j-2}$ étant la suite de Fibonacci.

Nos résultats, en particulier, la question de la dimension de Hausdorff pour l’ensemble ci-dessus ont attiré l’intérêt de Kenyon–Peres–Solomyak, qui ont finalement trouvé la formule de la dimension de Hausdorff (différente de celle de la dimension de Minkowski). Plus tard, beaucoup de résultats sont obtenus. On peut citer Kenyon–Peres–Solomyak, Peres–Solomyak, Fan–Schmeling–Wu, Peres–Schmeling–Seuret–Solomyak et al.

Avec M. Rams, dans [12], nous obtenons la formule de dimension de Hausdorff pour une application dilatante et affine par morceaux de l’intervalle, pour $\ell = 2$ et pour $f_1 = f_2$ une fonction d’indicateur. Le résultat de [12] est généralisé aux systèmes dynamiques cookie-cutter linéaires dans [26], un travail en commun avec A. Fan et M. Wu. En effet, pour une fonction φ localement constante, nous pouvons exprimer la dimension de Hausdorff de

$$L_\varphi(\alpha) := \left\{ x : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum \varphi(T^k x, T^{kq} x, \dots, T^{kq^{\ell-1}} x) = \alpha \right\}$$

comme solution d’un système d’équations impliquant la pression associée au potentiel φ qui est le logarithme de la valeur propre d’un opérateur non-linéaire de Ruelle. Dans le cas $q = \ell = 2$, posons $(s, r) \mapsto P(s, r)$ la pression associée à φ (voir [26] pour les détails). Soient A, B les bornes inférieure et supérieure de l’ensemble

$$\left\{ a \in \mathbb{R} : \exists (s, r) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \frac{\partial P}{\partial s}(s, r) = a \right\}.$$

Theorem 10.2. *Nous avons*

(i). $L_\varphi(\alpha) \neq \emptyset$ si et seulement si $\alpha \in [A, B]$.

(ii). Pour tout $\alpha \in (A, B)$, there exists a unique solution $(s(\alpha), r(\alpha)) \in \mathbb{R}^2$ to the system

$$\begin{cases} P(s, r) &= \alpha s \\ \frac{\partial P}{\partial s}(s, r) &= \alpha. \end{cases}$$

De plus, $s(\alpha)$ and $r(\alpha)$ est des fonctions analytique-réelles de $\alpha \in (A, B)$.

(iii). Les limites ci-dessous existent :

$$r(A) := \lim_{\alpha \downarrow A} r(\alpha), \quad r(B) := \lim_{\alpha \uparrow B} r(\alpha).$$

(iv). Pour tout $\alpha \in [A, B]$, nous avons

$$\dim_H L_\varphi(\alpha) = r(\alpha).$$

L'approximation diophantienne classique est l'étude de l'approximation d'un nombre réel par des rationnels. En 1842, Dirichlet a démontré son théorème fondamental de l'approximation diophantienne : pour tout nombre réel θ , pour tout réel $Q \geq 1$, il existe un rationnel p/q tel que $1 \leq q \leq Q$ et $|\theta - p/q| < 1/qQ$. Comme corollaire, pour tout nombre réel θ , il existe une infinité de nombres rationnels p/q tels que $|\theta - p/q| < 1/q^2$. En suivant Waldschmidt, on appelle la propriété d'approximation dans le théorème de Dirichlet l'approximation uniforme et celle dans son corollaire l'approximation asymptotique.

Nous nous intéressons aux tailles des ensembles de nombres qui sont bien approchés, de façon uniforme ou asymptotique, par des rationnels ou par une orbite d'un système dynamique avec une vitesse donnée. Dans la littérature, beaucoup d'attention est accordée dans l'approximation asymptotique. Notons $\|x\|$ la distance de x à l'entier le plus proche. En 1907, Minkowski a prouvé que, pour n'importe quel θ irrationnel, pour tout nombre réel y qui n'est pas égal à $m\theta + \ell$ avec $m, \ell \in \mathbb{N}$, il existe une infinité d'entiers n tels que $\|n\theta - y\| < \frac{1}{4|n|}$. En général, fixons un irrationnel θ . Pour $\Phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante vers zéro, nous mesurons la taille de l'ensemble

$$\mathcal{L}_\Phi[\theta] := \{y \in \mathbb{R} : \|n\theta - y\| < \Phi(n) \text{ pour une infinité de } n\}.$$

La mesure de Lebesgue de $\mathcal{L}_\Phi[\theta]$ a été largement étudiée par Kurzweil, Cassels, Laurent–Nogueira, Kim, Fuchs–Kim et al.

En collaboration avec M. Rams, dans [11], nous obtenons des estimations optimales pour la dimension de Hausdorff de $\mathcal{L}_\Phi[\theta]$ en utilisant l'exposant d'irrationalité $w(\theta) = \sup\{\beta \geq 1 : \liminf_{n \rightarrow \infty} n^\beta \|n\theta\| = 0\} \in [1, \infty]$.

En collaboration avec S. Seuret, nous remplaçons “ $n\theta$ ” dans la définition de $\mathcal{L}_\Phi[\theta]$ par l'orbite $T^n x$ d'un point x sous une application dilatante d'intervalle de Markov finie T sur $[0, 1]$. Nous montrons dans [10] que presque sûrement, par rapport à la mesure de Gibbs μ_ϕ associée à un potentiel ϕ , la dimension Hausdorff de

$$\mathcal{L}^\delta(x) := \{y \in [0, 1] : \|T^n x - y\| < n^{-\delta} \text{ pour une infinité de } n \in \mathbb{N}\},$$

est déterminée par le spectre multifractal de la mesure μ_ϕ .

Dans la direction de l'approximation uniforme, les résultats connus sont dans des espaces de dimension supérieure sur les vecteurs singuliers. Un vecteur $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ est appelé singulier si pour tout $\epsilon > 0$, il existe Q_0 tel que pour tout $Q > Q_0$ le système des inégalités

$$\max_{1 \leq i \leq d} |qx_i - p_i| < \frac{\epsilon}{Q^{1/d}} \quad \text{et} \quad 0 < q < Q$$

admet une solution entière $(p, q) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}$. Lorsque $d = 1$, seuls les nombres rationnels sont singuliers. L'existence de vecteurs singuliers qui ne se trouvent pas dans un sous-espace rationnel a été prouvée par Khintchine pour $d \geq 2$. Davenport et Schmidt ont montré que l'ensemble des vecteurs singuliers est de mesure de Lebesgue zéro. Cependant, le calcul de la dimension Hausdorff des vecteurs singuliers est loin d'être facile. Pour $d = 2$, Cheung a montré que la dimension de Hausdorff de l'ensemble des vecteurs singuliers est $4/3$. Le résultat général $d^2/(d+1)$ pour $d \geq 3$ est obtenu récemment par Cheung et Chevallier.

En collaboration avec D. H. Kim, dans [27], nous obtenons la dimension de Hausdorff de l'ensemble ($\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\tau \geq 1$ sont fixés)

$$\mathcal{U}_\tau[\theta] := \{y \in \mathbb{R} : \text{pout tout grand } Q, 1 \leq \exists n \leq Q \text{ tel que } \|n\theta - y\| < Q^{-\tau}\},$$

ce qui répond aussi à une question de Bugeaud et Laurent. Nous avons le théorème suivant.

Theorem 10.3. *Nous avons $\mathcal{U}_\tau[\theta] = \mathbb{T}$ si $\tau < 1/w(\theta)$; $\mathcal{U}_\tau[\theta] = \{i\theta \in \mathbb{T} : i \geq 1, i \in \mathbb{Z}\}$ si $\tau > w(\theta)$; et*

$$\dim_H(\mathcal{U}_\tau[\theta]) = \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log\left(n_k^{1+1/\tau} \prod_{j=1}^{k-1} n_j^{1/\tau} \|n_j\theta\|\right)}{\log(n_k \|n_k\theta\|^{-1})}, & \frac{1}{w(\theta)} < \tau < 1, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-\log\left(\prod_{j=1}^{k-1} n_j \|n_j\theta\|^{1/\tau}\right)}{\log(n_k \|n_k\theta\|^{-1})}, & 1 < \tau < w(\theta). \end{cases}$$

où n_k est la sous-suite (maximale) de (q_k) telle que

$$\begin{cases} n_k \|n_k\theta\|^\tau < 1, & \text{si } 1/w(\theta) < \tau < 1, \\ n_k^\tau \|n_k\theta\| < 2, & \text{si } 1 < \tau < w(\theta). \end{cases}$$

Dans [28], en collaboration avec R. Shi, O. Solan et N. Tamam, nous généralisons le résultat de Cheung aux vecteurs singuliers pondérés. Soit $w = (w_1, w_2)$ une paire de nombres réels positifs tels que $w_1 + w_2 = 1$. Nous montrons le théorème suivant.

Theorem 10.4. *L'ensemble de vecteurs w -singuliers, c'est-à-dire les vecteurs $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $Q_0 > 1$ tel que pour tout $Q > Q_0$ le système d'inégalités*

$$|qx_1 - p_1| < \varepsilon^{w_1} Q^{-w_1}, \quad |qx_2 - p_2| < \varepsilon^{w_2} Q^{-w_2}, \quad \text{et } 0 < q < Q,$$

admet une solution entière $(p, q) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}$, est de dimension de Hausdorff

$$2 - \frac{1}{1 + \max(w_1, w_2)}.$$

Remarquons que (d'après Dani) les vecteurs w -singuliers correspondent à certaines trajectoires divergentes dans l'espace \mathcal{L}_3 des réseaux unimodulaires dans \mathbb{R}^3 par rapport au semi-groupe à un paramètre $\{a_t = \text{diag}(e^{w_1 t}, e^{w_2 t}, e^{-t}) : t \geq 0\}$.

Dans l'étude de l'approximation uniforme, nous pouvons également remplacer “ $n\theta$ ” par une orbite d'un système dynamique. Soit T_β le β -transformation sur $[0, 1]$ définie par $T_\beta x = \beta x \bmod 1$. Dans [18], avec Y. Bugeaud, nous montrons le théorème suivant.

Theorem 10.5. *Nous avons*

$$\dim_H \left\{ x \in [0, 1] : \forall N \gg 1, \exists 1 \leq n \leq N, T_\beta^n(x) < (\beta^N)^{-v} \right\} = \left(\frac{1-v}{1+v} \right)^2,$$

et

$$\dim_H \left\{ \beta > 1 : \forall N \gg 1, \exists 1 \leq n \leq N, T_\beta^n(1) < (\beta^N)^{-v} \right\} = \left(\frac{1-v}{1+v} \right)^2.$$

Remarquons que les résultats correspondants sur l'approximation asymptotique ont été obtenus par Shen–Wang et Persson–Schmeling.

Quand “ $n\theta$ ” est remplacé par la suite β^n avec $\beta > 1$, dans [30], en collaboration avec Y. Bugeaud et M. Rams, nous obtenons des résultats similaires que ceux dans [18].

La deuxième partie de mes recherches est consacré à l'étude de récurrence des systèmes dynamiques sur le corps des nombres p -adiques, de la $(-\beta)$ -transformation et des systèmes dynamiques ayant la décroissance rapide de corrélation.

Le corps \mathbb{Q}_p a été introduit par Hensel en 1897. Il a été étudié de façon plus approfondie dans le domaine de la théorie des nombres. En 1987, Volovich a appliqué les nombres p -adiques pour construire sa théorie des cordes p -adiques. Le travail de Volovich a suscité l'intérêt pour les modèles p -adiques en physique et a stimulé l'étude de systèmes dynamiques p -adiques. Le

premier travail de systèmes dynamiques sur \mathbb{Q}_p est probablement du à Oselies et Zieschang. Puis, on pourra trouver les travaux de Anashin, Coelho–Parry, Gundlach–Khrennikov–Lindahl, Larin, et al. Dans l’autre direction, les dynamiques sur le corps \mathbb{C}_p des nombres p -adiques complexes, et sur l’espace de Berkovich associé à la droite projective de \mathbb{C}_p ont été beaucoup étudiées par Herman–Yoccoz, Hsia, Benedetto, Rivera–Letelier, Favre–Rivera–Letelier et al.

Nous nous intéressons aux systèmes dynamiques sur \mathbb{Q}_p . Notons \mathbb{Z}_p the ring of p -adic integers in \mathbb{Q}_p . Dans [7], en collaboration avec A. Fan, nous avons montré le théorème suivant.

Theorem 10.6. *Soit $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ polynôme d’ordre supérieur à 2, \mathbb{Z}_p se décompose en trois parties :*

$$\mathbb{Z}_p = \mathcal{P} \sqcup \mathcal{M} \sqcup \mathcal{B},$$

où \mathcal{P} est un ensemble fini et se compose de tous les points périodiques ; $\mathcal{M} = \sqcup_{i \in I} \mathcal{M}_i$ consiste en un nombre fini ou dénombrable de composants minimaux \mathcal{M}_i , chaque \mathcal{M}_i étant une union finie de boules ; et \mathcal{B} est attiré dans \mathcal{P} ou \mathcal{M} .

Cette décomposition de l’espace est appelée décomposition minimale.

Même si nous avons un théorème de décomposition minimal général pour les polynômes dans $\mathbb{Z}_p[x]$, il n’est pas facile de trouver la décomposition précise pour un polynôme donné. En collaboration avec S. Fan, dans [17], nous détaillons la décomposition minimale précise pour la fonction carrée sur \mathbb{Z}_p , et dans [21] la décomposition minimale pour les polynômes de Chebyshev sur \mathbb{Z}_2 .

En collaboration avec S. Fan, nous trouvons aussi une telle décomposition minimale pour les séries convergentes sur une extension finie K de \mathbb{Q}_p dans [16]. Il y a un nombre non-dénombrable de sous-systèmes minimaux si $K \neq \mathbb{Q}_p$.

Pour des fonctions rationnelles, en collaboration avec A. Fan, S. Fan et Y. Wang, nous étudions tout d’abord dans [14] les fonctions rationnelles de degré un :

$$\phi(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{Q}_p, \quad ad - bc \neq 0).$$

Si ϕ a un (ou deux) points fixes dans \mathbb{Q}_p , alors ϕ est conjugué à une translation (ou une multiplication) et la décomposition minimale a déjà été effectuée par Fan et Fares. Notons $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ la droite projective de \mathbb{Q}_p . Nous montrons le théorème suivant.

Theorem 10.7. *Si ϕ n’a pas de point fixe dans \mathbb{Q}_p et si $\phi^n \neq id$ pour tous les entiers $n > 0$, alors $(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p), \phi)$ se décompose en un nombre fini de sous-systèmes minimaux et ces sous-systèmes minimaux sont topologiquement conjugués les uns aux autres.*

Puis dans [22], nous étudions les fonctions rationnelles ayant bonne réduction, et trouvons des décompositions minimales de la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Des conditions minimales sur tout l’espace $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ sont aussi examinées.

Les résultats que nous obtenons sur la décomposition minimale sont pour des dynamiques 1-lipschitziennes. Il existe aussi beaucoup de polynômes et fonctions rationnelles dilatants. Avec A. Fan, Y. Wang et D. Zhou, dans [1], nous avons montré que pour les systèmes localement dilatants et transitifs, la restriction sur son ensemble de Julia est conjuguée à certains sous-décalages de type fini. En collaboration avec S. Fan, dans [23] et dans [29], nous décrivons les structures dynamiques de la fonction rationnelle $x \mapsto ax + 1/x$, où $a \in \mathbb{Q}_p$, pour $p \geq 3$ et $p = 2$ respectivement. Nous décrivons précisément les ensembles de Julia et de Fatou pour cette fonction rationnelle. Pour les ensembles de Julia, nous trouvons les sous décalages de type fini conjugués.

Les études de systèmes dynamiques sur \mathbb{Q}_p ont des applications à l’étude des mesures de Gibbs p -adiques sur les arbres de Cayley. Dans [24], nous avons étudié l’application de Potts–Bethe d’ordre 3 sur \mathbb{Q}_p . Elle est une fonction rationnelle de degré 3. Nous montrons que le sous système sur son ensemble de Julia est topologiquement conjugué au full shift d’un alphabet de trois lettres. Ce dernier résultat implique qu’il y a une infinité de mesures de Gibbs p -adiques périodiques pour le modèle de Potts à q -états sur l’arbre de Cayley d’ordre trois.

Dans le travail [8], avec W. Steiner, nous examinons la $(-\beta)$ -transformation définie par

$$T_{-\beta} : (0, 1] \rightarrow (0, 1], \quad x \mapsto -\beta x + \lfloor \beta x \rfloor + 1.$$

Cette transformation est une modification naturelle de la β -transformation sur laquelle beaucoup de mathématiciens ont eu des contributions : Rényi, Gelfond, Parry, Bertrand-Mattis, Blanchard et al. Différent de la β -transformation, la densité de la mesure invariante absolument continue de la $(-\beta)$ -transformation peut être nulle sur certains sous-intervalles de $[0, 1]$. En collaboration avec W. Steiner, dans [8], nous décrivons précisément ces sous-intervalles. En supprimant ces sous-intervalles de $[0, 1]$, nous prouvons que la $(-\beta)$ -transformation est exacte (locally eventually onto) pour tout $\beta > 1$ ce qui confirme une conjecture de Gora. Nous déduisons aussi de notre résultat que toute $(-\beta)$ -transformation a une unique mesure d'entropie maximale ce qui complète une étude de Faller.

Soit (X, T, μ) un système dynamique mesuré dont l'espace X est muni d'une distance d . Pour deux points $x, y \in X$ différents, et un entier n positif, définissons $m_n(x, y)$ la plus petite distance entre $T^i x$ et $T^j y$ avec $0 \leq i, j \leq n$:

$$m_n(x, y) = \min_{i, j=0, \dots, n-1} (d(T^i x, T^j y)).$$

Nous étudions le comportement asymptotique de $m_n(x, y)$. La dimension de corrélation C_μ de la mesure μ définie par

$$C_\mu = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \int_X \mu(B(x, r)) d\mu(x)}{\log r} \quad \text{si la limite existe.}$$

Dans [31], en collaboration avec V. Barros et J. Rousseau, nous montrons le théorème suivant.

Theorem 10.8. *Si le système dynamique (X, T, μ) a la décroissance de corrélation exponentielle, alors $\mu \times \mu$ -presque sûrement*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log m_n(x, y)}{-\log n} = \frac{2}{C_\mu}.$$

Pour les rotations irrationnelles, le comportement est différent. L'exposant d'irrationalité de l'angle de la rotation est impliqué.

La dernière partie de mes recherches contenant le travail [32] en collaboration avec A. Fan, S. Fan, R. Shi, est sur la conjecture de Fuglede dans le corps \mathbb{Q}_p des nombres p -adiques.

Soit G un groupe abélien localement compact et $\Omega \subset G$ un borélien de mesure de Haar positive et finie. On appelle Ω un ensemble spectral s'il existe un ensemble Λ de caractères continus de G qui forment une base d'Hilbert de $L^2(\Omega)$. On dit que Ω pave G par translation s'il existe un ensemble de translatées $T \subset G$ tel que $\sum_{t \in T} 1_\Omega(x - t) = 1$ presque partout sur G . La conjecture de Fuglede pour le groupe G déclare que Ω est spectral si et seulement s'il pave G .

Cette conjecture a été initialement proposée par Fuglede en 1974 pour le cas $G = \mathbb{R}^d$. L'origine de la conjecture de Fuglede est un problème de Segal (1958) pour caractériser les domaines $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tels que les opérateurs différentiels $-i \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -i \frac{\partial}{\partial x_d}$ définis sur leur domaine de définition commun $C_c^\infty(\Omega)$ admettent des extensions auto-adjoints commutatives dans $L^2(\Omega)$. Fuglede a montré que c'est le cas si et seulement si Ω est un ensemble spectral, d'où le problème de caractériser les ensembles spectraux sur \mathbb{R}^d . Fuglede a aussi montré que c'est effectivement le cas si Ω pave \mathbb{R}^d par un réseau AZ^d avec A étant une matrice non-singulière.

La conjecture de Fuglede a attiré une attention considérable pendant les dernières décennies. Beaucoup de résultats positifs sont obtenus dans des cas particuliers sous différentes restrictions, avant que Tao a prouvé que la direction "spectral \Rightarrow pavage" est fautive au cas \mathbb{R}^d avec $d \geq 5$. Après, Matolcsi, Matolcsi-Kolountzakis, Farkas-Gy, Farkas-Matolcsi-Móra ont donné une série de contre-exemples montrant que la conjecture est fautive pour toutes les deux directions pour $d \geq 3$. La validité de la conjecture pour les cas de $d = 1, 2$ reste inconnue. Iosevich, Katz, et Tao ont montré que la conjecture est vraie pour les convexes du plan \mathbb{R}^2 .

Dans [32], nous confirmons la conjecture de Fuglede dans le cas $G = \mathbb{Q}_p$, i.e., dans un espace p -adique unidimensionnelle.

Theorem 10.9. *La conjecture de Fuglede dans \mathbb{Q}_p est vraie. C'est-à-dire, un ensemble $\Omega \subset \mathbb{Q}_p$ admet un ensemble Λ de caractères continus de \mathbb{Q}_p formant une base d'Hilbert de $L^2(\Omega)$ si et seulement si Ω pave \mathbb{Q}_p par translation.*

Remarquons que la convexité sur \mathbb{Q}_p n'est pas proprement définie. Cette différence donne des difficultés pour la recherche dans des espaces p -adiques. D'autre part, la propriété non-Archimédienne des espaces p -adiques simplifie la structure des pavages. Nous pouvons décrire les pavages par arbres p -homogènes.