Etude locale près de $M(t_0)$ – Cas général

$M(t) = (f(t), g(t))$

Soit $\vec{V}^{(p)}(t_0)$ le 1er vecteur dérivé non nul

Soit $\vec{V}^{(q)}(t_0)$ le 1er vecteur dérivé suivant non nul, non parallèle à $\vec{V}^{(p)}(t_0)$

- $$\overrightarrow{M(t_0)M(t_0+h)} = \left(\frac{h^p}{p!} + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}a_1 + \cdots + \frac{h^{q-1}}{(q-1)!}a_{q-1} + h^q\varepsilon_1(h)\right)\vec{V}^{(p)}(t_0) + \left(\frac{h^q}{q!} + h^q\varepsilon_2(h)\right)\vec{V}^{(q)}(t_0)$$

- termes principals : $\dfrac{h^p}{p!}\vec{V}^{(p)}(t_0) + \dfrac{h^q}{q!}\vec{V}^{(q)}(t_0)$

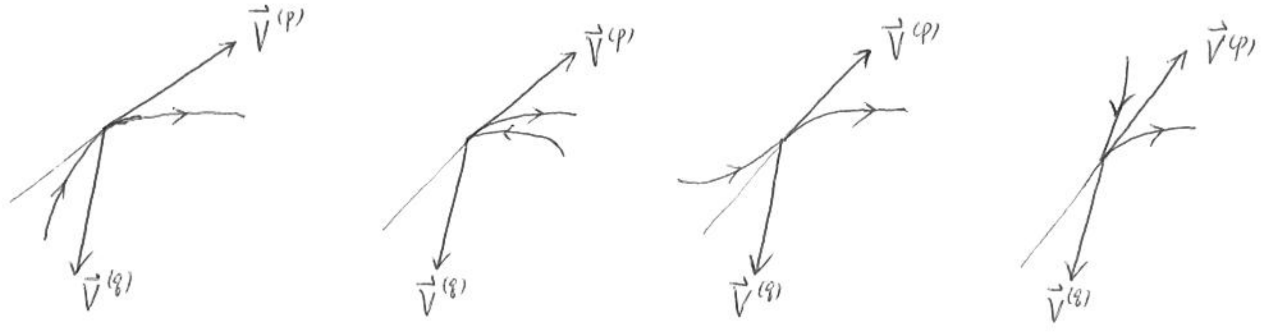
- ~~tangente~~ : vecteur tangent : $\vec{V}^{(p)}(t_0)$

- Position de la courbe : • Nouveau système de coordonnée : OXY, $OX = \vec{V}^{(p)}(t_0)$, $OY = \vec{V}^{(q)}(t_0)$

$$\begin{cases} p \text{ impair} \leftrightarrow \Delta X \text{ du signe de } h \\ p \text{ pair} \leftrightarrow \Delta X > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q \text{ impair} \leftrightarrow \Delta Y \text{ du signe de } h \\ q \text{ pair} \leftrightarrow \Delta Y > 0 \end{cases}$$

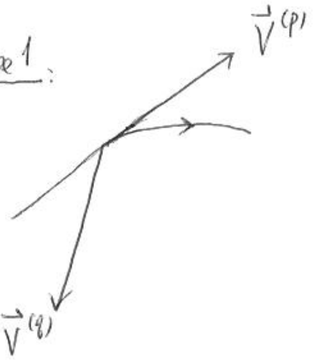
• direction de la courbe : toujours entre $\vec{V}^{(p)}$ et $\vec{V}^{(q)}$



① p impair, q pair ② p pair, q pair ③ p impair, q impair ④ p pair, q impair

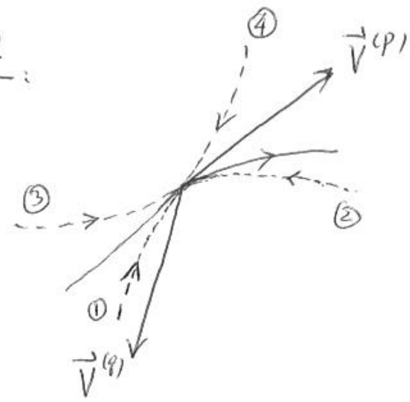
---

Etape 1 :



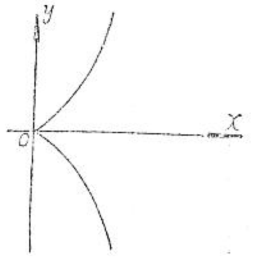
- tangente à $\vec{V}^{(p)}$
- direction de la courbe entre $\vec{V}^{(p)}$ et $\vec{V}^{(q)}$

Etap 2 :



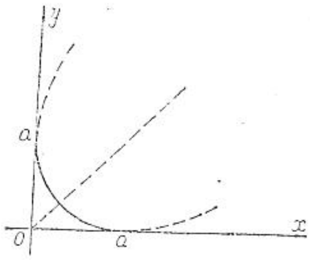
(2) 半立方抛物线

$y^2=ax^3$。



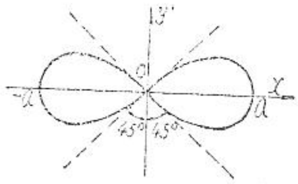
(3) 抛物线 $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$,

$$\begin{cases}x=a\cos^4 t,\\ y=a\sin^4 t.\end{cases}$$



(6) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$,

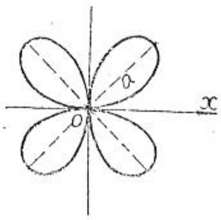
$\rho^2=a^2\cos 2\theta$.



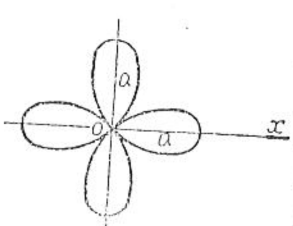
面积 $=a^2$.

(21) 四叶玫瑰线

$\rho=a\sin 2\theta$.



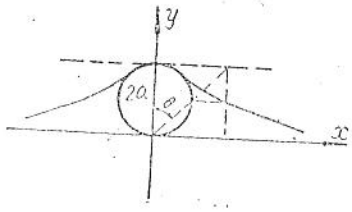
$\rho=a\cos 2\theta$.



面积 $=\frac{1}{2}\pi a^2$.

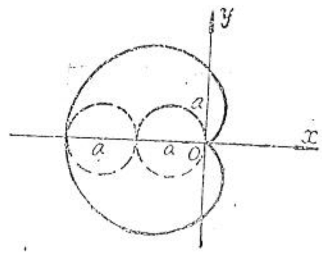
(4) 箕舌线 $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$,

$$\begin{cases}x=2a\,\mathrm{tg}\,\theta,\\ y=2a\cos^2\theta.\end{cases}$$



(12) 心脏线 $x^2+y^2+ax=a\sqrt{x^2+y^2}$,

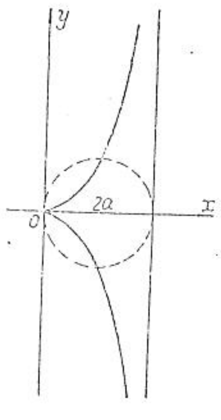
$\rho=a(1-\cos\theta)$.



面积 $=\frac{3}{2}\pi a^2$. 周长 $=8a$.

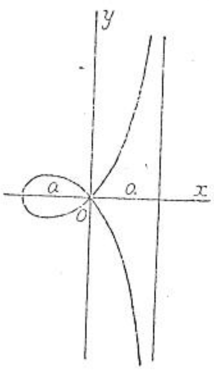
(7) 蔓叶线

$y^2=\frac{x^3}{2a-x}$.



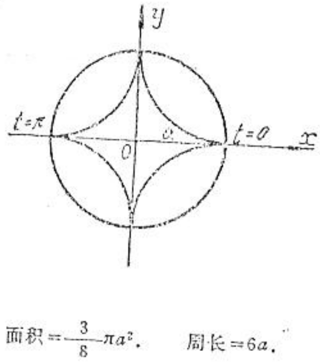
(8) 环索线

$y^2=x^2\frac{a+x}{a-x}$.



) 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$,

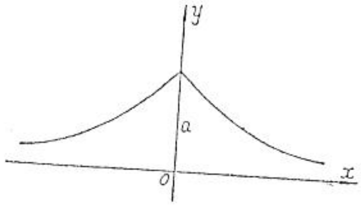
$$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t.\end{cases}$$



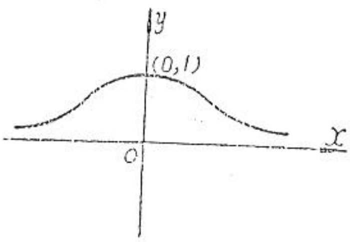
面积 $=\frac{3}{8}\pi a^2$. 周长 $=6a$.

) 曳物线 $x=a\ln\frac{a\pm\sqrt{a^2-y^2}}{y}\mp\sqrt{a^2-y^2}$,

$$\begin{cases}x=t-a\,\mathrm{th}\,\frac{t}{a},\\ y=a\,\mathrm{sech}\,\frac{t}{a}.\end{cases}$$



(15) 概率曲线 $y=e^{-x^2}$.



Conique en coordonnées polaires : $\rho = \dfrac{p}{1 - e\cos\theta}$

- e : excentricité
- p : demi-latus rectum

$\begin{cases} e < 1 & \text{ellipse } (e=0 : \text{cercle}) \\ e > 1 & \text{hyperbole} \\ e = 1 & \text{parabole.} \end{cases}$

- Excentricité $e := \dfrac{|FM|}{|HM|}$

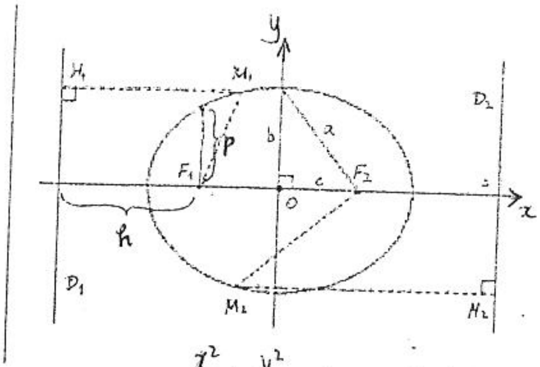
3.1 Ellipse ($e < 1$).

Propriétés

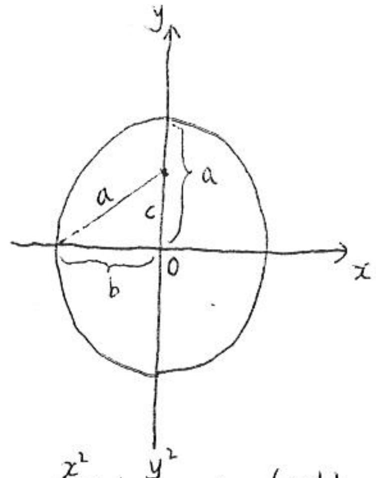
- Équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, avec $a \geq b$.
- Paramètres : $c^2 = a^2 - b^2$

$$c = ea$$
$$p = \frac{b^2}{a}$$
$$h = d(F_1, D_1) = \frac{b^2}{c}$$
$$p = eh$$

- Foyers : de coordonnés $(-c, 0)$ et $(c, 0)$.
- Directrice : d'équation $x = -c + h$.
- Équation cartésienne : $\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$



$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \geq b)$



$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \quad (a \geq b)$

- Équation polaire :

- $\rho = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$ (repère défini par le foyer F_1 et l'axe focal)
- $\rho^2 = \dfrac{b^2}{1 - e^2\cos^2\theta}$ (repère défini par le centre et l'axe focal)

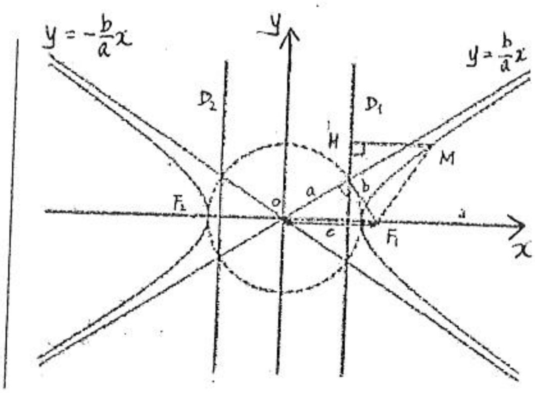
3.2 Hyperbole ($e > 1$).

Propriétés

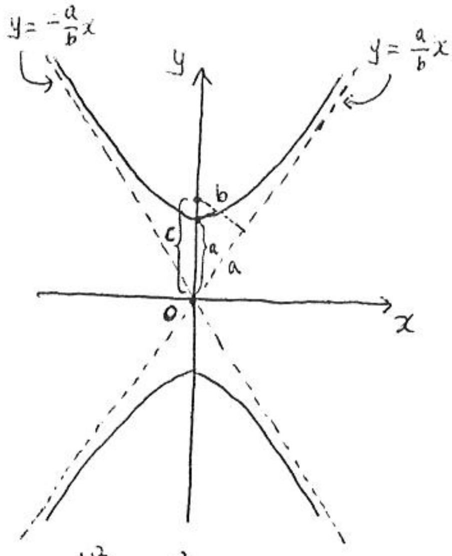
- Équation réduite : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, avec $a \geq b$.
- Paramètres : $c^2 = a^2 + b^2$

$$c = ea$$
$$p = \frac{b^2}{a}$$
$$h = d(F_1, D_1) = \frac{b^2}{c}$$
$$p = eh$$

- Foyers : de coordonnés $(-c, 0)$ et $(c, 0)$.
- Directrice : d'équation $x = -c + h$.
- Équation cartésienne : $\begin{cases} x(t) = a\,\mathrm{ch}\,t \\ y(t) = b\,\mathrm{sh}\,t \end{cases}$



$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

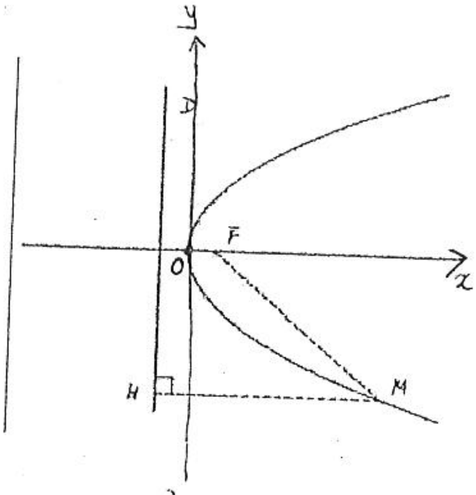


$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

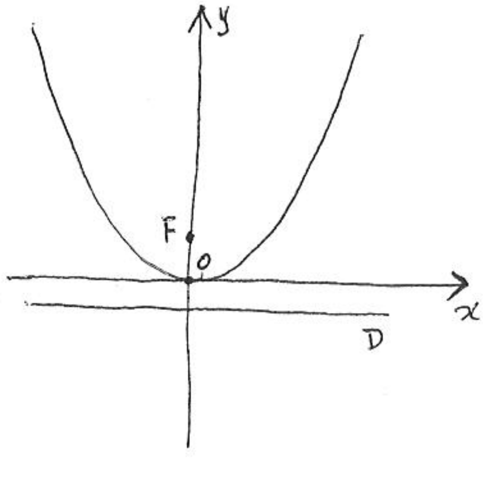
3.3 Parabole ($e = 1$).

Propriétés

- Équation réduite : $y^2 = 2px$.
- Équation cartésienne : $\begin{cases} x(t) = 2pt^2 \\ y(t) = 2pt \end{cases}$



$y^2 = 2px$



$x^2 = 2py$