DS 1 en Mathématiques L1 MPI, mardi 24 mars 2009 Année 2008-2009

Eva Löcherbach

D'autres méthodes que celles utilisées dans cette correction peuvent être utilisées, bien évidemment...

Exercice 1. Résoudre (de préference par la méthode de Gauss)

$$\begin{aligned} x+2y &= 5 \\ -x+z &= 5 \\ x+y+z &= 1. \end{aligned} \tag{1}$$

1. STEP 1

$$L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\begin{aligned} x+2y &= 5 \\ 2y+z &= 10 \\ -y+z &= -4. \end{aligned} \tag{2}$$

2. STEP2

$$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2} L_2$$

$$\begin{aligned} x+2y &= 5 \\ 2y+z &= 10 \\ \tfrac{3}{2}z &= 1. \end{aligned} \tag{3}$$

3. STEP 3 Donc :

$$z = \frac{2}{3},$$

donc

$$2y = 10 - \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{14}{3},$$

et finalement

$$x = 5 - 2y = -\frac{13}{3}.$$

Exercice 2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 010 \\ 001 \\ 000 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A^2 = A \cdot A$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 001 \\ 000 \\ 000 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soient A et B deux matrices $n \times n$. Est-ce que la relation

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$$

est vraie? Justifiez votre réponse.

C'est faux :

$$(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2,$$

et en général,

$$AB \neq BA.$$

Exercice 4. Calculer la matrice inverse A^{-1} de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le calcul :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

On effectue $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array},$$

puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$,

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{array},$$

puis on divise L_3 et L_2 par -2

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array},$$

puis $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_3$ et $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ donne

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array},$$

et on conclut en calculant $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}.$$

Donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

Résoudre par la méthode des determinants le système suivant :

$$\begin{aligned} x + 2y \quad &= 3 \\ -x + y \quad &= -5. \end{aligned}$$

1. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $det A = 1 \times 1 - (-1) \times 2 = 3.$

3. $$x = \frac{1}{3} \cdot det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \frac{13}{3}.$$

4. $$y = \frac{1}{3} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}.$$