DS 2 en Mathématiques L1 MPI, mardi 5 mai 2009 Année 2008-2009
Eva Löcherbach, G. Sagnol

**Corrigé du DS2**

**Exercice 1.**

- Rappeler la formule de changement de variables.
  Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, soit $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ montone et dérivable avec $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$. Alors

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx. \tag{1}$$

- Calculer

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx.$$

On pose $\varphi(t) = \cos(t), t \in [-\pi/2, 0]$. Alors on a $\alpha = -\pi/2$, $\beta = 0$, $\varphi'(t) = -\sin(t)$. Donc, en appliquant la formule,

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_{-\pi/2}^0 \sqrt{1-\cos^2(t)}(-\sin t)dt.$$

Or, $1 - \cos^2(t) = \sin^2(t)$. Sur $[-\pi/2, 0, ]$, sin est négatif, donc

$$\int_{-\pi/2}^0 \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\sin t)dt = \int_{-\pi/2}^0 (-\sin t)(-\sin t)dt = \int_{-\pi/2}^0 \sin^2(t)dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)dt.$$

On utilise que $\sin^2(t) = (1-\cos 2t)/2$ et obtient

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(t)dt = \int_0^{\pi/2} (1-\cos 2t)/2dt = \left[\frac{1}{2}x - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\pi/2} = \pi/4.$$

- Soit $f$ une fonction continue. Montrer en utilisant un changement de variables que

$$\int_a^b f(3+t)dt = \int_{3+a}^{3+b} f(t)dt.$$

On pose $\varphi(t) = 3 + t$, donc $\varphi'(t) = 1$, donc – en lisant la formule (1) de droite à gauche, et en remplaçant $a$ par $\alpha$ et $b$ par $\beta$ –

$$\int_a^b f(3+t)dt = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{a+3}^{b+3} f(x)dx.$$

**Exercice 2.**

- Rappeler la formule d'intégration par parties : Soient $u$ et $v$ deux fonctions dérivables. Alors
$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx. \tag{2}$$

- Utiliser une IPP pour calculer
$$\int_0^4 xe^{-3x}dx.$$
On choisit
$$u'(x) = e^{-3x}, u(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x}, v(x) = x, v'(x) = 1,$$
et on applique la formule (2), avec $a = 0, b = 4$ :
$$\int_0^4 xe^{-3x}dx = [-\frac{1}{3}e^{-3x}x]_0^4 - \int_0^4 -\frac{1}{3}e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}[e^{-3x}x]_0^4 + \frac{1}{3}\int_0^4 e^{-3x}dx.$$
Or,
$$\int_0^4 e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}[e^{-3x}]_0^4 = -\frac{1}{3}e^{-12} + \frac{1}{3}.$$
Donc on obtient au total
$$-\frac{1}{3}e^{-12} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}e^{-12} + \frac{1}{9} = -\frac{4}{9}e^{-12} + \frac{4}{9}.$$

- Utiliser une IPP pour trouver une primitive de la fonction arctan :
On pose $u'(x) = 1, u(x) = x, v(x) = \arctan, v'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Alors
$$\int_a^b \arctan x dx = [x \arctan x]_a^b - \int_a^b \frac{x}{1+x^2}dx.$$
Cette dernière expression est du type $\frac{1}{2}\int \frac{u'}{u}$, avec $u(x) = 1 + x^2$, $u'(x) = 2x$, donc
$$\int_a^b \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}[\log(1+x^2)]_a^b,$$
et donc : la primitive de arctan est
$$x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

**Exercice 3.** Soit $f$ une fonction continue et paire : $f(-x) = f(x)$. En déduire que $\int_{-a}^{a} xf(x)dx = 0$. Que vaut donc
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x dx?$$
On écrit
$$\int_{-a}^{a} xf(x)dx = \int_{-a}^{0} xf(x)dx + \int_{0}^{a} xf(x)dx.$$
Or, en utilisant le changement de variables $\varphi(t) = -t$ dans la première expression,
$$\int_{-a}^{0} xf(x)dx = \int_{a}^{0} (-t)f(-t)(-1)dt = \int_{0}^{a} (-t)f(-t)dt = \int_{0}^{a} (-t)f(t)dt = -\int_{0}^{a} tf(t)dt,$$
et cette dernière expression vaut $-\int_0^a xf(x)dx$. On en déduit que
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} e^{-x^2/2} x dx = 0,$$
car $f(x) = e^{-x^2/2}$ est paire.

**Exercice Bonus** (Hors barème, peut apporter des points supplémentaires)
On cherche à résoudre l'équation différentielle
$$y'' + 3y' = 2t - 1. \qquad (E)$$

1. Quelle est l'équation homogène associée à $(E)$ ? Donner les solutions $y_0(t)$ de cette équation homogène.
2. Donner une solution particulière $Y(t)$ de l'équation $(E)$, qu'on cherchera sous la forme d'un polynôme de degré 2.
3. Donner toutes les solutions de $(E)$.
4. Donner une solution de $(E)$ qui vérifie de plus $y(0) = 0$ et $y'(0) = \frac{4}{9}$ ?

**Corrigé :**

1. L'équation homogène s'obtient en remplaçant le second membre par 0:
$$y'' + 3y' = 0.$$
L'équation caractéristique correspondante est : $r^2 + 3r = 0$, qui a deux racines réelles distinctes $r_1 = 0$ et $r_2 = -3$. La solution de l'équation homogène est donc de la forme
$$y_0(t) = Ae^0 + Be^{-3t} = A + Be^{-3t},$$
où $A$ et $B$ sont des constantes.

2. On cherche $Y(t)$ sous la forme $Y(t) = at^2 + bt + c$, qu'on réinjecte dans $(E)$:
$$\begin{aligned} Y(t) &= at^2 + bt + c \\ Y'(t) &= 2at + b \\ Y''(t) &= 2a \\ Y'' + 3Y' &= 2t - 1 \qquad (E) \\ \iff 2a + 3(2at + b) &= 2t - 1 \\ \iff (6a)t \ + \ (2a + 3b) &= 2t - 1. \end{aligned}$$

On identifie alors les coefficients de ces deux polynomes de degré 1 :

$$\left\{\begin{array}{c} 6a = 2 \\ 2a + 3b = -1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{-1-2/3}{3} = -\frac{5}{9}. \end{array}\right.$$

Une solution particulière de $(E)$ est donc

$$Y(t) = \frac{1}{3}t^2 - \frac{5}{9}t.$$

3. Les solutions de $(E)$ s'obtiennent en sommant les solutions de l'equation homogène avec la solution particulière. Les solutions de $(E)$ sont donc toutes de la forme

$$y(t) = A + Be^{-3t} + \frac{1}{3}t^2 - \frac{5}{9}t,$$

avec $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$. (ou $\mathbb{C}$).

4. En remplaçant $y$ par l'expression ci-dessus, les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = \frac{4}{9}$ deviennent:

$$\left\{\begin{array}{c} A + B = 0 \\ -3B - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} B = \frac{4/9+5/9}{-3} = -\frac{1}{3} \\ A = -B = \frac{1}{3}, \end{array}\right.$$

et la fonction cherchée est

$$y(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}) + \frac{1}{3}t^2 - \frac{5}{9}t.$$