Université de Marne-la-Vallée **S4MIAS**
2ème semestre 2000/2001

TD 3 : Espaces euclidiens

Exercice 1
Soit B l'application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$B((x,y,z),(x',y',z')) \;=\; xx'+(a+5)yy'+(a^2+a+2)zz'+xz'+zx'+2(xy'+yx')+(a+3)(yz'+zy')$$

Pour quelles valeurs de a, B est-elle un produit scalaire?

Exercice 2
On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire euclidien.

1. Déterminer une base orthogonale du sous-espace vectoriel E engendré par $u_1 = (1,0,0,-1)$ et $u_2 = (-1,-1,1,1)$. En déduire une base orthonormale de E.
2. Déterminer le sous-espace vectoriel orthogonal de E, $E^\perp$. En déduire une base orthonormale de $E^\perp$.
   (a) Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$ autre que la base canonique.
   (b) Quelles sont les coordonnées de $u = (1,2,-1,-2)$ dans cette base.
   (c) Décomposer u en la somme d'un élement de E et d'un élement de $E^\perp$. Vérifier le théorème de Pythagore.

Exercice 3
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (1,2,-1,-2), \quad v_2 = (2,3,0,-1), \quad v_3 = (5,-2,-5,-2) \quad \text{et} \quad v_4 = (8,10,-10,4).$$

Montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^4$. En utilisant l'algorithme de Gram-Schmidt, donner une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4
Soit E un espace Euclidien de dimension n, F un sous-espace vectoriel de dimension $p \le n$.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un unique élement $y \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$. On pose alors $P_F(x) = y$ (c'est la projection orthogonale).
2. Montrer que pour tout $x \in E$, $z \in F$, $||x - z|| \ge ||x - P_F(x)||$.
3. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le vecteur $b = (b_1, b_2, b_3)$ et le plan Q donné par l'équation $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$. Décrire $Q^\perp$. En déduire la distance entre un point a et Q.
4. Soit $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ une base orthogonale de F. Montrer que

$$\forall x \in E, \quad P_F(x) \;=\; \sum_{i=1}^{p} \frac{< x, e_i >}{< e_i, e_i >} e_i.$$

Exercice 5
Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs

$$v_1 = (1, -1, 2) \quad \text{ et } v_2 = (1, 0, 1).$$

Déterminer

1. une équation de E,
2. une base orthonormale de E,
3. une base orthonormale de $E^\perp$,
4. la projection orthogonale de $(1, 1, 1)$ sur E.

Exercice 6
Dans $\mathbb{R}^2$, trouver 3 vecteurs tels que leurs angles pris 2 à 2 soient tous égaux à $2\pi/3$. Montrer que, dans $\mathbb{R}^n$, il n'est pas possible de trouver 3 vecteurs tels que leurs angles pris 2 à 2 soient tous strictement supérieur à $2\pi/3$ (considérer la norme de la somme de ces 3 vecteurs normés).

Exercice 7
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur à 2, muni du produit scalaire

$$< P, Q > = \int_0^1 P(x)Q(x)dx.$$

Soit F le sous-espace formé des polynômes de degré inférieur à 1 et $R(x) = x^2$.

1. Vérifier que $< P, Q >$ est bien un produit scalaire.
2. Déterminer a et b de telle sorte que le polynôme $x^2 - ax - b$ soit orthogonal à chacun des polynômes 1 et x.
3. Trouver le polynôme $S \in F$ le plus proche de $\mathbb{R}$.

Exercice 8
Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur à n, muni du produit scalaire

$$< P, Q > = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)dx.$$

1. Démontrer que

$$\int_{-1}^1 P^{(k)}(x)Q(x)dx \;=\; \left[\sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m P^{(k-m-1)}(x)Q^{(m)}(x)\right]_{-1}^1 \;+\; (-1)^k \int_{-1}^1 P(x)Q^{(k)}(x)dx$$

   .

2. Montrer que les polynômes

$$L_k(x) \;=\; \frac{k!}{(2k)!}\frac{d^k}{dx^k}\left((x^2-1)^k\right)$$

   forment, pour $k = 0, \ldots, n$, une base orthogonale de E, et que c'est la base qu'on trouve en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base canonique.