Université de Marne-la-Vallée **S4MIAS**
2ème semestre 2000/2001

TD 9 : Formes quadratiques

Exercice 1
Soit $u = (x, y)$ un vecteur de R^2. On définit 2 applications:

$$f_1(u) = x + y \qquad f_2(u) = x - y$$

1. Montrer que f_1 et f_2 sont deux formes linéaires qui forment une base du dual de R^2.
2. Quelles sont les coordonnées dans cette base des formes suivantes:

$$f(u) = x \qquad g(u) = 2x - 6y \qquad h(u) = \frac{1}{2}(x + y)$$

Exercice 2
Soit f_1 et f_2 deux formes linéaires sur un K-espace vectoriel E. Montrer que $Q(x) = f_1(x)f_2(x)$ est une forme quadratique.

Exercice 3
On considère les applications q_i $(i = 1, 2, 3)$ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ définies pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ par

$$q_1(P) = P(0).P(1).P(2) \quad , \quad q_2(P) = 2P(1)P'(1) \quad , \quad q_3(P) = |P(0)P(1)|.$$

Déterminer parmi ces applications lesquelles sont des formes quadratiques et dans ce cas, préciser leur forme polaire.

Exercice 4
Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$. Pour chacune des applications ci-dessous montrer qu'il s'agit d'une forme quadratique sur E, déterminer sa forme polaire et son noyau.

$$q_1 : f \mapsto \int_{-1}^{1} f^2(t)dt \quad , \quad q_2 : f \mapsto \int_{0}^{1} f^2(t) \quad , \quad q_3 : f \mapsto \int_{-1}^{1} \alpha(t)f^2(t) \quad \text{avec } \alpha \in E.$$

Exercice 5
Soit q l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}$, définie par $q(P) = 2P(1)P'(1)$.

1. q est-elle une forme quadratique ? Quelle est sa forme polaire ?
2. Déterminer la matrice de q dans la base $\{1, X, X^2\}$.
3. Déterminer le noyau de q, q est-elle dégénérée ?

Exercice 6
Soit $E = M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 sur $\mathbb{R}$, et Q l'application de $M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $Q(A) = \det(A)$.

1. Démontrer que Q est une forme quadratique sur $M_2(K)$. Ecrire la matrice associée.
2. Déterminer les noyau, rang et signature de Q.
3. Soit F l'ensemble des matrices de trace nulle. Montrer que c'est un sous espace vectoriel F de $M_2(K)$. Quel est l'orthogonal de F pour la forme quadratique Q?

Exercice 7
La forme quadratique q définie sur R^3 par: $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2xy + yz$ est-elle positive? dégénérée?

Exercice 8
Soit q la forme quadratique définie sur R^3 par: $q(u) = x^2 + y^2 + 5z^2 - 2yz - 2zx + 6xy$.

1. Déterminer la matrice A associée à q dans la base canonique.
2. Trouver la forme canonique à l'aide de la méthode de Gauss. Préciser le rang et la signature de q.
3. En déduire une base orthogonale relativement à q. Ecrire la matrice D de q dans cette base.
4. Si P est la matrice de passage de la base canonique à cette nouvelle base, vérifier que $D = {}^tPAP$.
5. Donner maintenant une base orthonormale (par rapport au produit scalaire usuel) de vecteurs propres de A.
6. En déduire une autre méthode pour déterminer le rang et la signature de q.

Exercice 9
Soit α et β deux réels. On définit la forme quadratique q de R^4 dans R par :

$$q(u) = 2\alpha(x_1x_2 + x_3x_4) - 2\beta(x_1x_3 + x_2x_4)$$

1. Ecrire la matrice associée
2. Trouver, suivant les valeurs de α et β, le rang et la signature.
3. Dans le cas où le rang est égal à 4, donner une base orthogonale relativement à q.

Exercice 10
Soit $E = M_2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 sur $\mathbb{R}$.

1. Soit Q l'application de $M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $Q(M) =$ Trace (M^2).
   (a) Montrer que Q est une forme quadratique. Déterminer la matrice de Q dans la base canonique.
   (b) Donner son rang, sa signature et son noyau.
   (c) Donner une base de E orthogonale relativement à Q.
2. On considère l'espace S des matrices M telle que ${}^tM = M$, et l'espace A des matrices M telle que ${}^tM = -M$.
   (a) Montrer que ce sont deux espaces vectoriels.
   (b) Montrer qu 'ils sont supplémentaires (Indication $M = \dfrac{M + {}^tM}{2} + \dfrac{M - {}^tM}{2}$).
   (c) Montrer que S et A sont deux espaces vectoriels orthogonaux relativement à Q.