C. R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série I, p. 91-96, 1989

Analyse fonctionnelle/*Functional Analysis*
(*Géométrie/Geometry*)

Cas limites dans des inégalités du type de Khinchine et applications géométriques

Vitali MILMAN et Alain PAJOR

Résumé — Soient $K \subset \mathbb{R}^n$ un corps convexe compact symétrique, $\theta \in \mathbb{R}^n$, $|\theta| = 1$ et $H_\theta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, \theta) = 0\}$. On montre les inégalités

$$\frac{e^{-1}}{2} \frac{\operatorname{vol} K}{\operatorname{vol}_{n-1}(K \cap H_\theta)} \leqq \exp\left(\frac{1}{\operatorname{vol} K}\int_K \log|(t, \theta)|\,dt\right) \leqq \frac{\operatorname{vol} K}{\operatorname{vol}_{n-1}(K \cap H_\theta)} \frac{e^{-\gamma}}{2}$$

où γ est la constante d'Euler et vol(.) désigne le volume. Les constantes dans ces deux inégalités sont asymptotiquement exactes. Dans le même esprit, on étudie des inégalités du type de Khinchine dans un cas limite et on donne une généralisation de l'inégalité d'Urysohn. On présente ensuite des applications à des estimations entropiques et des relations avec l'inégalité inverse de Brunn-Minkowski.

Limit case of Khinchine type inequalities and some geometric applications

Abstract — *Let $K \subset \mathbb{R}^n$ be a centrally symmetric convex compact body, $\theta \in \mathbb{R}^n$, $|\theta| = 1$ and $H_\theta = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, \theta) = 0\}$. We prove that*

$$\frac{e^{-1}}{2} \frac{\operatorname{vol} K}{\operatorname{vol}_{n-1}(K \cap H_\theta)} \leqq \exp\left(\frac{1}{\operatorname{vol} K}\int_K \log|(t, \theta)|\,dt\right) \leqq \frac{\operatorname{vol} K}{\operatorname{vol}_{n-1}(K \cap H_\theta)} \frac{e^{-\gamma}}{2}$$

where γ is the Euler constant and vol(.) denotes the volume. The both sides are asymptotically exact. In the same spirit, a limit case in Khinchine type inequalities and a generalization of Urysohn's inequality are discussed. We discuss also applications to entropy estimations and connections with the inverse Brunn-Minkowski inequality.

Abridged English Version — 1. Let K be a convex centrally symmetric compact body in $\mathbb{R}^n$. Denote $(.,.)$ the standard euclidean structure in $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{D}$ the unit euclidean ball and $|A| = \operatorname{vol} A$ (the standard Lebesgue volume in $\mathbb{R}^n$). Then for every linear function $f(t) = (t, \theta) = \sum_1^n \theta_i t_i$ ($\theta_i \in \mathbb{R}$, $t_i \in \mathbb{R}$, $1 \leqq i \leqq n$), it is known ([4]; for a more general presentation using Borell lemma [2], *see* [9], App. 3) that for $0 < p, q < \infty$

$$\left(\frac{1}{|K|}\int_K |(t, \theta)|^q\,dt\right)^{1/q} \leqq c_{p,q}\left(\frac{1}{|K|}\int_K |(t, \theta)|^p\,dt\right)^{1/p} \tag{1}$$

where constants $c_{p,q}$ depends on $0 < p < \infty$ and $0 < q < \infty$ only.

Of course, for $p > q$, (1) is just the Hölder inequality and $c_{p,q} = 1$. However, in the case $p < q$ we have "isomorphic inverse" to the Hölder inequalities which we call Khinchine type inequalities because for $K = [-1, 1]^n$ they are equivalent to the classical Khinchine inequalities (for Rademacher random variables). Note that a proof of (1) involves so called "concentration phenomenom" on K.

Similarly one may consider a normed space X and for any $x_i \in X$, to prove (*see* [9], App. 3) :

$$\left(\frac{1}{|K|}\int_K \left\|\sum_1^n t_i x_i\right\|^q dt\right)^{1/q} \leqq c_{p,q}\left(\frac{1}{|K|}\int_K \left\|\sum_1^n t_i x_i\right\|^p dt\right)^{1/p}$$

Note présentée par Alain CONNES.

0249-6291/89/03080091 $ 2.00