NOMBRES DE GELFAND ET SECTIONS EUCLIDIENNES DE GRANDE DIMENSION

A. PAJOR et N. TOMCZAK-JAEGERMANN

Soit $X = (\mathbb{R}^n, ||.||)$ un espace de Banach de dimension n. Nous considérons également sur $\mathbb{R}^n$, une structure euclidienne, dont nous noterons (x,y) le produit scalaire et $|.|$ la norme correspondante. L'espace dual X^* s'identifie alors naturellement à $(\mathbb{R}^n, ||.||_*)$ où l'on a posé $||x||_* = \sup\{(x,y) \; ; \; y \in B_X\}$, B_X désignant la boule unité de X.

Soit B_2^n la boule unité euclidienne et S^{n-1} la spère unité. On note μ la probabilité invariante par rotation sur S^{n-1} et on pose

$$M(X) = \left(\int_{S^{n-1}} ||x||^2 d\mu(\lambda)\right)^{1/2} \text{ et } M(X^*) = \left(\int_{S^{n-1}} ||x||_*^2 \, d\mu(x)\right)^{1/2}.$$

Soit V un convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$. On note V^* son polaire (au sens de la structure euclidienne considérée) et $(\mathbb{R}^n,V)$ l'espace de Banach associé à V. Suivant des notations similaires, on notera $M(V)$ et $M(V^*)$ les moyennes des normes associées.

Cette étude a été motivée par les travaux récents de V. Milman [M1], [M2]. Le principal résultat de cet exposé est le suivant :

<u>*Théorème 1*</u>. *Soit* $X = (\mathbb{R}^n, ||.||, |.|)$ *un espace de Banach de dimension* n*, muni*

d'une structure euclidienne. Pour tout $\lambda \in]0,1[$ *il existe un sous-espace* E *de* $\mathbb{R}^n$ *de dimension supérieure à* λn *tel que, pour tout* x *dans* E *on ait :*

$$|x| \leq K\, M(X^*)(1-\lambda)^{-1/2}\, ||x||$$

où K *est une constante universelle.*

Cette estimation est la meilleure possible (voir [P.T]). Pour tout convexe symétrique V de $\mathbb{R}^n$, on remarquera que $M(V^*)$ représente l'épaisseur moyenne de V. Le théorème 1 a la signification géométrique suivante :

$$d_k(V^*, \ell_2^n) \leq K(n/k)^{1/2} M(V^*),\ 1 \leq k \leq n,$$

où $d_k(V^*, \ell_2^n)$ désigne l'épaisseur de V^* au sens de Kolmogorov (voir [P.T]).

Le théorème 1 a une traduction naturelle en termes d'opérateurs. Rappelons quelques définitions. Pour tout opérateur $u : X \to Y$ entre deux espaces de Banach X et Y, les nombres de Gelfand sont définis par

$$c_k(u) = \inf\{||u|_Z|| \ ;\ Z < X,\ \text{codim}\ Z < k\}.$$

Pour tout opérateur $u : \ell_2^n \to Y$, on pose

$$\ell(u) = \left(\int ||u(x)||^2 d\gamma_n(x)\right)^{1/2}$$

où γ_n désigne la mesure gaussienne canonique sur $\mathbb{R}^n$. Enfin, pour tout opérateur borné $u : \ell_2 \to Y$, on pose

$$\ell(u) = \sup\{\ell(uv)\ ;\ v : \ell_2^n \to \ell_2,\ n \in \mathbb{N},\ ||v|| \leq 1\}.$$

Le résultat suivant est une conséquence simple du théorème 1 (voir [P.T]).

Théorème 2. Soit X *un espace de Banach et* $u : X \to \ell_2$ *un opérateur compact. On a alors l'inégalité :*

$$\sup_{k \geq 1} k^{1/2} c_k(u) \leq K\, \ell(u^*)$$