PLONGEMENT DE ℓ_1^K COMPLEXE DANS LES ESPACES DE BANACH

A. PAJOR

Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n fonctions à valeurs réelles ou complexes, définies sur un ensemble T et uniformément bornées par 1. On note $\|x\| = \sup\{|x(t)|; t \in T\}$, la norme uniforme de x sur T et $|I|$ le cardinal de l'ensemble I.

Soient $(\varepsilon_i)_{i=1}^{i=n}$ des variables de Bernoulli indépendantes prenant les valeurs ± 1. On pose :

$$M = \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{i=n} \varepsilon_i x_i \right\|.$$

Pour une partie I de $\{1,2,\ldots,n\}$, $|I| = k$, la base $(x_i)_{i \in I}$ est β^{-1}-isomorphe à la base usuelle de ℓ_1^k, signifie ici, que pour toute suite $(a_i)_{i \in I}$ du corps des scalaires, on a,

$$\left\| \sum_{i \in I} a_i x_i \right\| \geq \beta \sum_{i \in I} |a_i|.$$

Il est clair que si $(x_i)_{i \in I}$ est β^{-1}-isomorphe à la base $\ell_1^{|I|}$, alors la moyenne $M \geq \beta |I|$ (principe de contraction). On s'intéresse plus particulièrement dans cet exposé au cas extrémal où la moyenne $M \geq \delta n$. Dans ce cadre, J. Elton [1] a démontré dans le cas réel, qu'il existe une partie I de $\{1,2,\ldots,n\}$, $|I| \geq cn$ telle que $(x_i)_{i \in I}$ soit β^{-1}-isomorphe à la base de $\ell_1^{|I|}$, où β et c ne dépendent que de δ. On montre ici que ce résultat s'étend au cas complexe. Auparavant, on rappelle, dans son principe, la démonstration du théorème de Milman [2] (cas où $x_i(t) = \pm 1$), où apparait très clairement l'outil combinatoire, le lemme 1.

1. LE THEOREME DE MILMAN.

Le résultat suivant est dû à V.D. Milman [2], il a été inspiré par un théorème de Pisier [4] sur les ensembles de Sidon.

Théorème 1. *Soient* $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ *des fonctions sur un ensemble* T, *ne prenant que les valeurs* ± 1. *Il existe une partie* I *de* $\{1,2,\dots,n\}$ *telle que la base* $(x_i)_{i\in I}$ *soit isométrique à la base usuelle de* $\ell_1^{|I|}$ *et* $|I| \geq c\dfrac{M^2}{n\log(2n/M)}$, *où* c *est une constante universelle.*

Soit $S = \{(x_i(t))_{i=1}^{i=n}\ ;\ t \in T\} \subset \{-1,1\}^n$. Notons P^I la projection naturelle de $\{-1,1\}^n$ sur $\{-1,1\}^I$. Il est clair que si $P^I S = \{-1,1\}^I$, alors $(x_i)_{i\in I}$ est isométrique à la base usuelle de $\ell_1^{|I|}$.

On pose $\phi(n,k) = \sum_{0\leq i<k} C_n^i$, $0 \leq k \leq n$.

La démonstration du théorème 1 s'articule sur les deux lemmes suivants. Le premier est dû à Sauer [5], Shelah [6] et Vapnik et Cervonenkis [7] indépendamment.

Lemme 1. *Soit* S *une partie de* $\{-1,1\}^n$ *telle que* $|S| > \phi(n,k)$, *il existe alors une partie* I *de* $\{1,2,\dots,n\}$, $|I| \geq k$ *telle que* $P^I S = \{-1,1\}^I$.

Lemme 2. $M \leq c\sqrt{n\,\mathrm{Log}|S|}$ *où* c *est une constante universelle.*

On notera que $\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\| = \sup\{|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i s_i|\ ;\ (s_i)_{i=1}^{i=n} \in S\}$.

Le lemme 2 est alors une estimation sous-gaussienne qui résulte de l'inégalité de Bernstein

$$P(|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i| > t\sqrt{n}) \leq 2\,e^{-t^2/2}.$$