Les équations aux dérivées partielles de types elliptiques et paraboliques ont été étudiées depuis longtemps et le cas de problèmes linéaires à données H^{-1} (elliptique) ou $L^2(0,T;H^{-1})$ (parabolique), cadre « variationnel », est bien connu. Il y a existence et unicité dans les « bons espaces » et les équations sont formulées de la façon suivante (où Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$) : pour une équation elliptique avec conditions aux limites de Dirichlet et $f \in H^{-1}(\Omega)$, on cherche (Lax-Milgram [14]) u vérifiant

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega (A\nabla u)\nabla\varphi = \langle f, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

où A est une matrice bornée et coercitive, et pour une équation parabolique avec $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, on cherche (Lions-Magenes [17]) u vérifiant

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \quad u_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\ \displaystyle\int_0^T \langle u_t, \varphi\rangle + \int_0^T\!\!\int_\Omega (A\nabla u)\nabla\varphi = \int_0^T \langle f, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Les hypothèses sur u entraînent que $u \in C(0,T;L^2(\Omega))$, la condition initiale a donc bien un sens.

Si l'on considère le problème elliptique dans le cas où les données ne sont plus H^{-1}, cette formulation n'est plus adaptée. Pour $f \in M(\overline{\Omega}) = (C(\overline{\Omega}))'$, espace de mesures, Stampacchia [26] a proposé en 1965 une méthode donnant dans le cas linéaire existence et unicité des solutions d'une équation elliptique (nous la précisons dans [24]). Cette méthode utilise la dualité (et un résultat de régularité) et conduit à la formulation suivante

$$(0.1) \qquad \begin{cases} u \in \displaystyle\bigcap_{q < \frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega) \\ -\langle \mathrm{div}(A^t\nabla\varphi), u\rangle = \displaystyle\int_\Omega \varphi\, df \\ \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \quad \text{tel que} \quad \mathrm{div}(A^t\nabla\varphi) \in \bigcup_{r>N} W^{-1,r}(\Omega). \end{cases}$$

La formulation faible « classique » serait plutôt

$$(0.2) \qquad \begin{cases} u \in \displaystyle\bigcap_{q < \frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega (A\nabla u)\nabla\varphi = \int_\Omega \varphi\, df \qquad \forall \varphi \in \bigcup_{r>N} W_0^{1,r}(\Omega). \end{cases}$$

Comme $W_0^{1,r}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, et $\varphi \in W_0^{1,r}(\Omega)$ implique $\mathrm{div}(A^t\nabla\varphi) \in W^{-1,r}(\Omega)$, les fonctions test de (0.2) peuvent aussi être choisies commes fonctions test pour (0.1), mais la réciproque est fausse. Aussi (0.2) n'assure pas l'unicité des solutions comme nous allons le voir, alors que (0.1) l'assure.

Pour $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ et $p > 1$, c'est-a-dire, ici encore, dans le cadre « variationnel », les équations non-linéaires de la forme

$$- \operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) = f$$

où $a(x,s,\xi)$ défini un opérateur elliptique ont été étudiées par Leray et Lions (1965) (voir [15]), qui ont montré qu'il y avait existence d'une solution u vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla\varphi = \langle f, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{array} \right. \tag{0.3}$$

et pour le cas parabolique (Lions [16]) avec $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ il existe u vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \quad u_t \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)) \\ \displaystyle\int_0^T \langle u_t, \varphi\rangle + \int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,u,\nabla u)\nabla\varphi = \int_0^T \langle f,\varphi\rangle \qquad \forall\varphi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \\ u(0) = u_0 \end{array} \right.$$

(les hypothèses sur u entraînent ici aussi $u \in C(0,T;L^2(\Omega))$).

Lorsque a ne dépend pas de u, il y a unicité de la solution, dans le cas contraire, pour les équation elliptiques, Boccardo, Gallouët et Murat [7] ont montré que si a est lipschitzienne en u, il y a unicité des solutions de (0.3) pour $p \le 2$ et il existe des contre-exemples à l'unicité pour $p > 2$.

Cependant, pour les équations elliptiques et $f \in M(\overline{\Omega})$, espace de mesures, la méthode de Stampacchia ne fonctionne pas avec des opérateurs non linéaires aussi, beaucoup plus récemment (1989), Boccardo et Gallouët [5] ont construit par approximation une solution pour les équations elliptiques et paraboliques avec conditions aux limites homogènes de Dirichlet. Nous avons montré l'existence d'une solution pour des conditions non-homogènes de Dirichlet, Neumann et Fourier (voir [21]). La formulation que vérifie la solution est proche de celle des distributions : pour l'équation elliptique dans le cas de Dirichlet homogène, et $f \in M(\overline{\Omega})$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \displaystyle\bigcap_{q < \frac{N(p-1)}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla\varphi = \int_\Omega \varphi\, df \qquad \forall\varphi \in \bigcup_{r > N} W_0^{1,r}(\Omega) \end{array} \right.$$

et pour l'équation parabolique avec $f \in M([0,T]\times\overline{\Omega})$ et $u_0 \in M(\overline{\Omega})$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \displaystyle\bigcap_{q < \frac{(p-1)(N+1)+1}{N+1}} L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)) \\ \displaystyle -\int_0^T \langle u, \varphi_t\rangle - \int_\Omega \varphi(0)\, du_0 + \int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,u,\nabla u)\nabla\varphi = \int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi\, df. \\ \forall\varphi \in C([0,T]\times\overline{\Omega}) \quad \text{tel que} \\ \qquad\qquad \varphi \in \bigcup_{r > N} L^r(0,T;W_0^{1,r}(\Omega)), \quad \varphi_t \in \bigcup_{r > N+2} L^r(0,T;W^{-1,r}(\Omega)). \end{array} \right.$$

Dans le cas où a ne dépend pas de u, l'existence d'une solution a d'abord été donnée dans [5] (et plus rapidement dans [9]) avec une hypothèse technique sur a afin d'avoir la convergence presque partout de ∇u_n vers ∇u. Cette condition a été levée dans [6], et le résultat a été montré pour $a(x, u, \nabla u)$ dans le cas elliptique (voir [13, 12, 21]). Dans le cas parabolique avec $a(t, x, \nabla u)$, ceci a été fait par Dall'Aglio et Orsina [11], puis pour $a(t, x, u, \nabla u)$ dans [4].

Nous avons montré, dans[24], que dans le cas elliptique linéaire la méthode par approximation utilisée pour montrer l'existence conduit à la même solution que celle de Stampacchia. Cependant la formulation (0.2) est trop faible pour assurer l'unicité comme nous le prouvons (voir [24]) avec le contre-exemple de Serrin [25], qui permet d'obtenir, dans le cas linéaire, une solution non nulle pour un problème à données nulles.

Pour remédier à cela, dans le cas elliptique avec conditions aux limites homogènes de Dirichlet, où les données sont $L^1(\Omega)$ (ce qui est bien sûr plus restrictif que $M(\overline{\Omega})$), trois approches ont été utilisées.

Dall'Aglio [10] a montré que, même pour un problème non-linéaire, la méthode par approximation conduit à une unique solution appelée SOLA (Solution Obtenue comme Limite d'Approximations).

Bénilan, Boccardo, Gallouët, Gariepy, Pierre et Vazquez [2] définissent la notion de solution *entropique* (ici $p > 2 - 1/N$ pour simplifier) :

$$\begin{cases} u \in W^{1,1}(\Omega), \qquad T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \forall k > 0 \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, \nabla u) \nabla T_k(u - \varphi) \leq \int_\Omega f\, T_k(u - \varphi) \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega). \end{cases}$$

Il y a continuité de la solution par rapport, d'une part, au second membre (Vazquez [27]), et d'autre part, à l'opérateur a ([22] où nous l'avons montré). De plus l'existence et l'unicité de solutions entropiques a été montrée pour des conditions aux limites homogènes plus générales et en particulier de Neumann et Fourier par Andreu, Mazón, Segura de León et Toledo [1].

Enfin, Lions et Murat [18, 20] ont introduit une autre notion : celle de solution *renormalisée* (suite aux solutions du même nom, dues à Di Perna et Lions, pour l'équation de Boltzmann). Elle vérifie (ici aussi, $p > 2 - 1/N$ pour simplifier) :

$$\begin{cases} u \in W^{1,1}(\Omega), \qquad T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \forall k > 0 \\ \displaystyle\lim_{h \to +\infty} \int_{h \leq |u| \leq k+h} |\nabla u|^p = 0 \quad \forall k > 0 \\ \displaystyle\int_\Omega S(u)\, a(x, \nabla u) \nabla \varphi + \int_\Omega S'(u)\, \varphi\, a(x, \nabla u) \nabla u = \int_\Omega f\, S(u)\, \varphi \\ \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \end{cases}$$

pour toute fonction S régulière à variable réelle et à support compact.

Ces trois définitions sont équivalentes puisqu'elles conduisent à la même (unique) solution.

Dans le cas parabolique et $p > 2 - 1/(N+1)$, nous avons, de façon analogue, défini la solution *entropique* d'une équation parabolique (voir [23]) :

$$\begin{cases} u \in C(0,T;L^1(\Omega)) \cap L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega)), \qquad T_k(u) \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \forall k > 0, \\ \displaystyle\int_\Omega \Theta_k(u-\varphi)(T) - \int_\Omega \Theta_k(u_0 - \varphi(0)) - \int_0^T \langle \varphi_t, T_k(u-\varphi)\rangle \\ \displaystyle\qquad\qquad\qquad + \int_0^T\int_\Omega a(t,x,\nabla u)\nabla T_k(u-\varphi) \le \int_\Omega f\, T_k(u-\varphi) \\ \forall \varphi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(]0,T[\times\Omega) \cap C(0,T;L^1(\Omega)) \\ \qquad \text{tel que} \quad \varphi_t \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)). \end{cases}$$

Blanchard et Murat [3] ont aussi défini une solution *renormalisée* qui vérifie

$$\begin{cases} u \in C(0,T;L^1(\Omega)) \cap L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega)), \qquad T_k(u) \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \\ \displaystyle\lim_{h\to+\infty} \int_0^T \int_{h \le |u| \le k+h} |\nabla u|^p = 0 \quad \forall k > 0, \\ u(0) = u_0, \\ \displaystyle -\int_0^T \langle S(u), \varphi_t\rangle + \int_0^T\int_\Omega S'(u)\, a(t,x,\nabla u)\nabla\varphi \\ \displaystyle\qquad\qquad + \int_0^T\int_\Omega S''(u)\,\varphi\, a(t,x,\nabla u)\nabla u = \int_0^T\int_\Omega f\, S'(u)\,\varphi \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \end{cases}$$

pour tout S' régulière à support compact.

Ces deux définitions sont elles aussi équivalentes car il y a unicité des solutions.

Les critères d'unicité (SOLA, solutions entropiques et renormalisées) fonctionnent pour $f \in L^1(\Omega)$ car $T_k(u)$ et $S(u)\varphi \in L^\infty(\Omega)$ cependant l'unicité des solutions entropiques a été étendue aux seconds membres mesure ne chargeant pas les ensembles de p-capacités nulles par Boccardo, Gallouët et Orsina [8], c'est à-dire pour un second membre μ vérifiant pour B un borélien

$$\mathrm{cap}_p(B,\Omega) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(B) = 0,$$

ce qui est équivalent (voir [8]), pour une mesure μ, à $\mu \in L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$.

Dans le cas où le second membre est une mesure quelconque, on ne sait plus, en général, démontrer que la notion de SOLA assure l'unicité, et les solutions *entropiques* et *renormalisées* ne sont plus définies. Pour les équations elliptiques, de nouvelles définitions équivalentes ont été proposées par Dal Maso, Murat, Orsina et Prignet [19] : elles généralisent les trois notions précédentes, mais ne conduisent pas (encore) à l'unicité.

Une mesure $f \in M(\overline{\Omega})$ peut être décomposée en $f = \mu_0 + \lambda^+ - \lambda^-$ où μ_0 est une mesure ne chargeant pas les ensembles de p-capacités nulles ($\mu_0 \in L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$) et λ^+ et λ^- les parties positives et negatives de $f - \mu_0$. Voici une des formulations vérifiée par u :

$$\int_\Omega a(x, \nabla u)\nabla w \, dx = \int_\Omega w \, d\mu_0 + \int_\Omega w^{+\infty} \, d\lambda^+ - \int_\Omega w^{-\infty} \, d\lambda^-$$

pour tout $w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tel qu'il existe $k > 0$, $w^{+\infty}$ et $w^{-\infty} \in W^{1,r}(\overline{\Omega})$, avec $r > N$, tels que

$$\begin{cases} w = w^{+\infty} & \text{cap}_p\text{-quasi partout sur } \{u > k\}, \\ w = w^{-\infty} & \text{cap}_p\text{-quasi partout sur } \{u < -k\}. \end{cases}$$

References

[1]F. Andreu, J. M. Mazón, S. Segura de León, J. Toledo, *Quasi-linear elliptic and parabolic equations in L^1 with nonlinear boundary conditions*, à paraître à Advances in Math. Sc. and Appl.

[2]P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J.L. Vazquez, *An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. **22** (1995), 241–273.

[3]D. Blanchard, F. Murat, *Renormalized solutions of non linear parabolic problems with L^1 data : Existence and uniqueness*, soumis.

[4]L. Boccardo, A. Dall'Aglio, T. Gallouët, L. Orsina, *Regularity results for nonlinear parabolic equations*, à paraître à J. Funct. Anal.

[5]L. Boccardo, T. Gallouët, *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving mesure data*, J. Funct. Anal. **87** (1989), 149–169.

[6]L. Boccardo, T. Gallouët, *Nonlinear elliptic equations with right hand side measures*, Comm. P.D.E. **17** (1992), 641–655.

[7]L. Boccardo, T. Gallouët, F. Murat, *Unicité de la solution de certaines équations non linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I **315** (1992), 1159–1164.

[8]L. Boccardo, T. Gallouët, L. Orsina, *Existence and uniqueness of entropy solutions for non linear elliptic equations with measure data*, Ann. Inst. Henri Poincaré **13** (1996), 539–551.

[9]L. Boccardo, T. Gallouët, J.L. Vazquez, *Nonlinear equations in $\mathbf{R}^N$ without growth restrictions on the data*, J. Diff. Eqns. **105** (1993), 334–363.

[10]A. Dall'Aglio, *Approximated solutions of equations with L^1 data. Application to the H-convergence of quasi-linear parabolic equations*, Ann. Mat. Pura Appl. **170** (1996), 207–240.

[11]A. Dall'Aglio, L. Orsina, *Existence results for some nonlinear parabolic equations with nonregular data*, J. Diff. Int. Eq. **5** (1992), 1335–1354.

[12]T. Del Vecchio, *Nonlinear elliptic equations with measure data*, Potential Analysis **4** (1995), 185–204.

[13]P. Fabrie, T. Gallouët, *Modelling wells in porous media flows*, en préparation.

[14]P.D. Lax, A.N. Milgram, *Parabolic equations*, Contributions to the theory of partial differential equations (L. Bers, S. Bochner, F. John, eds.), Annals of mathematics studies, vol. 33, Princeton University Press, 1954, 167–190.

[15]J. Leray, J.-L. Lions, *Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 97–107.

[16]J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod et Gauthier-Villars, 1969.

[17]J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, 1968.

[18]P.-L. Lions, F. Murat, *Sur les solutions renormalisées d'équations elliptiques non linéaires*, en préparation.

[19]D. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina, A. Prignet, *Renormalized solutions with right hand side measure*, en préparation.

[20]F. Murat, *Soluciones renormalizadas de EDP elipticas no lineales*, Prépublication du laboratoire d'Analyse numérique de l'université Paris VI, France, 1993.

[21]A. Prignet, *Conditions aux limites non homogènes pour des problèmes elliptiques avec second membre mesure*, à paraître à Ann. Fac. Sciences de Toulouse.

[22]A. Prignet, *Continuité par rapport à l'opérateur des solutions entropiques de problèmes elliptiques à seconds membres* L^1, en préparation.

[23]A. Prignet, *Existence and uniqueness of "entropy" solutions of parabolic problems with* L^1 *data*, à paraître à J. Nonlin. Anal. TMA.

[24]A. Prignet, *Remarks on existence and uniqueness of solutions of elliptic problems with right-hand side measures*, Rendiconti di Matematica **15** (1995), 321–337.

[25]J. Serrin, *Pathological solutions of elliptic differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. (1964), 385–387.

[26]G. Stampacchia, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **15** (1965), 189–258.

[27]J.L. Vazquez, *Entropy solutions and the uniqueness problem for nonlinear second-order elliptic equations*, Nonlinear partial differential equations (A. Ben Kirane, J.P. Gossez, eds.), vol. 343, Addison-Wesley Longman, 1996, 179–203.