Alain Prignet

Problèmes elliptiques et paraboliques dans un cadre non variationnel

9 janvier 1997

UMPA-ENS Lyon
46 Allée d'Italie
69364 Lyon Cedex 07
France

Table des Matières

Introduction

Les équations aux dérivées partielles de types elliptiques et paraboliques ont été étudiées depuis longtemps et le cas de problèmes linéaires à données H^{-1} (elliptique) ou $L^2(0,T;H^{-1})$ (parabolique), cadre « variationnel », est bien connu. Il y a existence et unicité dans les « bons espaces » et les équations sont formulées de la façon suivante (où Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$) : pour une équation elliptique avec conditions aux limites de Dirichlet et $f \in H^{-1}(\Omega)$, on cherche (Lax-Milgram [32]) u vérifiant

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega (A\nabla u)\nabla\varphi = \langle f, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

où A est une matrice bornée et coercitive, et pour une équation parabolique avec $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, on cherche (Lions-Magenes [35]) u vérifiant

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \quad u_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \\ \displaystyle\int_0^T \langle u_t, \varphi\rangle + \int_0^T\int_\Omega (A\nabla u)\nabla\varphi = \int_0^T \langle f, \varphi\rangle \qquad \forall \varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Les hypothèses sur u entraînent que $u \in C(0,T;L^2(\Omega))$, la condition initiale a donc bien un sens.

Si l'on considère le problème elliptique dans le cas où les données ne sont plus H^{-1}, cette formulation n'est plus adaptée. Pour $f \in M(\overline{\Omega}) = (C(\overline{\Omega}))'$, espace de mesures, Stampacchia [48] a proposé en 1965 une méthode donnant dans le cas linéaire existence et unicité des solutions d'une équation elliptique (nous la précisons dans [43]). Cette méthode utilise la dualité (et un résultat de régularité) et conduit à la formulation suivante

$$(1) \qquad \begin{cases} u \in \displaystyle\bigcap_{q < \frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega) \\ -\langle \operatorname{div}(A^t\nabla\varphi), u\rangle = \displaystyle\int_\Omega \varphi\, df \\ \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \quad \text{tel que} \quad \operatorname{div}(A^t\nabla\varphi) \in \bigcup_{r>N} W^{-1,r}(\Omega). \end{cases}$$

La formulation faible « classique » serait plutôt

$$(2)\qquad \begin{cases} u \in \displaystyle\bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega (A\nabla u)\nabla\varphi = \int_\Omega \varphi\, df \qquad \forall\varphi \in \bigcup_{r>N} W_0^{1,r}(\Omega). \end{cases}$$

Comme $W_0^{1,r}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, et $\varphi \in W_0^{1,r}(\Omega)$ implique $\operatorname{div}(A^t\nabla\varphi) \in W^{-1,r}(\Omega)$, les fonctions test de (2) peuvent aussi être choisies commes fonctions test pour (1), mais la réciproque est fausse. Aussi (2) n'assure pas l'unicité des solutions comme nous allons le voir, alors que (1) l'assure.

Pour $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ et $p>1$, c'est-a-dire, ici encore, dans le cadre « variationnel », les équations non-linéaires de la forme

$$-\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) = f$$

où $a(x,s,\xi)$ défini un opérateur elliptique ont été étudiées par Leray et Lions (1965) (voir [33]), qui ont montré qu'il y avait existence d'une solution u vérifiant

$$(3)\qquad \begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla\varphi = \langle f,\varphi\rangle \qquad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

et pour le cas parabolique (Lions [34]) avec $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ il existe u vérifiant

$$\begin{cases} u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \quad u_t \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)) \\ \displaystyle\int_0^T \langle u_t,\varphi\rangle + \int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,u,\nabla u)\nabla\varphi = \int_0^T \langle f,\varphi\rangle \qquad \forall\varphi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

(les hypothèses sur u entraînent ici aussi $u \in C(0,T;L^2(\Omega))$).

Lorsque a ne dépend pas de u, il y a unicité de la solution, dans le cas contraire, pour les équation elliptiques, Boccardo, Gallouët et Murat [13] ont montré que si a est lipschitzienne en u, il y a unicité des solutions de (3) pour $p \le 2$ et il existe des contre-exemples à l'unicité pour $p>2$.

Cependant, pour les équations elliptiques et $f \in M(\overline{\Omega})$, espace de mesures, la méthode de Stampacchia ne fonctionne pas avec des opérateurs non linéaires aussi, beaucoup plus récemment (1989), Boccardo et Gallouët [11] ont construit par approximation une solution pour les équations elliptiques et paraboliques avec conditions aux limites homogènes de Dirichlet. Nous avons montré l'existence d'une solution pour des conditions non-homogènes de Dirichlet, Neumann et Fourier (voir

[41]). La formulation que vérifie la solution est proche de celle des distributions : pour l'équation elliptique dans le cas de Dirichlet homogène, et $f \in M(\overline{\Omega})$

$$\begin{cases} u \in \displaystyle\bigcap_{q<\frac{N(p-1)}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla\varphi = \int_\Omega \varphi\, df \qquad \forall\varphi \in \bigcup_{r>N} W_0^{1,r}(\Omega) \end{cases}$$

et pour l'équation parabolique avec $f \in M([0,T]\times\overline{\Omega})$ et $u_0 \in M(\overline{\Omega})$

$$\begin{cases} u \in \displaystyle\bigcap_{q<\frac{(p-1)(N+1)+1}{N+1}} L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega)) \\ \displaystyle -\int_0^T \langle u,\varphi_t\rangle - \int_\Omega \varphi(0)\,du_0 + \int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,u,\nabla u)\nabla\varphi = \int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi\, df. \\ \forall\varphi \in C([0,T]\times\overline{\Omega}) \quad \text{tel que} \\ \qquad\qquad \varphi \in \bigcup_{r>N} L^r(0,T;W_0^{1,r}(\Omega)), \quad \varphi_t \in \bigcup_{r>N+2} L^r(0,T;W^{-1,r}(\Omega)). \end{cases}$$

Dans le cas où a ne dépend pas de u, l'existence d'une solution a d'abord été donnée dans [11] (et plus rapidement dans [15]) avec une hypothèse technique sur a afin d'avoir la convergence presque partout de ∇u_n vers ∇u. Cette condition a été levée dans [12], et le résultat a été montré pour $a(x,u,\nabla u)$ dans le cas elliptique (voir [26, 25, 41]). Dans le cas parabolique avec $a(t,x,\nabla u)$, ceci a été fait par Dall'Aglio et Orsina [24], puis pour $a(t,x,u,\nabla u)$ dans [10].

Nous avons montré, dans[43], que dans le cas elliptique linéaire la méthode par approximation utilisée pour montrer l'existence conduit à la même solution que celle de Stampacchia. Cependant la formulation (2) est trop faible pour assurer l'unicité comme nous le prouvons (voir [43]) avec le contre-exemple de Serrin [46], qui permet d'obtenir, dans le cas linéaire, une solution non nulle pour un problème à données nulles.

Pour remédier à cela, dans le cas elliptique avec conditions aux limites homogènes de Dirichlet, où les données sont $L^1(\Omega)$ (ce qui est bien sûr plus restrictif que $M(\overline{\Omega})$), trois approches ont été utilisées.

Dall'Aglio [23] a montré que, même pour un problème non-linéaire, la méthode par approximation conduit à une unique solution appelée SOLA (Solution Obtenue comme Limite d'Approximations).

Bénilan, Boccardo, Gallouët, Gariepy, Pierre et Vazquez [4] définissent la notion de solution *entropique* (ici $p>2-1/N$ pour simplifier) :

$$\begin{cases} u \in W^{1,1}(\Omega), \qquad T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \forall k>0 \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla T_k(u-\varphi) \le \int_\Omega f\, T_k(u-\varphi) \quad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega). \end{cases}$$

Il y a continuité de la solution par rapport, d'une part, au second membre (Vazquez [49]), et d'autre part, à l'opérateur a ([42] où nous l'avons montré). De plus l'existence et l'unicité de solutions entropiques a été montrée pour des conditions aux limites homogènes plus générales et en particulier de Neumann et Fourier par Andreu, Mazón, Segura de León et Toledo [3].

Enfin, Lions et Murat [36, 39] ont introduit une autre notion : celle de solution *renormalisée* (suite aux solutions du même nom, dues à Di Perna et Lions, pour l'équation de Boltzmann). Elle vérifie (ici aussi, $p>2-1/N$ pour simplifier) :

$$\begin{cases} u \in W^{1,1}(\Omega), \qquad T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \forall k>0 \\ \lim\limits_{h\to+\infty} \displaystyle\int_{h\le|u|\le k+h} |\nabla u|^p = 0 \quad \forall k>0 \\ \displaystyle\int_\Omega S(u)\, a(x,\nabla u)\nabla\varphi + \int_\Omega S'(u)\,\varphi\, a(x,\nabla u)\nabla u = \int_\Omega f\, S(u)\,\varphi \\ \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega) \end{cases}$$

pour toute fonction S régulière à variable réelle et à support compact.

Ces trois définitions sont équivalentes puisqu'elles conduisent à la même (unique) solution.

Dans le cas parabolique et $p>2-1/(N+1)$, nous avons, de façon analogue, défini la solution *entropique* d'une équation parabolique (voir [44]) :

$$\begin{cases} u \in C(0,T;L^1(\Omega))\cap L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega)), \qquad T_k(u)\in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \forall k>0, \\ \displaystyle\int_\Omega \Theta_k(u-\varphi)(T) - \int_\Omega \Theta_k(u_0-\varphi(0)) - \int_0^T \langle \varphi_t, T_k(u-\varphi)\rangle \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,\nabla u)\nabla T_k(u-\varphi) \le \int_\Omega f\, T_k(u-\varphi) \\ \forall \varphi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))\cap L^\infty(]0,T[\times\Omega)\cap C(0,T;L^1(\Omega)) \\ \qquad \text{tel que} \quad \varphi_t \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)). \end{cases}$$

Blanchard et Murat [8] ont aussi défini une solution *renormalisée* qui vérifie

$$\begin{cases} u \in C(0,T;L^1(\Omega))\cap L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega)), \qquad T_k(u)\in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)), \\ \lim\limits_{h\to+\infty} \displaystyle\int_0^T\!\!\int_{h\le|u|\le k+h} |\nabla u|^p = 0 \quad \forall k>0, \\ u(0)=u_0, \\ -\displaystyle\int_0^T \langle S(u),\varphi_t\rangle + \int_0^T\!\!\int_\Omega S'(u)\, a(t,x,\nabla u)\nabla\varphi \\ \qquad + \displaystyle\int_0^T\!\!\int_\Omega S''(u)\,\varphi\, a(t,x,\nabla u)\nabla u = \int_0^T\!\!\int_\Omega f\, S'(u)\,\varphi \qquad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega) \end{cases}$$

pour tout S' régulière à support compact.

Ces deux définitions sont elles aussi équivalentes car il y a unicité des solutions.

Les critères d'unicité (SOLA, solutions entropiques et renormalisées) fonctionnent pour $f \in L^1(\Omega)$ car $T_k(u)$ et $S(u)\varphi \in L^\infty(\Omega)$ cependant l'unicité des solutions entropiques a été étendue aux seconds membres mesure ne chargeant pas les ensembles de p-capacités nulles par Boccardo, Gallouët et Orsina [14], c'est à-dire pour un second membre μ vérifiant pour B un borélien

$$\mathrm{cap}_p(B,\Omega) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(B) = 0,$$

ce qui est équivalent (voir [14]), pour une mesure μ, à $\mu \in L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$.

Dans le cas où le second membre est une mesure quelconque, on ne sait plus, en général, démontrer que la notion de SOLA assure l'unicité, et les solutions *entropiques* et *renormalisées* ne sont plus définies. Pour les équations elliptiques, de nouvelles définitions équivalentes ont été proposées par Dal Maso, Murat, Orsina et Prignet [22] : elles généralisent les trois notions précédentes, mais ne conduisent pas (encore) à l'unicité.

Une mesure $f \in M(\overline{\Omega})$ peut être décomposée en $f = \mu_0 + \lambda^+ - \lambda^-$ où μ_0 est une mesure ne chargeant pas les ensembles de p-capacités nulles ($\mu_0 \in L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$) et λ^+ et λ^- les parties positives et negatives de $f - \mu_0$. Voici une des formulations vérifiée par u :

$$\int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla w\,dx = \int_\Omega w\,d\mu_0 + \int_\Omega w^{+\infty}\,d\lambda^+ - \int_\Omega w^{-\infty}\,d\lambda^-$$

pour tout $w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tel qu'il existe $k > 0$, $w^{+\infty}$ et $w^{-\infty} \in W^{1,r}(\overline{\Omega})$, avec $r > N$, tels que

$$\begin{cases} w = w^{+\infty} & \mathrm{cap}_p\text{-quasi partout sur } \{u > k\}, \\ w = w^{-\infty} & \mathrm{cap}_p\text{-quasi partout sur } \{u < -k\}. \end{cases}$$

Cet ouvrage est constitué de chapitres pouvant être lus indépendamment les uns des autres. Les chapitres 1 et 2 sont des rappels concernant les équations elliptiques et paraboliques dans un cadre « classique », l'intégration et les espaces de Sobolev.

La première partie est consacrée aux méthodes de dualité pour des problèmes elliptiques linéaires : le chapitre 3 concerne les équations à seconds membres $W^{-1,s}(\Omega)$ pour $s < 2$, et le chapitre 4 les équations à seconds membres mesure.

La deuxième partie fait intervenir des équations elliptiques dans une formulation au sens des distributions. Le chapitre 5 donne l'existence pour des équations non-linéaires, tandis que le chapitre 6 prouve que même dans le cas linéaire il n'y a pas unicité.

La troisième partie est consacrée aux équations à seconds membres L^1 : le chapitre 7 montre la continuité des solutions entropiques d'une équation elliptique par rapport à un paramètre (et redémontre leur unicité). Et le chapitre 8 prouve l'existence et l'unicité des solutions entropiques d'équations paraboliques.

Enfin la quatrième partie donne des propriétés des solutions des équations elliptiques à seconds membres mesure (dont on connaît déjà l'existence et la non-unicité). Dans le chapitre 9, on étudie les singularités de la solution pour un second membre somme d'un dirac et d'une fonction L^1. Puis le chapitre 10 montre que les espaces de Lorentz, bien que plus fins que les espaces de Sobolev, ne permettent pas de distinguer les solutions à second membre dirac de celles à second membre L^1. Le chapitre 11 est consacré à l'étude d'une formulation plus générale que les formulations entropiques et renormalisées, mais ne donnant pas l'unicité lorsque le second membre est un dirac. Lorsque le second membre est L^1, il y a convergence forte des troncatures des approximations, nous montrons dans le chapitre 12 que ce n'est plus nécessairement le cas pour une mesure quelconque. Enfin, le chapitre 13 propose une généralisation des notions de SOLA, solutions entropiques, et solutions renormalisées pour une mesure quelconque au second membre.

Les chapitres 4 et 6 sont les deux parties (en français) de l'article [43] publié à Rendiconti di Matematica.
Le chapitre 5 est à paraître aux Annales de Toulouse [41].
Le chapitre 8 est paru (en anglais) à Nonlinear Analysis TMA [44].
Le chapitre 7 est un article en préparation [42].
Le chapitre 13 est un article en préparation [22] écrit en collaboration avec G. Dal Maso, F. Murat et L. Orsina, une note CRAS est aussi en préparation.

1. Cadre classique pour les équations elliptiques et paraboliques

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$ avec $N \geq 2$, on étudie des problèmes elliptiques et paraboliques dont les modèles sont : pour l'elliptique linéaire

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et pour le parabolique linéaire

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ u = 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ u(0) = u_0 & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où $\Delta = \sum_{i=1,\ldots,N} \partial_{x_i}^2$ (par la suite, les sommes en i ne seront plus notées). Les problèmes modèles pour les équations non linéaires font intervenir le p-laplacien $\Delta_p(u) = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= f & \text{dans } \Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} u_t - \Delta_p u &= f & \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ u &= 0 & \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega, \\ u(0) &= u_0 & \text{sur } \Omega, \end{aligned}$$

1.1 Elliptique et parabolique linéaire

On étudie le problème de Dirichlet elliptique

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A\nabla u) &= f \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où A est une matrice de taille N. Si l'on note a_{ij} les coefficients de A, l'équation s'écrit $-\partial_{x_i}(a_{ij}\partial_{x_j}u) = f$. Nous supposons que $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ et satisfait la condition d'ellipticité (ou coercitivité) : il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (\xi_i) \in \mathbf{R}^N \qquad \sum_{i,j} \xi_i\, a_{ij}\, \xi_j \geq \alpha \sum_{i,j} \xi_i\, \xi_j.$$

Ce problème admet alors, pour $f \in H^{-1}(\Omega)$, une unique solution variationnelle, qui appartient à $H_0^1(\Omega)$ et vérifie

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega) \qquad \int_\Omega (A\nabla u)\nabla v\, dx = \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}$$

Cette solution est obtenue grâce au théorème de Lax-Milgram [32].

Sous les mêmes hypothèses sur A (matrice bornée et coercitive), le problème parabolique

$$\begin{aligned} u_t - \operatorname{div}(A\nabla u) &= f \quad \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega \\ u(0) &= u_0 \quad \text{sur } \Omega \end{aligned}$$

admet, pour $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ et $u_0 \in L^2(\Omega)$, une unique solution variationnelle u (voir Lions-Magenes [35]) appartenant à $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et vérifiant $u_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$,

$$\forall\, v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \qquad \int_0^T \langle u_t, v\rangle + \int_0^T\!\!\int_\Omega (A\nabla u)\nabla v = \int_0^T \langle f, v\rangle$$

et

$$u(0) = u_0 \quad \text{dans } L^2(\Omega),$$

qui a bien un sens car $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et $u_t \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ implique $u \in C([0,T],L^2(\Omega))$.

1.2 Elliptique non linéaire (opérateurs de Leray-Lions)

On étudie le problème elliptique

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) &= f \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

avec $p>1$ et f dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ ($p' = p/(p-1)$) où Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$ et a une fonction de Carathéodory satisfaisant des conditions, données ci-après, de coercitivité, de monotonie stricte et de croissance du type de celles de Leray-Lions, et définissant un opérateur sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. La solution u, dont l'existence est donnée par [33], vérifie $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et

$$\forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \qquad \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla\varphi = \langle f, \varphi\rangle.$$

La solution est obtenue par une méthode de Galerkin, c'est-à-dire comme limite de solutions appartenant à des espaces de dimensions finies.

En fait $A(u) = -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u))$ définit un opérateur de Leray-Lions, c'est-à-dire qu'il vérifie les hypothèses générales suivante :

- $u \mapsto A(u)$ est un opérateur de V, Banach séparable et réflexif, dans V' son dual.
- $A(u)$ est un opérateur borné, au sens où il transforme les bornés de V en des bornés de V'.
- $A(u)$ est continu de tout sous-espace de V de dimension finie dans V' faible.
- A est coercitif au sens suivant

$$\lim_{|v| \to \infty} \frac{\langle A(v), v \rangle}{|v|} = +\infty$$

- A est monotone, c'est-à-dire que $\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0$ pour tout u et $v \in V$.

Ces hypothèses suffisent pour montrer que A est surjectif [33], aussi $A(u) = f$ admet une solution pour tout $f \in V'$. Elles sont vérifiées, en particulier, sous les hypothèses suivantes, avec $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ et $V' = W^{-1,p'}(\Omega)$.

Nous supposons que a satisfait les hypothèses suivantes (qui font de $A(u)$ un opérateur de Leray-Lions) : a est une fonction de Carathéodory, c'est-à-dire que

- $a(x, s, \xi) : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ est mesurable en $x \in \mathbf{R}^N$ pour tout $s \in \mathbf{R}$ et $\xi \in \mathbf{R}^N$ et continue en $\xi \in \mathbf{R}^N$ et $s \in \mathbf{R}$ pour presque tout $x \in \mathbf{R}^N$. Nous noterons $a(x, u, \nabla u) = a(x, u(x), \nabla u(x))$.

et a vérifie aussi des conditions de coercitivité, monotonie stricte et croissance : il existe p vérifiant $1 < p \leq N$

- Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout s et ξ et presque tout x on ait

$$a(x, s, \xi)\xi \geq \alpha |\xi|^p$$

- Pour tout s, ξ et η et presque tout x on a

$$[a(x, s, \xi) - a(x, s, \eta)](\xi - \eta) > 0 \quad \text{pour} \quad \xi \neq \eta$$

- Il existe $b(x) \in L^{p'}(\Omega)$ ($p' = p/(p-1)$) et $\beta > 0$ tels que pour tout s et ξ et presque tout x on ait

$$|a(x, s, \xi)| \leq \beta(b(x) + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1})$$

Ces hypothèses sont classiques pour l'étude des opérateurs non linéaires sous forme divergentielle.

1.3 Parabolique non linéaire

Il s'agit de résoudre l'équation parabolique

$$\begin{aligned} u_t - \operatorname{div}(a(t, x, u, \nabla u)) &= f \;\; \text{dans }]0, T[\times\Omega \\ u &= 0 \;\; \text{sur }]0, T[\times\partial\Omega \\ u(0, .) &= u_0 \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$

avec u_0 dans $L^2(\Omega)$ et f dans $L^p(]0,T[;W^{-1,p'}(\Omega))$ où a est une fonction de Carathéodory satisfaisant des conditions de coercitivité, de monotonie stricte et de croissance du type de celles de Leray-Lions, définissant un opérateur sur $L^p(]0,T[;W_0^{1,p}(\Omega))$.

La solution u, obtenue par Lions [34] (ici aussi grâce à une méthode de Galerkin), vérifie

$$u \in L^p(]0,T[;W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \text{et} \quad u_t \in L^{p'}(]0,T[;W^{-1,p'}(\Omega))$$
$$\forall \varphi \in L^p(]0,T[;W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \int_0^T \langle u_t, \varphi\rangle + \int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,u,\nabla u)\nabla\varphi = \int_0^T \langle f, \varphi\rangle$$
$$u(0) = u_0,$$

ici aussi cette dernière égalité a bien un sens car $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$, ce qui est une conséquence de la régularité de u et u_t.

Donnons les hypothèses sur a, qui font de $A(u) = -\operatorname{div}(a(t,x,u,\nabla u))$ un opérateur de Leray-Lions : a est une fonction de Carathéodory, c'est-à-dire que

- $a(t,x,s,\xi) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ est mesurable en $t \in \mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}^N$ pour tout $s \in \mathbf{R}$ et $\xi \in \mathbf{R}^N$ et continue en $s \in \mathbf{R}$ et $\xi \in \mathbf{R}^N$ pour presque tout $t \in \mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}^N$. Nous noterons $a(t,x,u,\nabla u) = a(t,x,u(t,x),\nabla u(t,x))$.

et a vérifie aussi des conditions de coercitivité, monotonie stricte et croissance : il existe p vérifiant $1 < p \leq N$ et

- Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout s et ξ et presque tout t et x on ait
$$a(t,x,s,\xi)\xi \geq \alpha|\xi|^p$$
- Pour tout s, ξ et η et presque tout t et x on a
$$[a(t,x,s,\xi) - a(t,x,s,\eta)](\xi - \eta) > 0 \quad \text{pour} \quad \xi \neq \eta$$
- Il existe $b(t,x) \in L^{p'}(]0,T[\times\Omega)$, (où $p' = p/(p-1)$) et $\beta > 0$ tels que pour tout s et ξ et presque tout t et x on ait
$$|a(t,x,s,\xi)| \leq \beta(b(t,x) + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1})$$

Ces hypothèses sont classiques pour l'étude des opérateurs non linéaires sous forme divergentielle.

1.4 Troncature

Soit $k > 0$ et $T_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction « tronquante » valant

$$\begin{cases} -k & \text{pour} \quad x \leq -k \\ x & \text{pour} \quad |x| \leq k \\ k & \text{pour} \quad x \geq k. \end{cases}$$

et sa primitive $\Theta_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$

$$\Theta_k(x) = \int_0^x T_k(s)\,ds.$$

La fonction T_k sert, par exemple, à montrer le principe du maximum faible pour les équations elliptiques, elle va être très utilisée dans la suite.

Comme cette fonction est lipschitzienne, le théorème de Stampacchia affirme que pour u une fonction $W^{1,p}(\Omega)$, avec $p \geq 1$, on a $T_k(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ et

$$\nabla T_k(u) = {T_k}'(u)\nabla u.$$

1.5 Mesure

Soit O un ouvert, il existe plusieurs espaces de mesures sur O. Nous considérons ici $M(\overline{O}) = (C(\overline{O}))'$ le dual de l'ensemble des fonctions continues sur $\overline{O}$ muni de sa norme habituelle (la norme du sup). On supposera de plus que ces mesures ne chargent pas le bord. De toute façon la partie de la mesure pouvant charger le bord est ignorée par la formulation au sens des distributions puisque les fonctions test sont à support compact. La restriction n'est donc importante que pour des conditions aux limites de Neumann ou de Fourier.

2. Outils de base

2.1 Résultats d'intégration

Nous reprenons les énoncés de Kavian [31], les résultats n'y sont pas démontrés (sauf le théorème de Vitali), les démonstrations peuvent être trouvées dans Rudin [45]. Dans la suite Ω sera un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$ et nous utiliserons la mesure de Lesbegue, mais ces résultats restent vrais dans un cadre plus général.

Lemme de Fatou : *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives. Alors*

$$\int_\Omega \left(\varliminf_{n\to\infty} f_n \right) dx \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, dx.$$

Théorème de convergence dominée de Lebesgue : *Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction mesurable f. On suppose qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour tout $n \geq 1$, on ait $|f_n(x)| \leq g(x)$ presque partout sur Ω. Alors $f \in L^1(\Omega)$, et*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| \, dx = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, dx = \int_\Omega f \, dx$$

Réciproque partielle du théorème de convergence dominée : *Soient $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$ et (f_n) une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ telles que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$. Alors il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ et une sous-suite (f_{n_k}) telles que :*

$$|f_n| \leq g \quad p.p, \qquad f_n \to f \quad p.p.$$

Définition de l'équi-intégrabilité : *On dit qu'une suite (f_n) de fonctions de $L^1(\Omega)$ est équi-intégrable si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall E \subset \Omega$ mesurable avec $\mathrm{mes}(E) < \delta$ on ait*

$$\int_\Omega |f_n| dx < \varepsilon.$$

Théorème de Vitali : *Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction mesurable f. Alors (f_n) tend vers f dans $L^1(\Omega)$ si et seulement si la suite (f_n) est équi-intégrable.*

Conséquence : *Si* (u_n) *est bornée dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *avec* $p>1$ *(et donc convergeant dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *faible à une sous suite près) et si* (∇u_n) *converge presque partout alors* (u_n) *converge (à une sous suite près) dans* $W^{1,q}(\Omega)$ *(fort)* $\forall q<p$.

En effet, d'après le théorème de Vitali, il suffit de montrer que $(|\nabla u_n|^q)$ est équi-intégrable or pour E borelien

$$\int_E |\nabla u_n|^q \leq \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^p\right)^{q/p} \left(\int_E 1\right)^{1-q/p} \leq C\,\mathrm{mes}(E)^{1-q/p}.$$

Lemme : *Soit* f *une fonction mesurable strictement positive. Alors pour tout* $\varepsilon>0$ *il existe* $\delta>0$ *tel que pour tout* $A\subset\Omega$ *mesurable on ait*

$$\int_A f\,dx<\delta \Longrightarrow \mathrm{mes}(A)<\varepsilon.$$

Démonstration : On a $\mathrm{mes}(A)\leq \mathrm{mes}(\{x, f(x)\leq 1/n\})+\mathrm{mes}(A\cap\{x,f(x)\geq 1/n\})$ or

$$\mathrm{mes}(A\cap\{x,f(x)\geq 1/n\})\leq n\int_A f\,dx$$

et par continuité de la mesure $\mathrm{mes}(\{x,f(x)\leq 1/n\})\to \mathrm{mes}(\{x,f(x)\leq 0\})=0$ lorsque $n\to+\infty$, donc il existe n_0 tel que $\mathrm{mes}(\{x,f(x)\leq 1/n_0\})\leq\varepsilon/2$, il suffit alors de choisir $\delta\leq\varepsilon/(2n_0)$.

Lemme : *Soit* (f_n) *une suite de fonctions mesurables de* Ω *dans* $\mathbf{R}$. *Si* (f_n) *est de Cauchy en mesure, c'est-à-dire si*

$$\forall\varepsilon>0,\ \forall\eta>0,\ \exists n_0\in\mathbf{N} \textit{ tel que } p,q\geq n_0 \Rightarrow \mathrm{mes}(\{x\in\Omega;|f_p(x)-f_q(x)|>\varepsilon\})\leq\eta,$$

alors il existe une sous-suite de (f_n) *convergeant presque partout.*

Démonstration : Comme (f_n) est de Cauchy en mesure, il existe une sous-suite (f_{n_k}) telle que

$$\mathrm{mes}(\{x\in\Omega;|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|>1/2^k\})\leq 1/2^k.$$

Notons $A_k=\{x\in\Omega;|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|>1/2^k\}$, et soit $B_p=\bigcup_{k\geq p}A_k$ alors $\mathrm{mes}(B_p)\leq 1/2^{p-1}$. Sur B_p^c, son complémentaire, la suite (f_{n_k}) est de Cauchy et converge donc uniformément et simplement vers g_p. Pour $p'\geq p$ on a $B_p^c\subset B_{p'}^c$ donc $g_{p'/B_p^c}=g_p$ si bien qu'il existe g tel que $g_{/B_p^c}=g_p$. Ainsi (f_{n_k}) converge simplement vers g sur $\bigcup_{p\in\mathbf{N}}B_p^c$. Et $(\bigcup_{p\in\mathbf{N}}B_p^c)^c=\bigcap_{p\in\mathbf{N}}B_p$ qui est de mesure nulle, donc (f_{n_k}) converge presque partout vers g.

2.2 Espaces de Sobolev et analyse fonctionnelle

Nous reprenons ici aussi certains énoncés de Kavian [31] et de Brezis [19], pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev, on pourra voir Adams [1]. Par la suite, Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$.

Définition des espaces de Lebesgue : Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ est défini par :

$$L^p(\Omega) = \{u \text{ mesurable } ; \textstyle\int_\Omega |u|^p < +\infty\}$$

et on le munit de la norme (parfois notée $\|.\|_p$)

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

et pour $p = \infty$, on note

$$L^\infty(\Omega) = \{u \text{ mesurable } ; \sup_\Omega |u| < \infty\}$$

de norme

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_\Omega |u|.$$

Définition des espaces de Sobolev : Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \nabla u \in (L^p(\Omega))^N\}$$

et on le munit pour $p < \infty$ de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = ((\|u\|_{L^p})^p + (\|\nabla u\|_{L^p})^p)^{1/p},$$

et pour $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} = \max(\|u\|_{L^\infty}, \|\nabla u\|_{L^\infty}).$$

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ désignant l'ensemble des fonction de classe $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω, on note pour $1 \leq p < \infty$

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Comme pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est par définition dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, on peut identifier le dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ à un sous-espace de l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$ (le dual de $L^p(\Omega)$ étant identifié à $L^{p'}(\Omega)$ où $p' = p/(p-1)$). On note :

$$W^{-1,p'}(\Omega) = (W_0^{1,p}(\Omega))'.$$

Dans le cas particulier où $p = 2$, $W^{1,2}(\Omega)$, $W_0^{1,2}(\Omega)$ et $W^{-1,2}(\Omega)$ sont respectivement notés $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$.

Théorème : *Soit E un espace de Banach séparable et soit (f_n) une suite bornée dans E'. Alors il existe une sous suite (f_{n_k}) qui converge pour la topologie faible $*$ de E'.*

Ce théorème est souvent utilisé pour $E = L^1(\Omega)$, qui est bien séparable (mais pas réflexif), comme $E' = L^\infty(\Omega)$, on peut donc extraire d'une suite bornée dans $L^\infty(\Omega)$, une sous suite qui converge dans $L^\infty(\Omega)$ faible $*$.

Théorème : *Soit E un espace de Banach réflexif et soit (f_n) une suite bornée dans E. Alors il existe une sous suite (f_{n_k}) qui converge pour la topologie faible de E.*

Ce théorème permet d'extraire des sous suites convergentes faiblement de suites bornées dans $L^p(\Omega)$ pour $1<p<\infty$, puisque $L^p(\Omega)$ est alors réflexif. Il ne s'applique donc ni à $L^1(\Omega)$, ni à $L^\infty(\Omega)$ (pour lequel, en revanche, le théorème précédent s'applique). Il en est de même pour les $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème de Rellich : *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$ et $p \geq 1$. Si $p<N$ alors pour tout q tel que $1 \leq q \leq p^*$ (avec $1/p^* = 1/p - 1/N$), l'injection de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ est continue et pour tout q tel que $1 \leq q < p^*$ l'injection est compacte, c'est-à-dire que les bornés de $W_0^{1,p}(\Omega)$ sont relativement compacts dans $L^q(\Omega)$.*

En particulier l'injection de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < N$ est compacte. Il existe un théorème analogue utile pour les équations paraboliques (voir Simon [47] Corollaire 4)

Théorème du type d'Aubin : *Soient $X \subset B \subset Y$ trois espaces de Banach tels que l'injection de X dans B soit compacte. Si F est borné dans $L^p(0,T;X)$ avec $1 \leq p < N$ et si $F_t = \{f_t, f \in F\}$ est borné dans $L^1(0,T;Y)$ alors F est relativement compacte dans $L^p(0,T;B)$.*

Inégalité de Poincaré : *Si Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$, il existe une constante C telle que pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$:*

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}.$$

En particulier $\|\nabla u\|_{L^p}$ est une norme équivalente à celle de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Inégalité de Poincaré-Wirtinger : *Soient Ω un ouvert borné, connexe et lipschitzien de $\mathbf{R}^N$ et $1<p<\infty$. Alors si $\widetilde{u} = (\int_\Omega u\,dx)/|\Omega|$, il existe C tel que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on ait :*

$$\|u - \widetilde{u}\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}.$$

Part I

Problèmes linéaires et dualité

3. Relation entre regularité et existence du problème adjoint

On s'intéresse ici à des équations elliptiques linéaires à seconds membres $W^{-1,s}$ avec $s < 2$, dont on montre l'existence de solutions par dualité.

3.1 Equivalence entre existence et régularité

Pour Ω ouvert borné de $\mathbf{R}^N$ avec $N \geq 2$, on étudie le problème de Dirichlet elliptique

$$\begin{aligned} -\partial_{x_i}(a_{ij}\partial_{x_j}u) &= f \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.1}$$

avec $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, satisfaisant la condition d'ellipticité

$$\forall (\xi_i) \in \mathbf{R}^N \qquad \sum_{i,j} \xi_i \, a_{ij} \, \xi_j \geq \alpha \sum_{i,j} \xi_i \, \xi_j$$

pour $\alpha > 0$ et $f \in W^{-1,r}(\Omega)$.

Ce problème admet, pour $r \geq 2$ et donc $f \in H^{-1}(\Omega)$, une unique solution variationnelle (théorème de Lax Milgram [36]), qui appartient à $H_0^1(\Omega)$ et vérifie

$$\forall \, v \in H_0^1(\Omega) \qquad \int_\Omega a_{ij} \, \partial_{x_j} u \, \partial_{x_i} v \, dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

Si f est plus régulière, la solution peut être plus régulière, par exemple grâce au théorème de Meyers [6]. Aussi introduisons nous

$$r_0 = \sup\{r_1; f \in W^{-1,r}(\Omega) \Rightarrow u \in W_0^{1,r}(\Omega) \; \forall \, 2 \leq r \leq r_1\}.$$

Par construction, $r_0 \geq 2$ et le théorème de Meyers dit, en fait, que $r_0 > 2$. Ceci par dualité va permettre de résoudre (3.1) pour des f moins réguliers, en particulier pour $f \in W^{-1,q}(\Omega)$ avec $q < 2$: aussi de façon analogue à la définition de r_0 définit-on

$$\begin{aligned} q_0 = \inf\{q_1; &\text{pour } f \in W^{-1,q}(\Omega), \\ &\text{(3.1) admet une unique solution dans } W_0^{1,q}(\Omega) \; \forall q_1 \leq q \leq 2\}. \end{aligned}$$

Théorème : *Régularité des solutions et existence d'une solution sont duales, i.e.* $q_0 = {r_0}'$.

Démonstration : Soit $1<s<\infty$ tel que $\forall\, g \in W^{-1,s}(\Omega)$ il existe un unique $v \in W_0^{1,s}(\Omega)$ qui vérifie

$$\int_\Omega (A^*\nabla v)\nabla\varphi = \langle g,\varphi\rangle_{W^{-1,s},W_0^{1,s'}} \quad \forall\,\varphi \in W_0^{1,s'}(\Omega).$$

Notons $G_s : W^{-1,s}(\Omega) \to W_0^{1,s}(\Omega)$ tel que $G_s(g)=v$, on notera que G_s est bijectif et

$$\int_\Omega (A^*\nabla G_r(g))\nabla\varphi = \langle g,\varphi\rangle_{W^{-1,s},W_0^{1,s'}} \quad \forall\,\varphi \in W_0^{1,s'}(\Omega), \tag{3.2}$$

De plus, $-\operatorname{div}(A^*\nabla)$ est continue de $W_0^{1,s}(\Omega)$ dans $W^{-1,s}(\Omega)$ et bijective d'inverse G_s aussi grâce au théorème de l'application ouverte, G_s est continue de $W^{-1,s}(\Omega)$ dans $W_0^{1,s}(\Omega)$, à l'aide du théorème de Riesz, on peut donc définir ${G_s}^*$ son adjoint, tel que ${G_s}^* : W^{-1,s'}(\Omega) \to W_0^{1,s'}(\Omega)$ et par définition pour $f \in W^{-1,s'}(\Omega)$ on a $u = {G_s}^*(f)$ si

$$\forall\, g \in W^{-1,s}(\Omega) \quad \langle u,g\rangle_{W_0^{1,s'},W^{-1,s}} = \langle f, G_s(g)\rangle_{W^{-1,s'},W^{1,s}} \tag{3.3}$$

or en prenant $\varphi = u$ dans (3.2) on a

$$\forall\, g \in W^{-1,s}(\Omega) \quad \int_\Omega (A^*\nabla G_s(g))\nabla u = \langle g,u\rangle_{W^{-1,s},W_0^{1,s'}}$$

or $G_r(W^{-1,s}(\Omega)) = W_0^{1,s}(\Omega)$ donc, si l'on note que

$$\int_\Omega (A^*\nabla G_s(g))\nabla u = \int_\Omega (A\nabla u)\nabla G_s(g),$$

on a avec (3.3)

$$\forall\, v \in W_0^{1,s}(\Omega) \quad \int_\Omega (A\nabla v)\nabla u = \langle f,v\rangle_{W^{-1,s'},W^{1,s}},$$

c'est-à-dire que v est solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

pour $f \in W^{-1,s'}(\Omega)$, ainsi a-t-on trouvé une solution de (3.1) dans $W_0^{1,s'}(\Omega)$, et elle est unique : en effet, il suffit de montrer que pour $f=0$ on a $u=0$. Or grâce à la formule de Green

$$\forall\, g \in W^{-1,s}(\Omega) \quad \langle u,g\rangle_{W_0^{1,s'},W^{-1,s}} = 0$$

et g décrit $W^{-1,s}(\Omega)$ le dual de $W_0^{1,s'}(\Omega)$ donc $u=0$. Donc pour $f \in W^{-1,s'}(\Omega)$, (3.1) admet une unique solution dans $W_0^{1,s'}(\Omega)$ si et seulement si (il suffit d'échanger les rôles de A et A^*) (3.1) écrit avec A^* admet pour $f \in W^{-1,s}(\Omega)$ une unique solution dans $W_0^{1,s}(\Omega)$ donc $q_0 = {r_0}'$.

3.2 r_0 peut être fini et même très proche de 2

D'après Serrin [46], on peut construire (voir [43] et chapitre 6) A_s symétrique et $u_s \notin H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A_s \nabla u_s) = 0 &\quad \text{dans } \Omega \\ u_s = \overline{u} &\quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

avec $\overline{u} \in H^{1/2}(\Omega)$, il existe alors une fonction de $H^1(\Omega)$ que nous noterons encore $\overline{u}$ solution variationnelle du même problème. Aussi

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A_s \nabla (u_s - \overline{u})) = 0 &\quad \text{dans } \Omega \\ u_s - \overline{u} = 0 &\quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

et $u_s \in W^{1,\beta}(\Omega)$ pour $\beta < 2/(1+\varepsilon)$ donc $u_s - \overline{u}$ aussi, et $u_s - \overline{u} \neq 0$ or 0 est aussi solution : il n'y a donc pas unicité. Ainsi $q_0 > 1$ et en choisissant ε petit, on peut rendre q_0 aussi près que l'on veut de 2, donc il existe des problèmes tels que $r_0 < +\infty$ et même avec r_0 aussi proche de 2 que souhaité.

3.3 Perte de régularité

Considérons $r > r_0$ tel qu'il existe $g \in W^{-1,r}(\Omega)$ n'admettant pas de solutions dans $W_0^{1,r}(\Omega)$, donc

$$-\operatorname{div}(A^* \nabla W_0^{1,r}(\Omega)) \neq W^{-1,r}(\Omega).$$

Or si $E \subset F$,

$$E = F \iff E \text{ fermé et } E \text{ dense dans } F$$

donc ici, on a soit $-\operatorname{div}(A^* \nabla W_0^{1,r}(\Omega))$ non fermé, soit $-\operatorname{div}(A^* \nabla W_0^{1,r}(\Omega))$ non dense.

Théorème : $-\operatorname{div}(A^* \nabla W_0^{1,r}(\Omega))$ *fermé est équivalent à la propriété :* (3.1) *admet une solution pour tout* $f \in W^{-1,r'}(\Omega)$.

Démonstration : D'après la théorie des opérateurs (voir Brezis [19], par exemple), $-\operatorname{div}(A^* \nabla W_0^{1,r}(\Omega))$ fermé équivaut à $-\operatorname{div}(A \nabla W_0^{1,r'}(\Omega))$ fermé, or si $f \in H^{-1}(\Omega)$, il existe une solution de (3.1) dans $H_0^1(\Omega)$ et donc dans $W_0^{1,r'}(\Omega)$, donc $H^{-1}(\Omega) \subset -\operatorname{div}(A \nabla W_0^{1,r'}(\Omega))$ et $H^{-1}(\Omega)$ est dense dans $W^{-1,r'}(\Omega)$ donc $-\operatorname{div}(A \nabla W_0^{1,r'}(\Omega))$ aussi. Ainsi $-\operatorname{div}(A \nabla W_0^{1,r'}(\Omega))$ est fermé et dense dans $W^{-1,r'}(\Omega)$, donc on a $-\operatorname{div}(A \nabla W_0^{1,r'}(\Omega)) = W^{-1,r'}(\Omega)$ et il y a donc existence d'une solution de (3.1). Réciproquement si (3.1) admet une solution pour tout $f \in W_0^{1,r'}(\Omega)$, alors $-\operatorname{div}(A \nabla W_0^{1,r'}(\Omega))$ est fermé, donc $-\operatorname{div}(A^* \nabla W_0^{1,r}(\Omega))$ aussi.

Théorème : $-\operatorname{div}(A^* \nabla W_0^{1,r}(\Omega))$ *dense est équivalent à la propriété :* (3.1) *admet au plus une solution pour tout* $f \in W^{-1,r'}(\Omega)$.

Démonstration : On a montré à la fin de la première partie que la densité de $-\operatorname{div}(A^* \nabla W_0^{1,r}(\Omega))$ entraîne l'unicité, réciproquement si $-\operatorname{div}(A^* \nabla W_0^{1,r}(\Omega))$ n'est pas dense, il existe $g \notin -\operatorname{div}(A^*\nabla W_0^{1,r}(\Omega))$, soit v tel que

$$\langle v, h\rangle = 0 \text{ pour tout } h \in -\operatorname{div}(A^*\nabla W_0^{1,r}(\Omega))$$

et $\langle v, g\rangle = 1$, ainsi v est non nul et vérifie, grâce à la formule de Green, (3.1) avec $f = 0$, et v peut être prolongé grâce à Hahn-Banach à $W^{-1,r}(\Omega)$ donc $v \in W^{-1,r'}(\Omega)$. Comme 0 est aussi solution, il n'y a pas unicité.

Remarque : Le contre exemple de Serrin montre qu'il existe des équations pour lesquelles il n'y a pas unicité, et donc telles que $-\operatorname{div}(A^*\nabla W_0^{1,r}(\Omega))$ n'est pas dense. Il existe aussi des A^* tels que $-\operatorname{div}(A^*\nabla W_0^{1,r}(\Omega))$ ne soit pas fermé.

4. Solution par dualité de Stampacchia

Ce chapitre est la version française de la première partie d'un article publié à Rendiconti di Matematica [43].

On montre ici l'existence et l'unicité des solutions pour des équations elliptiques linéraires à seconds membres mesure, à l'aide d'un argument de dualité. Nous précisons la méthode de Stampacchia [48].

4.1 Présentation du problème

Pour Ω ouvert borné de $\mathbf{R}^N$ avec $N \geq 2$, on étudie le problème de Dirichlet elliptique

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A\nabla u) &= f \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{4.1}$$

avec $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, satisfaisant la condition d'ellipticité

$$\forall (\xi_i) \in \mathbf{R}^N \qquad \sum_{i,j} \xi_i \, a_{ij} \, \xi_j \geq \alpha \sum_{i,j} \xi_i \, \xi_j$$

pour $\alpha > 0$ et $f \in M(\overline{\Omega}) = (C(\overline{\Omega}))'$ espace de mesures qui est le dual de l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ muni de sa norme habituelle.

Ce problème admet, pour $f \in H^{-1}(\Omega)$, une unique solution variationnelle, qui appartient à $H_0^1(\Omega)$ et vérifie

$$\forall \, v \in H_0^1(\Omega) \qquad \int_\Omega (A\nabla u)\nabla v \, dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$$

Pour $f \notin H^{-1}(\Omega)$, mais $f \in M(\overline{\Omega})$ on ne trouve plus de solutions dans $H_0^1(\Omega)$, mais dans $\bigcap_{q < \frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$, ce qui conduit à une formulation plus faible, puisque pour que la première intégrale ait un sens il faut alors que $v \in \bigcup_{p > N} W^{1,p}(\Omega)$:

$$\forall \, v \in \bigcup_{p > N} W_0^{1,p}(\Omega) \qquad \int_\Omega (A\nabla u)\nabla v \, dx = \int_\Omega v \, df. \tag{4.2}$$

Nous avons $W_0^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ pour $p > N$ aussi le membre de droite a un sens.

Cette formulation étant plus faible que la formulation variationnelle elle n'assure plus l'unicité, comme le montre le contre-exemple de Serrin [46] que nous présentons au chapitre 6.

L'existence de solutions vérifiant cette formulation a été obtenue de plusieurs façons, nous allons nous intéresser à deux types de solutions : les solutions obtenues par dualité et les solutions obtenues par approximation. Le premier est dû à Stampacchia [48], les solutions vérifient une formulation plus forte qui assure l'unicité mais n'est applicable qu'à un problème linéaire et le second à Boccardo et Gallouët [11], il est applicable à un problème non linéaire mais n'assure pas l'unicité, aussi pour préciser la formulation, des inégalités d'entropie ont été introduites [4].

Soit L l'opérateur elliptique du second ordre linéaire à structure divergentielle correspondant à (4.1)

$$Lu = -\operatorname{div}(A\nabla u) = -\partial_{x_i}(a_{ij}\partial_{x_j} u)$$

avec $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, qui satisfont la condition d'ellipticité et Ω ouvert borné de $\mathbf{R}^N$ avec $N \geq 2$. Il s'agit donc d'étudier les solutions du problème de Dirichlet homogène d'équation $Lu = f$ avec $f \in M(\overline{\Omega})$, auparavant nous rappelons les deux constructions utilisées.

4.2 La théorie de Stampacchia

Soit L^* l'opérateur elliptique adjoint (ou transposé) de L (L^* est l'opérateur correspondant à a_{ji}), le problème de Dirichlet $L^*v = f$ dans Ω avec $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $v = 0$ sur $\partial\Omega$ admet une unique solution dans $H_0^1(\Omega)$ (donnée par le théorème de Lax-Milgram). Soit $p > N$ et soit $f \in W^{-1,p}(\Omega)$, comme Ω est borné et $p > 2$, nous avons $f \in H^{-1}(\Omega)$, alors soit v la solution variationnelle, elle est solution de $L^*v = f$ au sens des distributions (on a, en fait, l'égalité dans $W^{-1,p}(\Omega)$). Stampacchia, dans [48], montre que $v \in C(\overline{\Omega})$ et que l'opérateur de Green G_p défini par $G_p f = v$ est continu de $W^{-1,p}(\Omega)$ dans $C(\overline{\Omega})$.

Pour $p_1 > p_2$, on a $W^{-1,p_1}(\Omega) \subset W^{-1,p_2}(\Omega)$ et on peut vérifier aisément que $G_{p_2}/_{W^{-1,p_1}(\Omega)} = G_{p_1}$, on peut donc définir G de $\bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega)$ dans $C(\overline{\Omega})$ par $G/_{W^{-1,p}(\Omega)} = G_p$ et G^* son adjoint, opérateur de $M(\overline{\Omega})$ dans $\bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$, par

$$\forall\, p > N \quad \forall\, g \in W^{-1,p}(\Omega) \qquad \langle G^*\mu, g\rangle_{W_0^{1,p'},W^{-1,p}} = \langle \mu, Gg\rangle_{M(\overline{\Omega}),C(\overline{\Omega})}$$

A g fixé l'application $\mu \to \langle \mu, Gg\rangle_{M(\overline{\Omega}),C(\overline{\Omega})}$ est continue de $M(\overline{\Omega})$, muni de la topologie faible $*$, dans $\mathbf{R}$ donc G^* est continu au sens faible suivant

> Soit $p > N$ et $g \in W^{-1,p}(\Omega)$ alors $\mu \to \langle G^*\mu, g\rangle_{W_0^{1,p'},W^{-1,p}}$ est continue de $M(\overline{\Omega})$, muni de la topologie faible $*$, dans $\mathbf{R}$

Nous pouvons aussi utiliser le cadre des espaces localement convexes (voir Conway [21]). $W^{-1,p}(\Omega)$ est un espace normé donc localement convexe et si $p_1 > p_2$ nous avons $W^{-1,p_1}(\Omega) \subset W^{-1,p_2}(\Omega)$ avec inclusion continue, nous pouvons donc munir $\bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega)$ de la topologie limite inductive de celles des $W^{-1,p}(\Omega)$. Pour cette topologie, un opérateur est continu sur $\bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega)$ si et seulement s'il est continu sur chaque $W^{-1,p}(\Omega)$ pour $p>N$, donc G est continu de $\bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega)$ dans $C(\overline{\Omega})$ et $(\bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega))' = \bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$. Nous pouvons alors munir $\bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$ de la topologie faible $*$ et on vérifie aisément que la continuité faible de G^* définie précédemment est équivalente à celle de G^* de $M(\overline{\Omega})$ dans $\bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$ pour les topologies faibles $*$.

Résumons cela dans la proposition suivante

Proposition : *Il existe G, l'opérateur de Green associé à L^*, continu de $\bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega)$, muni de la topologie limite inductive, dans $C(\overline{\Omega})$, c'est-à-dire tel que $G/_{W^{-1,p}(\Omega)}$ est continu pour chaque $p>N$. Et G admet un opérateur adjoint G^* continu de $M(\overline{\Omega}) = (C(\overline{\Omega}))'$ dans $\bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega) = (\bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega))'$ pour les topologies faibles $*$, c'est-à-dire que pour chaque $p>N$ et pour chaque $g \in W^{-1,p}(\Omega)$, $\mu \longrightarrow \langle G^*\mu, g\rangle_{W_0^{1,p'},W^{-1,p}}$ est continue de $M(\overline{\Omega})$ faible $*$ dans $\mathbf{R}$.*

Dans le cas où $f \in H^{-1}(\Omega) \cap M(\overline{\Omega})$, soit u la solution variationnelle de $Lu = f$, elle vérifie

$$\forall\, w \in H_0^1(\Omega) \qquad \int_\Omega (A\nabla u)\nabla w\, dx = \langle f, w\rangle_{H^{-1},H_0^1}. \tag{4.3}$$

Soit $g \in W^{-1,p}(\Omega)$ avec $p>N$ et $v = Gg$; par définition, v est la solution variationnelle de $L^*v = g$ donc

$$\forall\, w \in H_0^1(\Omega) \qquad \int_\Omega (A\nabla w)\nabla v\, dx = \langle g, w\rangle_{H^{-1},H_0^1}. \tag{4.4}$$

Comme u et v appartiennent à $H_0^1(\Omega)$ choisissons $w = v = Gg$ dans (4.3) et $w = u$ dans (4.4), ce qui donne

$$\langle f, Gg\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \int_\Omega (A\nabla u)\nabla Gg\, dx = \langle g, u\rangle_{H^{-1},H_0^1}.$$

Comme $g \in \bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega)$, $Gg \in C(\overline{\Omega})$, $f \in M(\overline{\Omega})$ et $u \in \bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$ (car Ω borné et $u \in H_0^1(\Omega)$), nous obtenons

$$\forall\, p>N \quad \forall\, g \in W^{-1,p}(\Omega) \qquad \langle u, g\rangle_{W_0^{1,p'},W^{-1,p}} = \langle f, Gg\rangle_{M(\overline{\Omega}),C(\overline{\Omega})}$$

donc pour $f \in H^{-1}(\Omega)\cap M(\overline{\Omega})$ nous avons $u = G^*f$, ce qui nous conduit à la définition suivante

Définition : *On dira que u est solution de $Lu = f$ avec $f \in M(\overline{\Omega})$ si $u = G^*f$, c'est-à-dire si*

$$\begin{cases} u \in \bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega) \\ \forall\, g \in \bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega) \qquad \langle u, g\rangle_{W_0^{1,p'},W^{-1,p}} = \langle f, Gg\rangle_{M(\overline{\Omega}),C(\overline{\Omega})} \end{cases} \tag{4.5}$$

où $1/p + 1/p' = 1$.

Soit $q < \frac{N}{N-1}$ alors $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$, comme $g \in \bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega)$, g décrit $W^{-1,q'}(\Omega)$ le dual de $W_0^{1,q}(\Omega)$ (avec $1/q + 1/q' = 1$) donc u est unique. Cette formulation assure donc bien l'unicité.

Propriété : *La fonction u est l'unique solution de $Lu = f$ dans le sens* (4.5) *si et seulement si elle vérifie l'une des deux formulations équivalentes suivantes*

$$(4.6)\quad \begin{cases} u \in \bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \quad \text{tel que} \quad L^*v \in \bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega) \\ \qquad\qquad \langle u, L^*v \rangle_{W_0^{1,p'},W^{-1,p}} = \langle f, v \rangle_{M(\overline{\Omega}),C(\overline{\Omega})} \end{cases}$$

$$(4.7)\quad \begin{cases} u \in L^1(\Omega) \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \quad \text{tel que} \quad L^*v \in C(\overline{\Omega}) \qquad \int_\Omega u\, L^*v\, dx = \int_\Omega v\, df. \end{cases}$$

Démonstration : Montrons l'équivalence entre (4.5) et (4.6). Si nous notons $v = Gg$, nous avons $L^*v = g$, et nous obtenons une formulation équivalente à (4.5)

$$(4.8)\qquad \forall v \in G\left(\bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega)\right) \qquad \langle u, L^*v \rangle_{W_0^{1,p'},W^{-1,p}} = \langle f, v \rangle_{M(\overline{\Omega}),C(\overline{\Omega})}$$

Cependant $G\left(\bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega)\right)$ n'est pas connu, ce qui rend peu claire cette formulation, aussi allons nous montrer quelques inclusions.

Nous avons vu que Gg est, par définition, la solution variationnelle de $L^*v = g$ d'où $Gg \in H_0^1(\Omega)$ et que de plus $Gg \in C(\overline{\Omega})$ donc $G(\bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega)) \subset H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Soit $v \in \bigcup_{p>N} W_0^{1,p}(\Omega)$ alors $L^*v \in \bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega)$ et puisque $p > N$, $v \in H_0^1(\Omega)$ donc $v = G(L^*v)$ et donc $\bigcup_{p>N} W_0^{1,p}(\Omega) \subset G(\bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega))$, ainsi avons nous

$$\bigcup_{p>N} W_0^{1,p}(\Omega) \subset G\left(\bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega)\right) \subset H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),$$

donc

$$G\left(\bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega)\right) = \{v \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \text{ tel que } L^*v \in \bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega)\}$$

aussi (4.8) peut s'écrire

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \quad \text{tel que} \quad L^*v \in \bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega)$$
$$\langle u, L^*v \rangle_{W_0^{1,p'},W^{-1,p}} = \langle f, v \rangle_{M(\overline{\Omega}),C(\overline{\Omega})}.$$

Ainsi (4.5) et (4.6) sont équivalentes.

Avant de montrer l'équivalence entre (4.5) et (4.7), notons que (4.7) a été introduite par Stampacchia pour avoir une formulation simple c'est-à-dire ne faisant intervenir que des intégrales.

Soit $g \in C(\overline{\Omega}) \subset \bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega)$ alors il existe $v \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tel que $g = L^* v$ la formulation (4.7) peut donc s'écrire, pour $f = 0$,

$$\forall g \in C(\overline{\Omega}) \qquad \int_\Omega u\, g\, dx = 0$$

ce qui implique $u = 0$ puisque $u \in L^1(\Omega)$. Ainsi (4.7) assure l'unicité de u.

Pour montrer l'équivalence de (4.5) et (4.7) il suffit donc de montrer que la solution de (4.5) est solution de (4.7). La solution u de (4.5) vérifie $u \in \bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$ donc $u \in L^1(\Omega)$ et

$$\langle u, g \rangle_{W_0^{1,p'}, W^{-1,p}} = \langle f, Gg \rangle_{M(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega})}$$

et pour $g \in C(\overline{\Omega}) \subset \bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega)$ nous avons

$$\langle u, g \rangle_{W_0^{1,p'}, W^{-1,p}} = \int_\Omega g\, u\, dx$$

nous obtenons donc

$$\forall g \in C(\overline{\Omega}) \qquad \int_\Omega g\, u\, dx = \int_\Omega Gg\, df,$$

et si nous posons $v = Gg$ nous avons

$$\forall v \in G(C(\overline{\Omega})) \qquad \int_\Omega u\, L^* v\, dx = \int_\Omega v\, df.$$

Or d'après les inclusions précédentes $v \in G(C(\overline{\Omega}))$ si et seulement si $v \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ et $L^* v \in C(\overline{\Omega})$ donc u vérifie (4.7), ce qui achève la démonstration.

4.3 Comparaison avec les solutions par approximations

La solution définie par Boccardo et Gallouët, dans [11], est la limite de solutions obtenues pour des fonctions f plus régulières. Soit $f \in M(\overline{\Omega})$ et soit $\langle f_n \rangle \in H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ une suite convergeant vers f au sens des distributions, avec $\|f_n\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{M(\overline{\Omega})}$; cette suite existe par densité de $H^{-1}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ dans $M(\overline{\Omega})$ pour la topologie faible $*$ de $M(\overline{\Omega})$. Soit u_n la solution variationnelle de $Lu_n = f_n$, alors $\|u_n\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} < C$, où C ne dépend que de q, L, Ω et $\|f\|_{M(\overline{\Omega})}$, pour tout q tel que $1 \leq q < \frac{N}{N-1}$ (voir [11]).

Il existe alors un $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ et une sous-suite notée, à nouveau, (u_n) tels que $u_n \rightharpoonup u$ dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ faible, donc $Lu_n \to Lu$ au sens des distributions, et donc $Lu = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, c'est-à-dire que

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \qquad \int_\Omega (A\nabla u)\nabla\varphi\, dx = \int_\Omega \varphi\, df$$

et donc par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\bigcup_{p>N} W_0^{1,p}(\Omega)$, ($\int_\Omega v\,df$ a un sens puisque $p>N$ implique $W_0^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$)

$$\forall v \in \bigcup_{p>N} W_0^{1,p}(\Omega) \qquad \int_\Omega (A\nabla u)\nabla v\,dx = \int_\Omega v\,df, \tag{4.9}$$

qui est bien la formulation (4.2).

Écrivons la formulation (4.9) en faisant porter toutes les dérivations sur v, on obtient

$$\forall v \in \bigcup_{p>N} W_0^{1,p}(\Omega) \qquad \langle u, L^*v\rangle_{W_0^{1,p'},W^{-1,p}} = \int_\Omega v\,df \tag{4.10}$$

Comme $\bigcup_{p>N} W_0^{1,p}(\Omega) \subset G(\bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega))$ (et l'inclusion peut être stricte), (4.10) est donc plus faible que (4.8). Et pour tout q fixé, L^*v ne décrit plus $W^{-1,q'}(\Omega)$, le dual de $W_0^{1,q}(\Omega)$, pour $q<\frac{N}{N-1}$, mais un de ses sous espaces $L^*(W_0^{1,q'}(\Omega))$, l'unicité donc n'est plus assurée.

Ainsi la formulation au sens des distributions est plus faible que celle de Stampacchia et n'assure pas l'unicité (voir le chapitre 6) ; et la solution de Stampacchia vérifie (4.8) et donc vérifie aussi (4.9).

Considérons à nouveau la suite (u_n) introduite dans [11], elle vérifie

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad \int_\Omega (A\nabla u_n)\nabla v\,dx = \langle f_n, v\rangle_{H_0^1,H^{-1}}$$

soit, avec la formule de Green, $\langle u_n, L^*v\rangle_{H_0^1,H^{-1}} = \langle f_n, v\rangle_{H_0^1,H^{-1}}$, or $G(\bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega)) \subset H_0^1(\Omega)$ donc

$$\forall v \in G(\textstyle\bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega)) \qquad \langle u_n, L^*v\rangle_{H_0^1,H^{-1}} = \langle f_n, v\rangle_{H_0^1,H^{-1}}$$

d'où (4.8) avec $f=f_n$ et $u=u_n$ donc $u_n = G^*f_n$. Comme $f_n \rightharpoonup f$ dans $M(\overline{\Omega})$ faible $*$ et G^* est continu de $M(\overline{\Omega})$ dans $\bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$ pour les topologies faibles $*$, nous obtenons $G^*f_n \rightharpoonup G^*f$ dans $\bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$ faible $*$, or $u_n \rightharpoonup u$ aussi, donc $u = G^*f$. Les solutions de Boccardo-Gallouët sont donc solutions de Stampacchia, et réciproquement.

Ainsi les deux types de solutions sont les mêmes et comme il y a unicité de la solution de Stampacchia, il y a donc aussi unicité de la solution de Boccardo-Gallouët, c'est-à-dire que, d'une part, la suite de départ (u_n) a une unique valeur d'adhérence et que, d'autre part, celle-ci est indépendante de la suite (f_n) et ne dépend donc que de f (pour $f \in L^1(\Omega)$, l'unicité peut aussi être montrée grâce à la linéarité de L).

Remarque : si $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ alors un lemme de Meyers dit que, pour $g \in W^{-1,p}(\Omega)$, la solution de $L^*v = g$ appartient à $W_0^{1,p}(\Omega)$, dans ce cas $G(\bigcup_{p>N} W^{-1,p}(\Omega)) = \bigcup_{p>N} W_0^{1,p}(\Omega)$ et l'équation $Lu=f$ admet une unique solution vérifiant (4.9), ce qui est plus fort que l'unicité des solutions de Boccardo-Gallouët ou de Stampacchia. Ceci est classique, il suffit en fait que $a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Part II

Problèmes non-linéaires : Existence

5. Existence de solutions de problèmes elliptiques avec second membre mesure et conditions aux limites non homogènes

Ce chapitre est à paraître aux Annales de Toulouse [41].

Pour Ω ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^N$ avec $N \geq 2$, on montre l'existence de solutions au problème elliptique

$$-\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

avec $f \in M(\overline{\Omega}) = (C(\overline{\Omega}))'$, espace des mesures qui est le dual de l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ muni de sa norme habituelle) et avec des conditions aux limites non homogènes de Neumann, Fourier et Dirichlet.

Ce problème a été étudié dans le cas de conditions homogènes de Dirichlet par Boccardo et Gallouët dans [11],[12], où il est montré l'existence d'une solution. Cependant il n'y a pas unicité comme le montre le contre-exemple de Serrin (voir [46] et [43]), nous ne montrerons donc ici que l'existence d'une solution pour un second membre mesure.

Le principe de la démonstration consiste à construire les solutions de problèmes approchés puis à considérer la limite de ces solutions. Pour cela, on régularise le second membre et les conditions aux limites. Nous nous appuierons sur les démonstrations de [15], [12] pour les étapes 1 et sur celle de [4], [26] et [25] pour les étapes 2.

Donnons les hypothèses sur a, opérateur de Leray-Lions, nous les appellerons (H) par la suite : a est une fonction de Carathéodory, c'est-à-dire que

- $a(x,s,\xi) : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ est mesurable en $x \in \mathbf{R}^N$ pour tout $s \in \mathbf{R}$ et $\xi \in \mathbf{R}^N$ et continue en $\xi \in \mathbf{R}^N$ et $s \in \mathbf{R}$ pour presque tout $x \in \mathbf{R}^N$. Nous noterons $a(x,u,\nabla u) = a(x,u(x),\nabla u(x))$.

et A vérifie aussi des conditions de coercitivité, monotonie et croissance : il existe p vérifiant $2 - 1/N < p \leq N$

- Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout s et ξ et presque tout x on ait

$$a(x,s,\xi)\xi \geq \alpha|\xi|^p$$

- Pour tout s, ξ et η et presque tout x on a

$$[a(x,s,\xi) - a(x,s,\eta)](\xi - \eta) > 0 \quad \text{pour} \quad \xi \neq \eta$$

- Il existe $b(x) \in L^{p'}(\Omega)$ ($p' = p/(p-1)$) et $\beta > 0$ tels que pour tout s et ξ et presque tout x on ait

$$|a(x,s,\xi)| \leq \beta(b(x) + |s|^{p-1} + |\xi|^{p-1})$$

Ces hypothèses sont classiques (sauf $p > 2 - 1/N$) pour l'étude des opérateurs non linéaires sous forme divergentielle (voir Leray-Lions [33]).

Pour $k > 0$, nous utiliserons la fonction « tronquante » $T_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telle que $T_k(x) = \min(k, \max(x, -k))$. Cette fonction étant lipschitzienne, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on a $T_k(u) \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, cette dernière fonction pourra donc servir de fonction test.

Nous noterons C toute constante indépendante de n, indice des suites qui interviendrons ci-après.

5.1 Conditions aux limites de Neumann

Le problème de Neumann consiste à chercher u telle que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) = f \quad & \text{dans } \Omega \\ a(x,u,\nabla u).n = g \quad & \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.1}$$

avec $f \in M(\overline{\Omega})$ et $g \in M(\partial\Omega)$, où n désigne, ici, la normale à $\partial\Omega$. On résoudra (5.1) au sens faible suivant : on cherche

$$u \in \bigcap_{q < \frac{(p-1)N}{N-1}} W^{1,q}(\Omega)$$

tel que

$$\forall \varphi \in \bigcup_{r > N} W^{1,r}(\Omega) \qquad \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla\varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi\, dg + \int_\Omega \varphi\, df.$$

où l'on note encore φ, la trace de φ sur $\partial\Omega$, ce que nous ferons désormais.

Bien entendu, si ce problème admet une solution, le choix $\varphi \equiv 1$ impose

$$\int_{\partial\Omega} dg + \int_\Omega df = 0, \tag{5.2}$$

ce que nous allons supposer. Ce problème admet alors, en particulier, une infinité de solutions : plus précisément, il existe une solution de moyenne C, pour toute constante C. Aussi cherche-t-on les solutions à moyenne donnée.

Théorème : *Soient $f \in M(\overline{\Omega})$ (ne chargeant pas le bord), $g \in M(\partial\Omega)$, vérifiant* (5.2), *Ω un ouvert borné connexe, régulier de $\mathbf{R}^N$, A vérifiant les hypothèses (H) et soit $\widetilde{u} \in \mathbf{R}$, alors le problème* (5.1) *admet une solution de moyenne $\widetilde{u}$.*

Démonstration : Soient $(f_n) \in W^{-1,p'}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ et $(g_n) \in (W^{1-1/p,p}(\partial\Omega))' \cap L^1(\partial\Omega)$ tels que $\|f_n\|_{L^1} \leq \|f\|_{M(\overline{\Omega})}$, $\|g_n\|_{L^1} \leq \|g\|_{M(\partial\Omega)}$ et $f_n \rightharpoonup f$ dans $M(\overline{\Omega})$ faible $*$ et $g_n \rightharpoonup g$ dans $M(\partial\Omega)$ faible $*$ tels que

$$\int_{\partial\Omega} g_n + \int_\Omega f_n = 0.$$

Soit $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ une solution de (5.1) avec $f = f_n$ et $g = g_n$, telle que

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u_n = \widetilde{u} \in \mathbf{R}$$

(son existence est donnée par Leray et Lions [33]) elle vérifie

$$(5.3) \quad \forall \varphi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \qquad \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n) \nabla\varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi\, g_n + \int_\Omega \varphi\, f_n.$$

Étape 1 : Montrons que u_n est borné dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour $q < (p-1)N/(N-1)$, ce qui donnera l'existence de $u \in W^{1,q}(\Omega)$ tel qu'une sous-suite de u_n converge vers u dans $W^{1,q}(\Omega)$ faible.

Pour $m > 0$ donné, soit $\psi_m(x) = m \int_0^x dt/(t+1)^{m+1}$ pour $x \geq 0$ et $\psi_m(x) = -\psi_m(-x)$ pour $x \leq 0$ on a $|\psi_m| \leq 1$, $|\psi'_m| \leq m$ et ψ_m continue. Alors $\psi_m(u_n) \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, il est donc possible de choisir $\varphi = \psi_m(u_n)$ dans (5.3) qui devient

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n) \nabla\psi_m(u_n) = \int_{\partial\Omega} \psi_m(u_n) g_n + \int_\Omega \psi_m(u_n) f_n$$

or $\nabla\psi_m(u_n) = \psi'_m(u_n)\nabla u_n$ donc par coercitivité

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^p \psi'_m(u_n) \leq \|f_n\|_{L^1} + \|g_n\|_{L^1}$$

et $\psi'_m(x) = m/(|x|+1)^{m+1}$ donc

$$\alpha \int_\Omega m \frac{|\nabla u_n|^p}{(|u_n|+1)^{m+1}} \leq C,$$

grâce à l'inégalité de Hölder nous obtenons pour $q < p$

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^q \leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla u_n|^p}{(|u_n|+1)^{m+1}} \right)^{q/p} \left(\int_\Omega (|u_n|+1)^{(m+1)q/(p-q)} \right)^{(p-q)/p}.$$

Choisissons alors $m > 0$ tel que $(m+1)q/(p-q) < q^*$ $(1/q^* = 1/q - 1/N)$ ce qui est possible pour $q < (p-1)N/(N-1)$ alors

$$(|u_n|+1)^{(m+1)q/(p-q)} \leq \varepsilon |u_n|^{q^*} + C(\varepsilon)$$

pour $\varepsilon > 0$ petit, où $C(\varepsilon)$ dépend de ε. On obtient donc

$$(5.4) \qquad \int_\Omega |\nabla u_n|^q \leq C\varepsilon^{(p-q)/p} \left(\int_\Omega |u_n|^{q^*} \right)^{(p-q)/p} + C$$

or la moyenne de u_n est $\widetilde{u}$ donc l'inégalité de Poincaré-Sobolev nous donne

$$\|u_n - \widetilde{u}\|_{L^{q^*}} \leq C\|\nabla u_n\|_{L^q}$$

soit

$$\|u_n\|_{L^{q^*}} \leq C\|\nabla u_n\|_{L^q} + |\widetilde{u}|(\mathrm{mes}(\Omega))^{1/q^*}$$

d'où grâce à (5.4)

$$\left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\right)^{1/q^*} \leq C\varepsilon^{(p-q)/pq}\left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\right)^{(p-q)/pq} + C \leq \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\right)^{(p-q)/pq} + C$$

pour ε assez petit. Or $(p-q)/pq \leq 1/q^*$ pour $p \leq N$ donc $\|u_n\|_{L^{q^*}} \leq C$ et donc, grâce à (5.4), $\int_\Omega |\nabla u_n|^q \leq C$. Ainsi u_n est bornée dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q<(p-1)N/(N-1)$, il est donc possible d'extraire de u_n une sous-suite convergeant faiblement dans $W^{1,q}(\Omega)$.

Étape 2 : Afin de passer à la limite dans $a(x,u_n,\nabla u_n)$, la convergence presque partout de u_n et ∇u_n est nécessaire. Celle de u_n s'obtient par extraction d'une sous-suite car u_n converge dans $L^q(\Omega)$ (théorème de Rellich), mais il faut montrer le résultat pour ∇u_n.

Pour cela, montrons que ∇u_n tend vers ∇u en mesure (et donc que (∇u_n) est de Cauchy en mesure), ce qui entraînera $\nabla u_n \to \nabla u$ presque partout, pour une sous suite (voir chapitre 2). Cela consiste à montrer que

$$\forall\delta, \forall\varepsilon, \exists n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0 \quad \mathrm{mes}\{x; |(\nabla u_n - \nabla u)(x)| \geq \delta\} \leq \varepsilon$$

remarquons que pour $k>0$ et $\eta>0$ on a

$$\begin{aligned}&\{|(\nabla u_n - \nabla u)(x)| \geq \delta\} \subset \\ &\qquad \{|u_n| \geq k\} \cup \{|u| \geq k\} \cup \{|\nabla u_n| \geq k\} \cup \{|\nabla u| \geq k\} \cup \{|u_n - u| \geq \eta\} \\ &\qquad \cup \{|(\nabla u_n - \nabla u)(x)| \geq \delta, |u_n| \leq k, |u| \leq k, |\nabla u_n| \leq k, |\nabla u| \leq k, |u_n - u| \leq \eta\}\end{aligned}$$

nous appellerons A_1 à A_6 les six ensembles du membre de droite. On pourra remarquer, dans la suite de la démonstration, que seule la majoration de la mesure de A_6 fait intervenir (5.3), l'équation dont u_n est solution.

Majorons $\mathrm{mes}(A_1)$, nous avons

$$\int_\Omega |u_n| \geq \int_{A_1} |u_n| \geq k\,\mathrm{mes}(A_1)$$

donc

$$\mathrm{mes}(A_1) \leq \frac{1}{k}\int_\Omega |u_n| \leq \frac{C}{k} \leq \varepsilon$$

pour k assez grand, puisque u_n est borné dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour $q<(p-1)N/(N-1)$ et donc dans $L^1(\Omega)$. De même ∇u_n est borné dans $L^1(\Omega)$ et $u \in W^{1,q}(\Omega) \subset W^{1,1}(\Omega)$, donc les mesures de A_2, A_3 et A_4 sont majorées de la même façon. Fixons k tel que chacune des mesures soit plus petite que ε.

Majorons maintenant mes(A_5), nous avons

$$\int_\Omega |(u_n - u)| \geq \int_{A_5} |(u_n - u)| \geq \eta \operatorname{mes}(A_5)$$

or u_n converge vers u dans $L^1(\Omega)$, grâce au théorème de Rellich, donc pour η donné il existe n_1 tel que pour $n \geq n_1$ on ait

$$\operatorname{mes}(A_5) \leq \varepsilon.$$

Il reste donc à majorer mes(A_6), et à choisir η. D'après la monotonie de A, nous avons $[a(x,s,\xi_1) - a(x,s,\xi_2)](\xi_1 - \xi_2) > 0$ pour $\xi_1 - \xi_2 \neq 0$ or l'ensemble des (s, ξ_1, ξ_2) tels que $|s| \leq k$, $|\xi_1| \leq k$, $|\xi_2| \leq k$ et $|\xi_1 - \xi_2| \geq \delta$ est compact et A est continue en (s, ξ) pour presque tout x, donc $[a(x,s,\xi_1) - a(x,s,\xi_2)](\xi_1 - \xi_2)$ atteint sur ce compact son minimum que nous noterons $\gamma(x)$, qui vérifie $\gamma(x) > 0$ pp. De plus grâce à un résultat d'intégration (voir chapitre 2), il existe $\varepsilon' > 0$ tel que

$$\int_{A_6} \gamma \leq \varepsilon' \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{mes}(A_6) \leq \varepsilon$$

il suffit donc de montrer que $\int_{A_6} \gamma \leq \varepsilon'$. Par définition de γ nous avons

$$\int_{A_6} \gamma \leq \int_{A_6} [a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u_n,\nabla T_k(u))](\nabla u_n - \nabla T_k(u))\mathbf{1}_{\{|u_n - T_k(u)| \leq \eta\}}$$

car sur A_6, $|u_n - T_k(u)| = |u_n - u| \leq \eta$, de plus le terme intégré est positif et $\nabla T_\eta(u_n - T_k(u)) = (\nabla u_n - \nabla T_k(u))\mathbf{1}_{\{|u_n - T_k(u)| \leq \eta\}}$, nous avons donc

$$\begin{aligned}\int_{A_6} \gamma &\leq \int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u_n,\nabla T_k(u))]\nabla T_\eta(u_n - T_k(u)) \\ &\leq \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_\eta(u_n - T_k(u)) - \int_\Omega a(x,u_n,\nabla T_k(u))\nabla T_\eta(u_n - T_k(u))\end{aligned}$$

et si l'on choisit $\varphi = T_\eta(u_n - T_k(u)) \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ dans (5.3) on obtient

$$\left| \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_\eta(u_n - T_k(u)) \right| \leq \eta \left(\|f_n\|_{L^1} + \|g_n\|_{L^1}\right) \leq \eta\, C$$

il reste donc à majorer l'autre intégrale, or pour $|u_n| \geq k + \eta$ on a $|u_n - T_k(u)| \geq \eta$ d'où $\nabla T_\eta(u_n - T_k(u)) = 0$, si bien que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(x,u_n,\nabla T_k(u))\nabla T_\eta(u_n - T_k(u)) \\ &\qquad = \int_\Omega a(x, T_{k+\eta}(u_n), \nabla T_k(u))\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u_n) - T_k(u)).\end{aligned}$$

Soit $h > 0$, choisissons maintenant $\varphi = T_h(u_n) \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ dans (5.3), alors

$$\left| \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_h(u_n) \right| \leq h \left(\|f_n\|_{L^1} + \|g_n\|_{L^1}\right) \leq h\, C$$

et par coercitivité

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_h(u_n) = \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n \mathbf{1}_{|u_n|\le h}$$
$$\ge \alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^p \mathbf{1}_{|u_n|\le h} = \alpha \int_\Omega |\nabla T_h(u_n)|^p$$

et l'inégalité de Poincaré avec moyenne nous donne alors

$$\|T_h(u_n)\|^p_{W^{1,p}} \le C\left(\int_\Omega |\nabla T_h(u_n)|^p + |\widetilde{u}|^p\right) \le C(hC/\alpha + |\widetilde{u}|^p)$$

donc $T_h(u_n)$ est borné dans $W^{1,p}(\Omega)$ pour tout h. Aussi pour $h = k+\eta$, $T_{k+\eta}(u_n)$ tend, à une sous-suite près, vers $T_{k+\eta}(u)$ faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$ et donc fortement dans $L^p(\Omega)$ et presque partout quand $n \to +\infty$. Donc $a(x,T_{k+\eta}(u_n),\nabla T_k(u))$ converge presque partout et $|a(x,T_{k+\eta}(u_n),\nabla T_k(u))|^{p'}$ est equi-intégrable, aussi grâce au théorème de Vitali, $a(x,T_{k+\eta}(u_n),\nabla T_k(u))$ converge fortement dans $L^{p'}(\Omega)$ vers $a(x,T_{k+\eta}(u),\nabla T_k(u))$. Et comme $\mathbf{1}_{\{|T_{k+\eta}(u_n)-T_k(u)|\le\eta\}}$ tend presque partout vers $\mathbf{1}_{\{|T_{k+\eta}(u)-T_k(u)|\le\eta\}}$ et est borné, le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne la convergence forte de

$$a(x,T_{k+\eta}(u_n),\nabla T_k(u))\mathbf{1}_{\{|T_{k+\eta}(u_n)-T_k(u)|\le\eta\}} \to a(x,T_{k+\eta}(u),\nabla T_k(u))\mathbf{1}_{\{|T_{k+\eta}(u)-T_k(u)|\le\eta\}}$$

dans $L^{p'}(\Omega)$.

De plus comme $T_{k+\eta}(u_n)$ converge faiblement dans $W^{1,p}(\Omega)$, $\nabla(T_{k+\eta}(u_n)-T_k(u))$ converge faiblement vers $\nabla(T_{k+\eta}(u)-T_k(u))$ dans $L^p(\Omega)$ pour $n\to+\infty$ donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,T_{k+\eta}(u_n),\nabla T_k(u))\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u_n)-T_k(u))$$
$$= \int_\Omega a(x,T_{k+\eta}(u),\nabla T_k(u))\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u)-T_k(u))$$

or $\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u)-T_k(u)) \to 0$ pp quand $\eta\to 0$, et pour $\eta \le 1$

$$\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u)-T_k(u)) \le \nabla T_1(T_{k+1}(u)-T_k(u)) \in L^p(\Omega)$$

et

$$a(x,T_{k+\eta}(u),\nabla T_k(u)) \le \beta(b(x)+|T_{k+1}(u)|^{p-1}+|\nabla T_k(u)|^{p-1}) \in L^{p'}(\Omega)$$

donc par convergence dominée, l'intégrale du second membre tend vers 0 pour $\eta\to 0$.

Fixons $\eta < \varepsilon'/2C$ tel que

$$\left|\int_\Omega a(x,T_{k+\eta}(u),\nabla T_k(u))\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u)-T_k(u))\right| \le \frac{\varepsilon'}{4}$$

alors soit n_2 tel que pour tout $n\ge n_2$

$$\left|\int_\Omega a(x,T_{k+\eta}(u_n),\nabla T_k(u))\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u_n)-T_k(u))\right.$$
$$\left.-\int_\Omega a(x,T_{k+\eta}(u),\nabla T_k(u))\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u)-T_k(u))\right| \le \frac{\varepsilon'}{4}$$

donc (grâce à $\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u_n) - T_k(u)) = \nabla T_\eta(u_n - T_k(u)))$

$$\left| \int_\Omega a(x, u_n, \nabla T_k(u)) \nabla T_\eta(u_n - T_k(u)) \right| \leq \frac{\varepsilon'}{2}$$

alors

$$\int_{A_6} \gamma \leq C \frac{\varepsilon'}{2\,C} + \frac{\varepsilon'}{2} = \varepsilon'$$

et le choix de ε' entraîne donc

$$\mathrm{mes}(A_6) \leq \varepsilon$$

η étant fixé, les majorations de $\mathrm{mes}(A_5)$ et de $\mathrm{mes}(A_6)$ nous donnent n_1 et n_2 tels que pour $n \geq \max(n_1, n_2)$ on ait

$$\mathrm{mes}(\{|(\nabla u_n - \nabla u_m)(x)| \geq \delta\}) \leq 6\varepsilon,$$

donc (∇u_n) est de Cauchy en mesure.

Étape 3 : Montrons que u est solution de (5.1). Soit $\varphi \in W^{1,r}(\Omega)$ avec $r > N$ alors $\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, donc par définition de u_n

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n) \nabla\varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi\, g_n + \int_\Omega \varphi\, f_n.$$

Comme f_n et g_n convergent dans $M(\overline{\Omega})$ $*$-faible et $M(\partial\Omega)$ $*$-faible respectivement et que $\varphi \in W^{1,r}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, $\int_{\partial\Omega} \varphi\, g_n + \int_\Omega \varphi\, f_n$ converge vers $\int_{\partial\Omega} \varphi\, dg + \int_\Omega \varphi\, df$. Or nous avons vu que u_n et ∇u_n sont bornés dans $L^q(\Omega)$ pour $q < (p-1)N/(N-1)$, la condition de croissance sur A entraîne donc que $a(x, u_n, \nabla u_n)$ est borné dans $L^q(\Omega)$ pour $q < N/(N-1)$. Soit $s < q$, l'inégalité de Hölder nous donne alors pour E mesurable

$$\int_E |a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u, \nabla u)|^s$$
$$\leq \left(\int_\Omega |a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u, \nabla u)|^q \right)^{s/q} \left(\int_\Omega \mathbf{1}_E \right)^{1-s/q} \leq C\,\mathrm{mes}(E)$$

ainsi $|a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u, \nabla u)|^s$ est équi-intégrable et converge presque partout vers 0 donc converge dans $L^1(\Omega)$, grâce au théorème de Vitali, et donc $a(x, u_n, \nabla u_n) \to a(x, u, \nabla u)$ dans $L^s(\Omega)$ pour $s < N/(N-1)$, ainsi

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n) \nabla\varphi \to \int_\Omega a(x, u, \nabla u) \nabla\varphi$$

et donc

$$\forall \varphi \in \bigcup_{r > N} W^{1,r}(\Omega) \qquad \int_\Omega a(x, u, \nabla u) \nabla\varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi\, dg + \int_\Omega \varphi\, df.$$

Remarquons que ∇u_n est borné dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour $q < (p-1)N/(N-1)$ aussi de la même façon que ci-dessus, nous pouvons montrer que $|\nabla(u_n - u)|^q$ est équi-intégrable et converge presque partout et donc, grâce au théorème de Vitali, que $\nabla u_n \to \nabla u$ dans $L^q(\Omega)$ pour $q < (p-1)N/(N-1)$.

5.2 Conditions aux limites de Fourier

Le problème de Fourier consiste à chercher u telle que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) &= f \quad \text{dans } \Omega \\ a(x,u,\nabla u).n + \lambda u &= g \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.5}$$

avec $f \in M(\overline{\Omega})$, $g \in M(\partial\Omega)$ et $\lambda > 0$. On résoudra (5.5) au sens faible suivant : on cherche

$$u \in \bigcap_{q < \frac{(p-1)N}{N-1}} W^{1,q}(\Omega)$$

tel que

$$\forall \varphi \in \bigcup_{r > N} W^{1,r}(\Omega) \qquad \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla\varphi + \lambda \int_{\partial\Omega} u\,\varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi\, dg + \int_\Omega \varphi\, df.$$

Théorème : *Soient $f \in M(\overline{\Omega})$ (ne chargeant pas le bord), $g \in M(\partial\Omega)$, Ω un ouvert borné connexe régulier de $\mathbf{R}^N$, et soit A vérifiant les hypothèses (H), alors le problème (5.5) admet une solution.*

Avant de démontrer ce résultat rappelons une inégalité de type Poincaré et une inégalité de type Poincaré-Sobolev (que nous démontrerons par soucis de clarté).

Lemme : *Il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $u \in W^{1,1}(\Omega)$ on ait*

$$\int_\Omega |u| \le C_1 \left(\int_\Omega |\nabla u| + \int_{\partial\Omega} |u| \right)$$

et il existe C_2 tel que pour tout $u \in W^{1,q}(\Omega)$ $(1 < q < N)$ on ait

$$\left(\int_\Omega |u|^{q^*} \right)^{q/q^*} \le C_2 \left(\left(\int_{\partial\Omega} |u| \right)^q + \int_\Omega |\nabla u|^q \right)$$

Démonstration du lemme : Montrons la première inégalité par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite (u_n) telle que $\int_\Omega |u_n| = |\Omega|$ et $\int_\Omega |\nabla u_n| + \int_{\partial\Omega} |u_n| \to 0$ appliquons alors l'inégalité de Poincaré-Wirtinger

$$\int_\Omega |u_n - 1| \le C \int_\Omega |\nabla u_n| \to 0$$

donc $u_n \to 1$ dans $L^1(\Omega)$ et dans $W^{1,1}(\Omega)$ or $\int_{\partial\Omega} 1 \neq 0$ et l'application trace est continue, il y a donc une contradiction.

Montrons maintenant la second inégalité. Soit $q \ge 1$ alors d'après l'inégalité de Poincaré avec moyenne il existe $C > 0$ tel que pour $u \in W^{1,q}(\Omega)$ avec $\int_\Omega u = \widetilde{u}|\Omega|$ on ait

$$\|u - \widetilde{u}\|_{L^q} \le C \|\nabla u\|_{L^q}$$

soit

$$\int_\Omega |u|^q \le C \int_\Omega |\widetilde{u}|^q + \int_\Omega |\nabla u|^q$$

or $\int_\Omega |\widetilde{u}|^q = |\widetilde{u}|^q|\Omega|$ et $|\widetilde{u}|^q|\Omega|^q \leq (\int_\Omega |u|)^q$ donc $\int_\Omega |\widetilde{u}|^q \leq C(\int_\Omega |u|)^q$ d'où

$$\int_\Omega |u|^q \leq C\left(\int_\Omega |u|\right)^q + \int_\Omega |\nabla u|^q$$

appliquons alors le lemme puisque $u \in W^{1,1}$

$$\int_\Omega |u| \leq C\left(\int_\Omega |\nabla u| + \int_{\partial\Omega} |u|\right)$$

et $\int_\Omega |\nabla u| \leq C(\int_\Omega |\nabla u|^q)^{1/q}$ (inégalité de Hölder) donc

$$\int_\Omega |u|^q \leq C\left[\left(\int_{\partial\Omega} |u|\right)^q + \int_\Omega |\nabla u|^q\right]$$

ce qui combiné avec l'inégalité de Sobolev nous donne

$$\left(\int_\Omega |u|^{q^*}\right)^{q/q^*} \leq C\left[\left(\int_{\partial\Omega} |u|\right)^q + \int_\Omega |\nabla u|^q\right].$$

qui est bien l'inégalité demandée.

Démonstration du théorème : Soient $(f_n) \in W^{-1,p'}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ et $(g_n) \in (W^{1-1/p,p}(\partial\Omega))' \cap L^1(\partial\Omega)$ tels que $\|f_n\|_{L^1} \leq \|f\|_{M(\overline{\Omega})}$, $\|g_n\|_{L^1} \leq \|g\|_{M(\partial\Omega)}$ et $f_n \rightharpoonup f$ dans $M(\overline{\Omega})$ $*$-faible et $g_n \rightharpoonup g$ dans $M(\partial\Omega)$ $*$-faible. Soit $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ une solution de (5.5) avec $f = f_n$ et $g = g_n$ (Leray-Lions [33]), elle vérifie

$$\text{(5.6)}\ \forall\varphi \in W^{1,p} \cap L^\infty(\Omega)\quad \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla\varphi + \lambda\int_{\partial\Omega} u_n\,\varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi\, g_n + \int_\Omega \varphi\, f_n.$$

Étape 1 : Montrons que u_n est borné dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour $q < (p-1)N/(N-1)$. La méthode est la même que pour les conditions de Neumann, mais l'inégalité de Poincaré-Sobolev que nous venons de démontrer fait intervenir $\int_{\partial\Omega} |u_n|$, il nous faut donc une estimation de cette intégrale. Comme $T_k(u_n) \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ nous pouvons choisir $\varphi = T_k(u_n)$ dans (5.6), ce qui nous donne

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n\, {T_k}'(u_n) + \lambda\int_{\partial\Omega} u_n\, T_k(u_n) = \int_{\partial\Omega} T_k(u_n)\, g_n + \int_\Omega T_k(u_n)\, f_n$$

or $a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n \geq 0$, ${T_k}'(x) \geq 0$ et $|T_k| \leq k$ donc

$$\lambda\int_{\partial\Omega} u_n\, T_k(u_n) \leq k(\|g_n\|_{L^1} + \|f_n\|_{L^1})$$

soit

$$\lambda\int_{\partial\Omega} u_n \frac{1}{k} T_k(u_n) \leq C$$

or $\lim_{k\to 0} x\,T_k(x) = |x|$ pour $x \neq 0$ donc en passant à la limite pour $k \to 0$ (par convergence dominée) on a

$$\int_{\partial\Omega} |u_n| < C/\lambda. \tag{5.7}$$

Comme pour les conditions de Neumann, choisissons $\varphi = \psi_m(u_n)$ dans (5.6). Or $\lambda > 0$ et $x\,\psi_m(x) \geq 0$ donc $\lambda \int_{\partial\Omega} u_n\, \psi_m(u_n) \geq 0$, nous obtenons alors

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^p \psi_m'(u_n) \leq \|f_n\|_{L^1} + \|g_n\|_{L^1}$$

et comme dans le cas Neumann on peut montrer que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^q \leq C\varepsilon^{(p-q)/p} \left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\right)^{(p-q)/p} + C,$$

donc grâce au lemme, à (5.7) et pour ε petit on a

$$\left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\right)^{1/q^*} \leq \frac{1}{2} \left(\int_\Omega |u_n|^{q^*}\right)^{(p-q)/pq} + C + C/\lambda,$$

et on conclut de la même façon que pour les conditions de Neumann.

Étape 2 : Il faut ici aussi montrer la convergence presque partout de ∇u_n, on procède comme précédemment : on construit de même A_1 à A_6, et seule la majoration de mes(A_6) fait intervenir (5.6), les autres majorations s'appliquent de façon identique. Pour celle de A_6 on peut remarquer que si l'on choisit $\varphi = T_\eta(u_n - T_k(u))$ dans (5.6) on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_\eta(u_n - T_k(u)) + \lambda \int_\Omega u_n\, T_\eta(u_n - T_k(u))& \\ = \int_\Omega f_n\, T_\eta(u_n - T_k(u)) + \int_{\partial\Omega} g_n\, T_\eta(u_n - T_k(u))&\end{aligned}$$

notons le second membre $C_{\eta,n}$, nous obtenons alors

$$\begin{aligned}\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u_n,\nabla T_k(u))]\nabla T_\eta(u_n - T_k(u)) + \lambda \int_\Omega (u_n - T_k(u))T_\eta(u_n - T_k(u))& \\ = C_{\eta,n} + \lambda \int_\Omega T_k(u) T_\eta(u_n - T_k(u)) - \int_\Omega a(x,u_n,\nabla T_k(u))\nabla T_\eta(u_n - T_k(u))&\end{aligned}$$

de plus nous avons $(u_n - T_k(u))T_\eta(u_n - T_k(u)) \geq 0$, $|C_{\eta,n}| \leq \eta\, C$ et $|\int_\Omega T_k(u)T_\eta(u_n - T_k(u))| \leq k\,\eta\, C$ donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega [a(x,u_n,\nabla u_n) - a(x,u_n,\nabla T_k(u))]\nabla T_\eta(u_n - T_k(u))& \\ \leq \eta\, C(1 + \lambda\, k) + \left|\int_\Omega a(x,u_n,\nabla T_k(u))\nabla T_\eta(u_n - T_k(u))\right|&\end{aligned}$$

où k a été fixé pour que les mesures de A_1 à A_4 soient inférieures à ε.

Et si l'on choisit $\varphi = T_h(u_n)$ dans (5.6), comme $u_n\, T_h(u_n) \geq 0$, on obtient

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla T_h(u_n) \leq h\, C$$

or nous avons vu que $\int_{\partial\Omega} |u_n|$ est borné donc $\int_{\partial\Omega} T_k(u_n)$ aussi et l'on peut donc, grâce au lemme, démontrer comme précédemment que $T_h(u_n)$ est borné dans $W^{1,p}(\Omega)$ et choisir $\eta < \varepsilon'/2C(1+\lambda\, k)$ tel que

$$\left| \int_\Omega a(x, u_n, \nabla T_k(u))\nabla T_\eta(u_n - T_k(u)) \right| \leq \frac{\varepsilon'}{2}$$

pour n assez grand, alors

$$\int_{A_6} \gamma \leq \int_\Omega [a(x, u_n, \nabla u_n) - a(x, u_n, \nabla T_k(u))]\nabla T_\eta(u_n - T_k(u)) \leq \varepsilon'$$

ce qui permet d'achever cette étape de la même façon.

Étape 3 : Comme pour les conditions aux limites de Neumann nous avons, pour $\varphi \in W^{1,r}(\Omega)$ avec $r > N$, les convergences de $\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla\varphi$, $\int_\Omega \varphi\, f_n$ et $\int_{\partial\Omega} \varphi\, g_n$, il reste donc à montrer celle de $\int_{\partial\Omega} u_n\, \varphi$. Comme $u_n \to u$ dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour $q < (p-1)N/(N-1)$ la trace de u_n sur $\partial\Omega$ converge vers celle de u dans $W^{1-1/q,q}(\partial\Omega)$ et donc dans $L^q(\partial\Omega)$, comme $\varphi \in W^{1,r}(\Omega)$ pour $r > N$, $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ donc $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega)$ et nous obtenons

$$\int_{\partial\Omega} u_n\, \varphi \to \int_{\partial\Omega} u\, \varphi$$

ce qui permet de conclure que u est solution de (5.5).

5.3 Conditions aux limites de Dirichlet

Le problème de Dirichlet consiste à chercher u tel que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a(x, u, \nabla u)) &= f \quad \text{dans } \Omega \\ u &= g \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.8}$$

avec $f \in M(\overline{\Omega})$ et $g \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$. On résoudra (5.8) au sens faible suivant : on cherche

$$u \in \bigcap_{q < \frac{(p-1)N}{N-1}} W^{1,q}(\Omega)$$

tel que, pour $\widetilde{g} \in W^{1,p}(\Omega)$, un relèvement de g, on ait $u - \widetilde{g} \in \bigcap_{q < \frac{(p-1)N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$, et

$$\forall \varphi \in \bigcup_{r > N} W_0^{1,r}(\Omega) \qquad \int_\Omega a(x, u, \nabla u)\nabla\varphi = \int_\Omega \varphi\, df.$$

Théorème : *Soient $f \in M(\overline{\Omega})$, $g \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$, Ω un ouvert borné régulier, et soit A vérifiant les hypothèses (H), alors le problème* (5.8) *admet une solution.*

Démonstration : Soient $(f_n) \in W^{-1,p'}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ tel que $\|f_n\|_{L^1} \le \|f\|_{M(\overline{\Omega})}$ et $f_n \rightharpoonup f$ dans $M(\overline{\Omega})$ faible $*$. Soit $u_n \in W^{1,p}(\Omega)$ une solution de (5.8) avec $f = f_n$ (Leray-Lions [33]), elle vérifie

$$\forall \varphi \in W_0^{1,p} \cap L^\infty(\Omega) \qquad \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla\varphi = \int_\Omega \varphi\, f_n, \tag{5.9}$$

et $u_n - g \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Étape 1 : Nous montrons, là encore, que u_n est borné dans $W^{1,q}(\Omega)$ pour $q<(p-1)N/(N-1)$. La démonstration ne peut pas être ici faite avec $\varphi = \psi_m(u_n - \widetilde{g})$, aussi allons nous adopter une variante de la démonstration correspondant aux conditions aux limites de Neumann.

Soit $k \in \mathbf{N}$, choisissons $\varphi = T_k(u_n - \widetilde{g}) \in W_0^{1,p} \cap L^\infty(\Omega)$ alors

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla(u_n - \widetilde{g})\mathbf{1}_{\{|u_n - \widetilde{g}| \le k\}} = \int_\Omega T_k(u_n - \widetilde{g})\, f_n$$

donc

$$\int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla u_n\, \mathbf{1}_{\{|u_n - \widetilde{g}| \le k\}} = \int_\Omega T_k(u_n - \widetilde{g})\, f_n + \int_\Omega a(x, u_n, \nabla u_n)\nabla\widetilde{g}\, \mathbf{1}_{\{|u_n - \widetilde{g}| \le k\}}$$

et par coercitivité et condition de croissance de A

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^p \mathbf{1}_{\{|u_n - \widetilde{g}| \le k\}} \le k\|f_n\|_{L^1} + \beta\int_\Omega (b(x) + |u_n|^{p-1} + |\nabla(u_n)|^{p-1})|\nabla\widetilde{g}|\mathbf{1}_{\{|u_n - \widetilde{g}| \le k\}}$$

et grâce à l'inégalité de Hölder

$$\int_\Omega (b(x) + |u_n|^{p-1} + |\nabla u_n|^{p-1})|\nabla\widetilde{g}|\mathbf{1}_{\{|u_n - \widetilde{g}| \le k\}} \le \|\widetilde{g}\|_{W^{1,p}} \left(\int_\Omega (b(x)^{p'} + |u_n|^p + |\nabla u_n|^p)(\mathbf{1}_{\{|u_n - \widetilde{g}| \le k\}})\right)^{(p-1)/p}$$

car $(\mathbf{1}_{\{|u_n - \widetilde{g}| \le k\}})^{p/(p-1)} = \mathbf{1}_{\{|u_n - \widetilde{g}| \le k\}}$. L'inégalité de Poincaré nous donne, appliquée à $T_k(u_n - \widetilde{g}) \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_\Omega |u_n - \widetilde{g}|^p \mathbf{1}_{\{|u_n - \widetilde{g}| \le k\}} \le \int_\Omega |T_k(u_n - \widetilde{g})|^p \le C\int_\Omega |\nabla(u_n - \widetilde{g})|^p \mathbf{1}_{\{|u_n - \widetilde{g}| \le k\}}$$

si bien que

$$\int_\Omega |u_n|^p \mathbf{1}_{\{|u_n - \widetilde{g}| \le k\}} \le C\int_\Omega (|\widetilde{g}|^p + |\nabla\widetilde{g}|^p) + C\int_\Omega |\nabla u_n|^p \mathbf{1}_{\{|u_n - \widetilde{g}| \le k\}}$$

alors

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^p \mathbf{1}_{\{|u_n-\widetilde{g}|\le k\}} \le k\|f\|_{M(\overline{\Omega})} + \beta C\|\widetilde{g}\|_{W^{1,p}}[\|b\|_{W^{1,p'}} + (\|\widetilde{g}\|_{W^{1,p}})^{p-1}]$$
$$+2\beta C\|\widetilde{g}\|_{W^{1,p}} \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^p \mathbf{1}_{\{|u_n-\widetilde{g}|\le k\}}\right)^{(p-1)/p}$$

donc

$$\frac{1}{k}\int_\Omega |\nabla u_n|^p \mathbf{1}_{\{|u_n-\widetilde{g}|\le k\}} \le C + C\left(\frac{1}{k}\int_\Omega |\nabla u_n|^p \mathbf{1}_{\{|u_n-\widetilde{g}|\le k\}}\right)^{(p-1)/p}$$

et $(p-1)/p < 1$ donc il existe C indépendant de n et de k tel que

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^p \mathbf{1}_{\{|u_n-\widetilde{g}|\le k\}} \le C\,k$$

or $\int_\Omega |\nabla \widetilde{g}|^p \mathbf{1}_{\{|u_n-\widetilde{g}|\le k\}} \le (\|\nabla \widetilde{g}\|_{L^p})^p$ donc

$$\int_\Omega |\nabla (u_n-\widetilde{g})|^p \mathbf{1}_{\{|u_n-\widetilde{g}|\le k\}} \le C\,k \tag{5.10}$$

et donc

$$\sum_{l=0}^{k-1}\int_\Omega |\nabla (u_n-\widetilde{g})|^p \mathbf{1}_{\{l\le|u_n-\widetilde{g}|\le l+1\}} \le C\,k \tag{5.11}$$

et comme précédemment, il s'agit de majorer

$$\int_\Omega \frac{|\nabla (u_n-\widetilde{g})|^p}{(1+|u_n-\widetilde{g}|)^{m+1}} = \sum_{k\in\mathbf{N}}\int_\Omega \frac{|\nabla (u_n-\widetilde{g})|^p}{(1+|u_n-\widetilde{g}|)^{m+1}}\mathbf{1}_{\{k\le|u_n-\widetilde{g}|\le k+1\}}$$
$$\le \sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{1}{(1+k)^{m+1}}\int_\Omega |\nabla (u_n-\widetilde{g})|^p \mathbf{1}_{\{k\le|u_n-\widetilde{g}|\le k+1\}}$$

posons

$$a_k = \frac{1}{(1+k)^{m+1}} \quad \text{et} \quad b_k = \int_\Omega |\nabla (u_n-\widetilde{g})|^p \mathbf{1}_{\{k\le|u_n-\widetilde{g}|\le k+1\}}$$

ce qui nous amène à considérer $\sum_{k\in\mathbf{N}} a_k\, b_k$, notons $B_k = \sum_{l=0}^{k-1} b_l$ pour $k \ge 1$ et $B_0 = 0$ alors pour $N \in \mathbf{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} a_k\, b_k = \sum_{k=0}^{N} a_k\,(B_{k+1}-B_k) &= \sum_{k=0}^{N} a_k\, B_{k+1} - \sum_{k=0}^{N} a_k\, B_k\\ &= \sum_{k=0}^{N} a_k\, B_{k+1} - \sum_{k=0}^{N} a_{k+1}\, B_{k+1} + a_{N+1}\, B_{N+1}\\ &= \sum_{k=0}^{N} (a_k - a_{k+1})\, B_{k+1} + a_{N+1}\, B_{N+1}\end{aligned}$$

or (5.11) nous donne $B_k \leq C\,k$ donc $\lim_{N\to+\infty} a_{N+1}\,B_{N+1} = 0$ et

$$0 \leq (a_k - a_{k+1})\,B_{k+1} \leq \frac{C\,k}{(1+k)^{m+2}} + o\left(\frac{k}{(1+k)^{m+2}}\right)$$

comme $m>0$, cette série est convergente donc la série $\sum_{k\in\mathbf{N}} a_k\,b_k$ est aussi convergente et il existe donc C tel que

$$\int_\Omega \frac{|\nabla(u_n-\widetilde{g})|^p}{(1+|u_n-\widetilde{g}|)^{m+1}} \leq \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k\,b_k \leq C$$

aussi, comme pour les conditions de Neumann, on peut montrer que

$$\int_\Omega |\nabla(u_n-\widetilde{g})|^q \leq C\varepsilon^{(p-q)/p}\left(\int_\Omega |u_n-\widetilde{g}|^{q^*}\right)^{(p-q)/p} + C,$$

de plus on a $u_n-\widetilde{g}\in W_0^{1,p}(\Omega)$, donc l'inégalité de Poincaré-Sobolev nous donne

$$\left(\int_\Omega |u_n-\widetilde{g}|^{q^*}\right)^{q/q^*} \leq C\int_\Omega |\nabla(u_n-\widetilde{g})|^q$$

donc pour ε petit nous obtenons

$$\left(\int_\Omega |u_n-\widetilde{g}|^{q^*}\right)^{1/q^*} \leq \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |u_n-\widetilde{g}|^{q^*}\right)^{(p-q)/pq} + C,$$

et pour $q<(p-1)N/(N-1)$, on conclut de la même façon que précédemment que $u_n-\widetilde{g}$ est borné dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ et donc que u_n est borné dans $W^{1,q}(\Omega)$.

Remarque : Au cours de cette démonstration nous avons montré le lemme suivant qui est plus fort que celui qui est utilisé dans [11] :

Lemme : *Soient (v_n) une suite de $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $C>0$ tels que*

$$\int_\Omega |\nabla v_n|^p \mathbf{1}_{\{|v_n|\leq k\}} \leq C\,k$$

pour tout $k\in\mathbf{N}$ alors $\int_\Omega |\nabla v_n|^q \leq C'$ donc (v_n) est bornée dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q<(p-1)N/(N-1)$.

Étape 2 : Il s'agit de montrer la convergence de ∇u_n presque partout, il suffit, ici encore, de majorer $\mathrm{mes}(A_6)$.

Il faut montrer que pour $h>0$, $T_h(u_n-\widetilde{g})$ est borné dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Ceci vient presque d'être fait, en effet pour $k=h$, (5.10) entraîne $\int_\Omega |\nabla T_h(u_n-\widetilde{g})|^p \leq C\,h$ et d'autre part $|T_h(u_n-\widetilde{g})|\leq h$ donc, pour h fixé, $T_h(u_n-\widetilde{g})$ est borné dans $W_0^{1,q}(\Omega)$.

Pour majorer $\mathrm{mes}(A_6)$, choisissons $\varphi = T_\eta(u_n-\widetilde{g}-T_k(u-\widetilde{g}))\in W_0^{1,p}(\Omega)$ dans (5.9) alors

$$\left|\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_\eta(u_n-\widetilde{g}-T_k(u-\widetilde{g}))\right| \leq \eta\,C$$

de plus $u_n = u_n - \widetilde{g} + \widetilde{g}$ et $\nabla T_\eta(u_n - \widetilde{g} - T_k(u-\widetilde{g})) = 0$ si $|u_n - \widetilde{g}| \geq k+\eta$ donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega & a(x,u_n,\nabla T_k(u))\nabla T_\eta(u_n - \widetilde{g} - T_k(u-\widetilde{g})) \\ &= \int_\Omega a(x, T_{k+\eta}(u_n-\widetilde{g})+\widetilde{g}, \nabla T_k(u))\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u_n-\widetilde{g}) - T_k(u-\widetilde{g}))\end{aligned}$$

or nous avons montré que $T_h(u_n - \widetilde{g})$ est borné dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ donc $\nabla(T_{k+\eta}(u_n-\widetilde{g}) - T_k(u-\widetilde{g}))$ converge faiblement dans $L^p(\Omega)$ vers $\nabla(T_{k+\eta}(u-\widetilde{g}) - T_k(u-\widetilde{g}))$ et nous pouvons faire le même raisonnement que celui qui a été fait pour les conditions de Neumann, avec $u_n - \widetilde{g}$: $\mathbf{1}_{\{|T_{k+\eta}(u_n-\widetilde{g})-T_k(u-\widetilde{g})|\leq\eta\}}$ tend pp vers $\mathbf{1}_{\{|T_{k+\eta}(u-\widetilde{g})-T_k(u-\widetilde{g})|\leq\eta\}}$ et $a(x,T_{k+\eta}(u_n-\widetilde{g})+\widetilde{g},\nabla T_k(u))$ converge fortement dans $L^{p'}(\Omega)$ vers $a(x,T_{k+\eta}(u-\widetilde{g})+\widetilde{g},\nabla T_k(u))$ pour $n\to+\infty$. Enfin $\nabla T_\eta(T_{k+\eta}(u-\widetilde{g}) - T_k(u-\widetilde{g})) \to 0$ pp pour $\eta\to 0$, on peut donc choisir $\eta < \varepsilon'/2C$ tel que pour n assez grand

$$\left|\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla T_\eta(u_n-\widetilde{g}-T_k(u-\widetilde{g}))\right| \leq \frac{\varepsilon'}{2}$$

et

$$\left|\int_\Omega a(x,u_n,\nabla T_k(u))\nabla T_\eta(u_n-\widetilde{g}-T_k(u-\widetilde{g}))\right| \leq \frac{\varepsilon'}{2}$$

donc de même que pour le problème de Neumann on a $\mathrm{mes}(A_6) \leq \varepsilon$ pour n assez grand, ce qui achève la preuve de la convergence.

Étape 3 : Comme précédemment on peut montrer que $a(x,u_n,\nabla u_n)$ converge vers $a(x,u,\nabla u)$ dans $L^q(\Omega)$ pour $q < N/(N-1)$ et $\nabla\varphi \in L^r(\Omega)$ pour $r > N$, ce qui permet de montrer que

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla\varphi \to \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla\varphi$$

et donc que u est solution de (5.8).

6. Non unicité des solutions vérifiant la formulation au sens des distributions

Ce chapitre est la version française de la seconde partie d'un article publié à Rendiconti di Matematica [43].

Nous montrons, à l'aide du contre-exemple de Serrin, que la formulation au sens des distributions n'assure pas l'unicité des solutions d'un problème elliptique à second membre mesure : construction d'une solution non nulle pour un problème linéaire à données nulles.

6.1 Présentation du problème

Pour Ω ouvert borné de $\mathbf{R}^N$ avec $N \geq 2$, on étudie le problème de Dirichlet elliptique

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A\nabla u) &= f \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{6.1}$$

avec A matrice de coefficients $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, satisfaisant la condition d'ellipticité

$$\forall (\xi_i) \in \mathbf{R}^N \qquad \sum_{i,j} \xi_i \, a_{ij} \, \xi_j \geq \alpha \sum_{i,j} \xi_i \, \xi_j$$

pour $\alpha > 0$ et $f \in M(\overline{\Omega}) = (C(\overline{\Omega}))'$ espace de mesures qui est le dual de l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ muni de sa norme habituelle.

Ce problème admet, pour $f \in H^{-1}(\Omega)$, une unique solution variationnelle, qui appartient à $H_0^1(\Omega)$ et vérifie

$$\forall \, v \in H_0^1(\Omega) \qquad \int_\Omega (A\nabla u)\nabla v \, dx = \langle f, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$$

Pour $f \notin H^{-1}(\Omega)$, mais $f \in M(\overline{\Omega})$ on ne trouve plus de solutions dans $H_0^1(\Omega)$, mais dans $\bigcap_{q < \frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$, ce qui conduit à une formulation plus faible, puisque pour que la première intégrale ait un sens il faut alors que $v \in \bigcup_{p > N} W^{1,p}(\Omega)$:

$$\forall \, v \in \bigcup_{p > N} W_0^{1,p}(\Omega) \qquad \int_\Omega (A\nabla u)\nabla v \, dx = \int_\Omega v \, df. \tag{6.2}$$

Nous avons $W_0^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ pour $p > N$ aussi le membre de droite a un sens.

Cette formulation étant plus faible que la formulation variationnelle elle n'assure plus l'unicité, comme le montre le contre-exemple de Serrin [46] que nous allons présenter.

Pour $N \geq 2$, nous avons étudié, au chapitre 4 deux constructions d'une solution de (6.1) au sens de (6.2), cette solution appartient à $W_0^{1,q}(\Omega)$, $\forall q < \frac{N}{N-1}$. Nous allons montrer que, pour $N > 2$ et $\Omega = B_{\mathbf{R}^N}$ (la boule unité de $\mathbf{R}^N$), il n' y a pas, dans cet espace, unicité des solutions vérifiant (6.2).

L'idée est d'adapter le contre-exemple de Serrin [46] (que nous présentons dans le paragraphe 6.2) pour construire une solution u de l'équation de (6.1) pour $f = 0$ telle que $u \in W^{1,q}(B_{\mathbf{R}^N})$ pour tout $q < \frac{N}{N-1}$ et $u \notin H^1(\Omega)$ mais dont la trace sur S^{N-1} la sphère unité de $\mathbf{R}^N$ est dans $H^{\frac{1}{2}}(S^{N-1})$. Nous construisons cette solution au paragraphe 6.3 et montrons sa régularité au paragraphe 6.4.

Grâce à la régularité de u sur S^{N-1}, nous pouvons considérer le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A\nabla v) &= 0 \quad \text{dans } B_{\mathbf{R}^N} \\ v &= u \quad \text{sur } S^{N-1} \end{aligned} \tag{6.3}$$

qui admet une unique solution (variationnelle) v dans $H^1(B_{\mathbf{R}^N})$. Comme $u \notin H^1(B_{\mathbf{R}^N})$, on a donc construit deux solutions distinctes de (6.3) qui appartiennent à $\bigcap_{q < \frac{N}{N-1}} W^{1,q}(B_{\mathbf{R}^N})$. Soit $w = u - v$, par linéarité, w vérifie

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A\nabla w) &= 0 \quad \text{dans } B_{\mathbf{R}^N} \\ w &= 0 \quad \text{sur } S^{N-1} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $w \in \bigcap_{q < \frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(B_{\mathbf{R}^N})$ et

$$\forall \varphi \in \bigcup_{p > N} W_0^{1,p}(B_{\mathbf{R}^N}) \qquad \int_{B_{\mathbf{R}^N}} (A\nabla w)\nabla\varphi = 0$$

(c'est la formulation (6.2)) et donc, toujours par linéarité, (6.1) admet au moins deux solutions dans $W^{1,q}(B_{\mathbf{R}^N})$ pour tout $q < \frac{N}{N-1}$: celle de [11], notée u_1, et $u_1 + w$.

Afin de rétablir l'unicité (pour $f \in L^1$ dans (6.1)) un critère d'entropie a été introduit dans [4], il demande que la solution « tronquée » appartienne à $H^1(\Omega)$ et qu'elle vérifie une inégalité supplémentaire. Nous montrons au paragraphe 6.5 que u ne vérifie pas la première condition.

6.2 L'équation et la solution de Serrin

Considérons l'équation suivante, avec Ω ouvert borné contenant 0,

$$-\operatorname{div}(A\nabla v) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \tag{6.4}$$

Serrin dans [46] a construit un contre-exemple à l'unicité des solutions de cette équation si l'on n'impose pas qu'elles soient dans $H^1(\Omega)$. Cette solution u a une trace dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ mais n'appartient pas à $H^1(\Omega)$, aussi existe-t-il une autre solution de l'équation : la solution variationnelle valant u sur le bord.

Pour $N \geq 2$ le contre-exemple est le suivant : soit

$$a_{ij} = \delta_{ij} + (a-1)\frac{x_i x_j}{r^2}$$

avec $r = \sqrt{{x_1}^2 + \cdots + {x_N}^2}$ et a une constante que nous allons fixer. Les coefficients a_{ij} sont bornés et satisfont la condition de coercitivité, pour $a>0$. Alors, d'après [46], la fonction $u = x_1\, r^{-N+1-\varepsilon}$ est solution de l'équation précédente au sens des distributions pour $a = 1/\varepsilon^2$, et $u \in W^{1,\beta}(\Omega)$ pour tout $\beta < \frac{N}{N-1+\varepsilon}$ et Ω borné contenant 0, mais $u \notin W^{1,\frac{N}{N-1+\varepsilon}}(\Omega)$.

La solution de (6.4) proposée par Serrin est dans $W^{1,\beta}(\Omega)$ pour tout $\beta < \frac{N}{N-1+\varepsilon}$ et comme $\varepsilon > 0$, elle n'appartient pas à l'espace souhaité $\bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W^{1,q}(\Omega)$. Cette solution est C^∞ sur tout ouvert ne contenant pas 0, sa trace est donc dans $C^\infty(S^{N-1})$ et donc dans $H^{\frac{1}{2}}(S^{N-1})$.

6.3 Modification du problème pour $N>2$

Pour $N=2$, la solution de (6.4) appartient à $W^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q<\frac{2}{1+\varepsilon}$ et si $N>2$ on a $\frac{N}{N-1}<2$, et donc pour ε assez petit $\frac{N}{N-1} < \frac{2}{1+\varepsilon}$, l'idée est donc de construire une équation dans $\mathbf{R}^N$ dont soit solution la fonction u correspondant à $N=2$.

Conservons les a_{ij} introduits précédemment avec $N = 2$ (donc avec $r = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}$) pour $i,j = 1,2$ et posons $a_{ij} = \delta_{ij}$ sinon. Cette matrice correspond à une forme bilinéaire continue qui est, bien sûr, encore coercitive et bornée. Soit $u = x_1 r^{-1-\varepsilon}$ la solution pour $N=2$ qui est donc constante par rapport à $x_3, \ldots, x_N$.

Remarque : Cette adaptation n'est donc possible que pour $N>2$. Ceci est normal puisque l'on sait, grâce au lemme de Meyers [37], que pour $N = 2$ le problème de Dirichlet homogène admet une unique solution dans $\bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$ (voir [29]).

Propriété : *La fonction u est solution de* (6.4) *au sens des distributions, c'est-à-dire que*

$$\int_\Omega a_{ij}\,\partial_{x_j}u\,\partial_{x_i}\varphi\,dx = 0,$$

pour φ fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω.

Démonstration : Rappelons que $r = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}$, et posons $z = (0,0,x_3,\ldots,x_N)$. Comme $a_{ij}\,\partial_{x_j}u\,\partial_{x_i}\varphi$ appartient à $L^1(\Omega)$, nous avons

$$\int_\Omega a_{ij}\,\partial_{x_j}u\,\partial_{x_i}\varphi\,dx = \lim_{\eta\to 0}\int_{r>\eta} a_{ij}\,\partial_{x_j}u\,\partial_{x_i}\varphi\,dx = \lim_{\eta\to 0}\oint_{r=\eta} \varphi\; a_{ij}\,\partial_{x_j}u\frac{x_i}{r}\,d\sigma,$$

car $\partial_{x_i}(a_{ij}\,\partial_{x_j}u) = 0$ dans $r > \eta$ puisque u est solution classique de (6.4) dans $\{x \in \mathbf{R}^N \mid r > \eta\}$, pour tout $\eta > 0$. De plus, les calculs conduisent à

$$\oint_{r=\eta} \varphi\, a_{ij}\,\partial_{x_j}u \frac{x_i}{r}\, d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} \oint_{r=\eta} \varphi\, \frac{x_1}{r}\, r^{-1-\varepsilon}\, d\sigma$$

et comme φ est $\mathcal{C}^1$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_N) = \varphi(0, x_2, \ldots, x_N) + f(x_1, \ldots, x_N)$$

avec

$$\sup_{r=\eta} |f(x_1, \ldots, x_N)| = O(\eta)$$

donc

$$\oint_{r=\eta} \varphi\, \frac{x_1}{r}\, r^{-1-\varepsilon}\, d\sigma = \oint_{r=\eta} \varphi(0, \ldots, x_N) \frac{x_1}{r}\, r^{-1-\varepsilon}\, d\sigma + \oint_{r=\eta} f(x_1, \ldots, x_N) \frac{x_1}{r}\, r^{-1-\varepsilon}\, d\sigma.$$

Le premier terme est nul car c'est l'intégrale d'une fonction impaire en x_1 sur un domaine symétrique en x_1. Pour le second passons en coordonnées « cylindriques » avec $d\sigma = r d\theta\, dz$,

$$\begin{aligned}
\left| \oint_{r=\eta} f(x) \frac{x_1}{r^{2+\varepsilon}}\, d\sigma \right| &= \left| \oint_{r=\eta} f(x) \frac{x_1}{r^{2+\varepsilon}} r\, g(\theta, z)\, d\theta\, dz \right| \\
&\leq \frac{1}{\eta^{\varepsilon}}\, O(\eta) \oint_{r=\eta} |g(\theta, z)|\, d\theta\, dz \\
&= O(\eta^{1-\varepsilon}).
\end{aligned}$$

si bien que

$$\int_{r > \eta} a_{ij}\,\partial_{x_j}u\,\partial_{x_i}\varphi\, dx = O(\eta^{1-\varepsilon}) \qquad \text{d'où} \qquad \int_{\Omega} a_{ij}\,\partial_{x_j}u\,\partial_{x_i}\varphi\, dx = 0,$$

ce qui achève la démonstration.

6.4 Régularité de u

La fonction u peut être considérée à la fois comme une fonction de $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ et comme une fonction de $\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ constante par rapport à ses $N-2$ dernières variables. Or $u = O(r^{-\varepsilon})$ et $u_x = O(r^{-1-\varepsilon})$ au voisinage de $r = 0$ donc pour tout $\Omega_2 \subset \mathbf{R}^2$ ouvert borné, tout $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert borné et tout $\beta < \frac{2}{1+\varepsilon}$, on vérifie aisément que $u \in L^{\beta}(\Omega_2)$ et $u_x \in L^{\beta}(\Omega_2)$ et donc que $u \in L^{\beta}(\Omega)$ et $u_x \in L^{\beta}(\Omega)$ pour tout $\beta < \frac{2}{1+\varepsilon}$. Ainsi, à condition de choisir $\varepsilon < \frac{N-2}{N}$, nous avons (puisque $N > 2$)

$$u \in W^{1,q}(\Omega) \qquad \forall\, q < \frac{N}{N-1}.$$

De plus $u \in C^\infty$ sur tout ouvert d'intersection vide avec $\{x_1 = x_2 = 0\}$.

Afin de pouvoir construire une solution v dans $H^1(\Omega)$ vérifiant $v = u$ sur $\partial\Omega$, il faut montrer que $u \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Pour que Ω soit de bord régulier nous choisissons $\Omega = B_{\mathbf{R}^N}$, la boule unité de $\mathbf{R}^N$ si bien que $\partial\Omega = S^{N-1}$ la sphère unité de $\mathbf{R}^N$.

L'ouvert $\Omega = B_{\mathbf{R}^N}$ ainsi choisi a la régularité C^m pour tout $m \in \mathbf{N}$ et une frontière bornée, aussi pouvons-nous définir $H^{\frac{1}{2}}(S^{N-1})$.

Propriété : *La fonction u appartient à $H^{\frac{1}{2}}(S^{N-1})$ pour $\varepsilon < \frac{1}{N-1}$.*

Rappelons quelques définitions concernant les espaces de Sobolev (Adams [1]). Dire que Ω est de régularité C^m et à frontière bornée signifie qu'il existe un recouvrement fini (U_j) de $\partial\Omega$ et une famille correspondante (Φ_j) de C^m difféomorphismes de U_j dans $B_{\mathbf{R}^N}$ telle que :

(i) $\exists \delta > 0$, $\bigcup_j \Psi_j(\{\, y \in B_{\mathbf{R}^N} \mid |y| < 1/2 \,\}) \supset \Omega_\delta$, où $\Omega_\delta = \{\, x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > \delta \,\}$ et $\Psi_j = {\Phi_j}^{-1}$

(ii) $\forall j$, $\Phi_j(U_j \cap \Omega) = \{\, y \in B_{\mathbf{R}^N} | y_N > 0\}$.

(iii) Si $(\varphi_{j,1}, \dots, \varphi_{j,N})$ et $(\psi_{j,1}, \dots, \psi_{j,N})$ sont les composantes de Φ_j et Ψ_j alors $\exists M$ fini tel que $\forall \alpha$, $|\alpha| \le m$, $\forall i$, $1 \le i \le N$, $\forall j$, on ait

$$\begin{aligned} |D^\alpha \varphi_{j,i}(x)| &\le M, \quad x \in U_j \\ |D^\alpha \psi_{j,i}(y)| &\le M, \quad y \in B_{\mathbf{R}^N} \end{aligned}$$

La définition de $W^{s,p}(\partial\Omega)$ (avec $s \le m$, $m \in \mathbf{N}$) est alors la suivante : soient (U_j) et (Ψ_j) définis comme ci-dessus, si (ω_j) est une partition C^m de l'unité de $\partial\Omega$ subordonnée aux (U_j), définissons $\theta_j u$ sur $\mathbf{R}^{N-1}$ par

$$\theta_j u(y') = \begin{cases} (\omega_j\, u)(\Psi_j(y', 0)) & \text{si } |y'| < 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $y' = (y_1, \dots, y_{N-1})$, alors $u \in W^{s,p}(\partial\Omega)$ si $\theta_j u \in W^{s,p}(\mathbf{R}^{N-1})$. Cette définition est indépendante du choix des (U_j), (Ψ_j) et (ω_j).

Démonstration : Soit (U_j) un recouvrement de S^{N-1} justifiant la régularité $\mathcal{C}^m$ de S^{N-1}, soit U_j un de ces ouverts (j restera ainsi fixé par la suite) et soit $z = (z_1, \dots, z_N)$ tel que $z \in U_j \cap \partial\Omega$ alors ${z_1}^2 + \dots + {z_N}^2 = 1$ donc il existe k tel que $|z_k| = \max_i |z_i|$, on vérifie alors que $|z_k| \ge 1/\sqrt{N}$ aussi, condition de choisir les U_j assez petits, nous pouvons supposer que $z_k \ne 0$ dans tout $U_j \cap \partial\Omega$, donc, par continuité, z_k est de signe constant dans $U_j \cap \partial\Omega$.

Supposons, pour simplifier l'écriture, que $k = N$ et $z_N > 0$ dans $U_j \cap \partial\Omega$ alors $z_N = \sqrt{1 - z_1^2 - \dots - z_{N-1}^2}$ donc Ψ tel que $\Psi(y') = (\psi_{j,1}, \dots, \psi_{j,N-1})(y', 0)$ définit une bijection de $B_{\mathbf{R}^{N-1}}$ dans $\Psi(B_{\mathbf{R}^{N-1}}) \subset \mathbf{R}^{N-1}$ qui est aussi un C^m difféomorphisme, d'inverse noté Φ.

D'après la définition ci-dessus il faut montrer que $\theta_j u \in W^{s,p}(\mathbf{R}^{N-1})$. Comme $\mathrm{supp}(\theta_j u) \subset B_{\mathbf{R}^{N-1}}$, $\theta_j u \in W^{s,p}(\mathbf{R}^{N-1})$ est équivalent à $\theta_j u \in W^{s,p}(B_{\mathbf{R}^{N-1}})$. Il faut donc étudier la régularité de u sur $\Psi_j(B_{\mathbf{R}^{N-1}} \times \{0\})$ que nous noterons O_j.

Sur O_j tel que $O_j \cap \{x_1 = x_2 = 0\} = \emptyset$, u est C^∞ donc $\theta_j u \in C^\infty(B_{\mathbf{R}^{N-1}})$. Il reste donc à déterminer la régularité de $\theta_j u$ sur les O_j tels que $O_j \cap \{x_1 = x_2 = 0\} \neq \emptyset$. Pour un tel j, $U_j \cap \partial\Omega$ contient un point $z = (0, 0, z_3, \ldots, z_N)$, introduisons alors les C^m difféomorphismes Φ et Ψ définis précédemment (comme $z_1 = z_2 = 0$ le z_k maximum est atteint pour $k > 2$ et on peut donc bien supposer que $k = N$). Or par définition $v \in L^\beta(O_j)$ signifie que

$$I(v) = \int_{B_{\mathbf{R}^{N-1}}} |v(\psi_1, \ldots, \psi_N)(y_1, \ldots, y_{N-1}, 0)|^\beta dy_1 \ldots dy_{N-1} < +\infty,$$

donc pour v ne dépendant pas de x_N on a

$$I(v) = \int_{B_{\mathbf{R}^{N-1}}} |v(\psi_1, \ldots, \psi_{N-1})(y_1, \ldots, y_{N-1}, 0)|^\beta dy_1 \ldots dy_{N-1},$$

effectuons le changement de variable $x' = \Psi(y')$

$$I(v) = \int_{\Psi(B_{\mathbf{R}^{N-1}})} |v(x_1, \ldots, x_{N-1})|^\beta |J(\Phi)|\, dx_1 \ldots dx_{N-1}$$

comme Φ est un C^1 difféomorphisme on a $|J(\Phi)| \le M$, et $\Psi(B_{\mathbf{R}^{N-1}})$ est borné donc il existe γ tel que $\Psi(B_{\mathbf{R}^{N-1}}) \subset (0, 0, z_3, \ldots, z_{N-1}) + [-\gamma, \gamma]^{N-1}$ que nous appellerons W_j et donc

$$I(v) \le M \int_{W_j} |v(x_1, \ldots, x_{N-1})|^\beta dx_1 \ldots dx_{N-1}$$

et si v ne dépend que de x_1 et x_2 on a

$$I(v) \le M\,(2\gamma)^{N-3} \int_{[-\gamma,\gamma]^2} |v(x_1, x_2)|^\beta dx_1\, dx_2$$

or nous avons vu que u et $u_x \in L^\beta(\Omega_2)$ pour $\beta < \frac{2}{1+\varepsilon}$ donc $I(u) < +\infty$ et $I(u_x) < +\infty$, c'est-à-dire que $u(\Psi_j(y', 0))$ et $u_x(\Psi_j(y', 0)) \in L^\beta(B_{\mathbf{R}^{N-1}})$ or ω_j est C^1 donc $\theta_j u \in W^{1,\beta}(B_{\mathbf{R}^{N-1}})$ pour $\beta < \frac{2}{1+\varepsilon}$.

Afin de montrer que $u \in H^{\frac{1}{2}}(S^{N-1})$, il reste à montrer que $\theta_j u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{N-1})$ pour cela, utilisons un théorème d'injection de Sobolev (voir [1]) :

$$W^{1,q}(\mathbf{R}^{N-1}) \subset W^{\frac{1}{2},p}(\mathbf{R}^{N-1}) \quad \text{pour} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{q} - \frac{1}{2(N-1)}$$

comme $\theta_j u \in W^{1,\beta}(\mathbf{R}^{N-1})$ pour tout $\beta < \frac{2}{1+\varepsilon}$ on déduit que $\theta_j u \in W^{\frac{1}{2},p}(\mathbf{R}^{N-1})$ pour tout $p < 2/(\frac{N-2}{N-1} + \varepsilon)$. Donc $\theta_j u \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{R}^{N-1})$ si $2/(\frac{N-2}{N-1} + \varepsilon) > 2$ ce qui est le cas pour $\varepsilon < \frac{1}{N-1}$. Ainsi $u \in H^{\frac{1}{2}}(S^{N-1})$ pour $\varepsilon < \frac{1}{N-1}$ (la démonstration montre un peu plus c'est-à-dire que $u \in W^{1,\beta}(S^{N-1})$ pour tout $\beta < \frac{2}{1+\varepsilon}$).

6.5 Étude des tronqués de u

Soit $k > 0$ et $T_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction « tronquante » valant

$$\begin{cases} -k & \text{pour} \quad x \leq -k \\ x & \text{pour} \quad |x| \leq k \\ k & \text{pour} \quad x \geq k. \end{cases}$$

Afin d'obtenir l'unicité des solutions de (6.1) dans le cas $f \in L^1$, il est demandé dans [4], pour des conditions homogènes de Dirichlet, que la solution u vérifie $T_k(u) \in H^1_0(\Omega)$ pour tout $k > 0$ et que u vérifie une inégalité supplémentaire. Lorsque la condition aux limites n'est plus homogènes, on montre dans [41] et au chapitre 5 que $T_k(u - \varphi) \in H^1_0(\Omega)$ pour $k > 0$ et φ un relèvement $H^1(\Omega)$ de la condition aux limites.

Nous allons donc montrer que le contre-exemple de Serrin, noté u au paragraphe 6.3, u vérifie $T_k(u) \notin H^1(B_{\mathbf{R}^N})$ pour tout $k \geq 0$ et qu'il existe $\varphi \in H^1(\Omega)$ valant u sur le bord et tel que $T_k(u - \varphi) \notin H^1_0(\Omega)$. Pour cela montrons que l'intégrale

$$\int_{B_{\mathbf{R}^N}} \|\nabla T_k(u)\|^2 = \int_{B_{\mathbf{R}^N}} \|\nabla(u)\|^2 \mathbf{1}_{\{|u| \leq k\}}$$

est divergente. Comme u ne dépend que de x_1 et x_2, on a

$$\begin{aligned} \int_{B_{\mathbf{R}^N}} \|\nabla u\|^2 \mathbf{1}_{\{|u| \leq k\}} &\geq \int_{{x_3}^2 + \cdots + {x_N}^2 \leq \frac{1}{2}} \int_{{x_1}^2 + {x_2}^2 \leq \frac{1}{2}} \|\nabla u\|^2 \mathbf{1}_{\{|u| \leq k\}} \\ &= C_N \int_{{x_1}^2 + {x_2}^2 \leq \frac{1}{2}} \|\nabla u\|^2 \mathbf{1}_{\{|u| \leq k\}} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Passons en polaire, nous obtenons $u = \cos\theta/\rho^\varepsilon$ donc nous avons $|u| \leq k$ pour $\rho^\varepsilon \geq |\cos\theta|/k$ soit $\rho \geq (|\cos\theta|/k)^{1/\varepsilon}$ que nous noterons $\rho(\theta)$, d'où

$$\int_{{x_1}^2 + {x_2}^2 \leq \frac{1}{2}} \|\nabla u\|^2 \mathbf{1}_{\{|u| \leq k\}} dx_1 dx_2 = \int_0^{2\pi} \int_{\rho(\theta)}^{1/\sqrt{2}} \|\nabla u\|^2 \rho \, d\rho \, d\theta$$

or

$$\|\nabla u\|^2 = \frac{1}{({x_1}^2 + {x_2}^2)^{3+\varepsilon}} (A{x_1}^4 + B{x_1}^2{x_2}^2 + C{x_2}^4)$$

où A, B et C dépendent de ε. Considérons chacun des trois termes

$$\int_{\substack{{x_1}^2 + {x_2}^2 \leq \frac{1}{2} \\ |u| \leq k}} \frac{{x_1}^4}{({x_1}^2 + {x_2}^2)^{3+\varepsilon}} dx_1 dx_2 = \int_0^{2\pi} \int_{\rho(\theta)}^{1/\sqrt{2}} \frac{\cos^4\theta}{\rho^{1+2\varepsilon}} d\rho \, d\theta = K + \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta < +\infty$$

et de même

$$\int_{\substack{{x_1}^2 + {x_2}^2 \leq \frac{1}{2} \\ |u| \leq k}} \frac{{x_1}^2{x_2}^2}{({x_1}^2 + {x_2}^2)^{3+\varepsilon}} dx_1 dx_2 = K' + \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta < +\infty$$

et
$$\int_{\substack{{x_1}^2+{x_2}^2\leq\frac{1}{2}\\|u|\leq k}} \frac{{x_2}^4}{({x_1}^2+{x_2}^2)^{3+\varepsilon}}dx_1dx_2 = K'' + \int_0^{2\pi}\frac{\sin^4\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$
or $\cos\theta \sim \dfrac{\pi}{2}-\theta$ en $\dfrac{\pi}{2}$ donc la dernière intégrale est divergente, aussi
$$\int_{{x_1}^2+{x_2}^2\leq\frac{1}{2}} \|\nabla u\|^2\mathbf{1}_{\{|u|\leq k\}}dx_1dx_2 = +\infty$$
et grâce aux minorations
$$\int_{B_{\mathbf{R}^N}} \|\nabla T_k(u)\|^2 = +\infty,$$
ainsi $T_k(u) \notin H^1(\Omega)$.

Soit maintenant $\varphi \in H^1(B_{\mathbf{R}^N})$ un relèvement de u sur le bord (car $u \in H^{1/2}(S^{N-1})$), en multipliant φ par une fonction régulière et nulle dans la boule de rayon $1/2$, on obtient un relèvement (encore noté φ) nul dans cette même boule, le calculs ci-dessus donnent donc, de même $T_k(u-\varphi) = T_k(u) \notin H^1_0(B_{1/2})$ et donc $T_k(u-\varphi) \notin B_{\mathbf{R}^N}$.

Part III

Seconds membres L^1 : unicité et continuité

7. Dépendance continue par rapport à un paramètre des solutions de problème elliptique à seconds membres L^1

Ce chapitre est un article en préparation.

On étudie ici la continuité par rapport à α de la solution u_α du problème elliptique

$$
\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,\alpha,\nabla u_\alpha)) = f & \text{dans } \Omega \\ u_\alpha = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{7.1}
$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$, et a définit un opérateur elliptique strictement monotone de Leray-Lions [33] agissant de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ et continu par rapport à α.

Avant de pouvoir considérer la continuité de u_α par rapport à α, il nous faut l'unicité de u_α, aussi allons nous, nous placer dans les deux cadres suivants.

Pour $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, il y a existence et unicité de la solution (voir Leray-Lions [33]) vérifiant

$$
\begin{cases} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,\alpha,\nabla u_\alpha)\nabla\varphi = \langle f,\varphi\rangle \qquad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases} \tag{7.2}
$$

où $\langle .,. \rangle$ est le crochet de dualité entre $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Lorsque $f \in M(\overline{\Omega}) = (C(\overline{\Omega}))'$, espace de mesures, l'existence d'une solution vérifiant

$$
\begin{cases} u \in \displaystyle\bigcap_{q<\frac{(p-1)N}{(N-1)}} W_0^{1,q}(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,\alpha,\nabla u_\alpha)\nabla\varphi = \int_\Omega \varphi\, df \qquad \forall\varphi \in \bigcup_{r>N} W_0^{1,r}(\Omega) \end{cases} \tag{7.3}
$$

a été montrée par Boccardo et Gallouët [11, 12]. Cependant il n'y a pas unicité des solutions au sens ci-dessus comme le montre le contre-exemple adapté de celui de Serrin (voir [46, 43] et chapitre 6). Aussi lorsque f appartient seulement à $L^1(\Omega)$ faut-il considérer les solutions au sens suivant (T_k fonction « tronquante » est définie par la suite)

$$(7.4)\begin{cases} u \in \displaystyle\bigcap_{q<\frac{(p-1)N}{(N-1)}} W_0^{1,q}(\Omega) \qquad T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad \forall k>0 \\ \displaystyle\int_\Omega a(x,\alpha,\nabla u_\alpha)\nabla T_k(u_\alpha-\varphi) \le \int_\Omega f\, T_k(u_\alpha-\varphi) \quad \forall \varphi \in L^\infty(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

dont l'unicité a été montrée par Bénilan, Boccardo, Gallouët, Gariepy, Pierre et Vazquez [4].

Donnons les hypothèses sur a, opérateur de Leray-Lions, nous les appellerons (H) par la suite : a est une fonction de Carathéodory, c'est-à-dire que

- $a(x,\alpha,\xi) : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ est mesurable en $x \in \mathbf{R}^N$ pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ et $\xi \in \mathbf{R}^N$ et continue en $\xi \in \mathbf{R}^N$ et $s \in \mathbf{R}$ pour presque tout $x \in \mathbf{R}^N$. Nous noterons $a(x,\alpha,\nabla u_\alpha) = a(x,\alpha,\nabla u_\alpha(x))$.

et a vérifie aussi des conditions de coercitivité, monotonie et croissance : il existe p vérifiant $2-1/N<p\le N$

- Il existe $\gamma>0$ tel que pour tout α et ξ et presque tout x on ait

$$a(x,\alpha,\xi)\xi \ge \gamma|\xi|^p$$

- Pour tout α, ζ et η et presque tout x on a

$$[a(x,\alpha,\xi)-a(x,\alpha,\zeta)](\xi-\zeta)>0 \quad \text{pour} \quad \xi\ne\zeta$$

- Il existe $b(x) \in L^{p'}(\Omega)$ $(p'=p/(p-1))$ et $\beta>0$ tels que pour tout α et ξ et presque tout x on ait

$$|a(x,\alpha,\xi)| \le \beta(b(x)+|\xi|^{p-1})$$

Ces hypothèses sont classiques (sauf $p>2-1/N$) pour l'étude des opérateurs non linéaires sous forme divergentielle (voir Leray-Lions [33]).

Nous ajoutons une forme un peu plus forte de continuité par rapport à α :

$$(7.5) \qquad |a(x,\alpha_1,\xi)-a(x,\alpha_2,\xi)| \le c(\alpha_1-\alpha_2)(b(x)+|\xi|^{p-1})$$

pour tout α_1, α_2, ξ et presque tout x, avec c fonction positive continue de $\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ telle que $c(x)\to 0$ lorsque $x\to 0$ et $b\in L^{p'}(\Omega)$ donnée ci-dessus.

Pour $k>0$, nous utiliserons la fonction « tronquante » $T_k : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ telle que $T_k(x)=\min(k,\max(x,-k))$. Cette fonction étant lipschitzienne, si $u\in W^{1,p}(\Omega)$ on a $T_k(u)\in W^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, cette dernière fonction pourra donc servir de fonction test dans (7.4).

7.1 Cadre variationnel : $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$

Théorème 1 (classique) : *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$, $a(x,\alpha,\xi)$ vérifiant H et (7.5), $f\in W^{-1,p'}(\Omega)$, u_α et u_{α_0} les solutions de (7.1) correspondant à α et α_0. Lorsque $\alpha\to\alpha_0$, on a $u_\alpha\to u_{\alpha_0}$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Nous allons en donner la démonstration par soucis de complétude, mais surtout afin d'éclairer la démonstration suivante.

Démonstration : Choisissons d'abord $\varphi = u_\alpha$ alors

$$\int_\Omega a(x, \alpha, \nabla u_\alpha)\nabla u_\alpha = \langle f, u_\alpha\rangle$$

soit, par coercitivité,

$$\gamma(\|u_\alpha\|_{W_0^{1,p}})^p = \gamma \int_\Omega |\nabla u_\alpha|^p \leq \int_\Omega a(x, \alpha, \nabla u_\alpha)\nabla u_\alpha$$

et

$$\langle f, u_\alpha\rangle \leq \|f\|_{W^{-1,p'}}\|u_\alpha\|_{W_0^{1,p}}$$

donc

$$(\|u_\alpha\|_{W_0^{1,p}})^{p-1} \leq \frac{1}{\gamma}\|f\|_{W^{-1,p'}}$$

c'est-à-dire que (u_α) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ indépendamment de α.

Choisissons $\varphi = u_\alpha - u_{\alpha_0}$ dans (7.2) écrit pour α et α_0, alors après soustraction

$$\begin{aligned}&\int_\Omega [a(x, \alpha_0, \nabla u_\alpha) - a(x, \alpha_0, \nabla u_{\alpha_0})]\nabla(u_\alpha - u_{\alpha_0}) \\ &\qquad = \int_\Omega [a(x, \alpha_0, \nabla u_\alpha) - a(x, \alpha, \nabla u_\alpha)]\nabla(u_\alpha - u_{\alpha_0})\end{aligned}$$

en utilisant la continuité de a et la positivité du premier membre, nous obtenons

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_\Omega [a(x, \alpha_0, \nabla u_\alpha) - a(x, \alpha_0, \nabla u_\alpha)]\nabla(u_\alpha - u_{\alpha_0}) \\ &\qquad \leq c(\alpha - \alpha_0)\int_\Omega (b(x) + |\nabla u_\alpha|^{p-1})|\nabla(u_\alpha - u_{\alpha_0})|\end{aligned}$$

et l'inégalité de Hölder conduit à

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (b(x) + |\nabla u_\alpha|^{p-1})|\nabla(u_\alpha - u_{\alpha_0})| \\ &\qquad \leq \left(\int_\Omega (b(x) + |\nabla u_\alpha|^{p-1})^{p'}\right)^{1/p'} \left(\int_\Omega |\nabla(u_\alpha - u_{\alpha_0})|^p\right)^{1/p}\end{aligned}$$

or on a vu que $(\|u_\alpha\|_{W_0^{1,p}})^{p-1} \leq \|f\|_{W^{-1,p'}}/\gamma$ donc

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_\Omega [a(x, \alpha_0, \nabla u_\alpha) - a(x, \alpha, \nabla u_\alpha)]\nabla(u_\alpha - u_{\alpha_0}) \\ &\qquad \leq c(\alpha - \alpha_0)[\|b\|_{L^{p'}} + (\|f\|_{W^{-1,p'}}/\gamma)^{1/(p-1)}]2(\|f\|_{W^{-1,p'}}/\gamma)^{1/(p-1)}.\end{aligned}$$

Lorsque $\alpha \to \alpha_0$ le second membre tend vers 0, donc

$$g_\alpha = [a(x, \alpha_0, \nabla u_\alpha) - a(x, \alpha_0, \nabla u_\alpha)]\nabla(u_\alpha - u_{\alpha_0})$$

vérifie

$$\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int_\Omega g_\alpha = 0$$

et est positif donc (g_α) converge vers 0 dans $L^1(\Omega)$. Une sous-suite encore notée (g_α) converge donc presque partout vers 0, donc pour presque tout x fixé, par stricte monotonie, $\nabla u_\alpha(x) \to \nabla u_{\alpha_0}(x)$ (par l'absurde grâce à la continuité de a par rapport à ξ et α). Ainsi (∇u_α) converge presque partout vers ∇u_{α_0}.

De plus (u_a) est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ donc (par unicité de la limite) converge faiblement vers u_{α_0} dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ lorsque $\alpha \to \alpha_0$ donc $\langle f, u_\alpha\rangle \to \langle f, u_{\alpha_0}\rangle$ et donc

$$\int_\Omega a(x,\alpha,\nabla u_\alpha)\nabla u_\alpha \to \int_\Omega a(x,\alpha_0,\nabla u_{\alpha_0})\nabla u_{\alpha_0}.$$

Comme $a(x,\alpha,\nabla u_\alpha)\nabla u_\alpha \geq 0$, ceci implique la convergence de $a(x,\alpha,\nabla u_\alpha)\nabla u_\alpha$ dans $L^1(\Omega)$ or

$$\gamma|\nabla u_\alpha|^p \leq a(x,\alpha,\nabla u_\alpha)\nabla u_\alpha$$

donc la suite $(\gamma|\nabla u_\alpha|^p)$ est dominée par une suite qui converge dans L^1 et est donc équi-intégrable et $(|\nabla u_\alpha - \nabla u_{\alpha_0}|^p)$ aussi, comme cette dernière suite converge de plus presque partout, le théorème de Vitali entraîne que $\nabla u_\alpha \to \nabla u_{\alpha_0}$ dans $L^p(\Omega)$ (fort). Ainsi (u_a) converge fortement vers u_{α_0} dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Par unicité de la limite u_{α_0}, on a en fait la convergence de toute la suite (u_α) de départ (par l'absurde).

Remarque 1 : Dans le cas fortement monotone et $p = 2$ et a lipschitzien en α, $\alpha \mapsto u_\alpha$ est lipschitzienne de $\mathbf{R}$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Remarque 2 : Nous venons de montrer que (u_α) converge fortement vers u_{α_0} dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, et en particulier converge faiblement donc l'opérateur $\mathrm{div}(a(x,\alpha,\xi)\xi)$ H-converge vers $\mathrm{div}(a(x,\alpha,\xi)\xi)$.

7.2 Cadre non variationnel : $f \in L^1(\Omega)$

Considérons maintenant le cas $f \in L^1(\Omega)$ (cadre non variationnel), à α fixé, l'existence et l'unicité de u_α a été montrée dans [4], à condition d'écrire

$$\int_\Omega a(x,\alpha,\nabla u_\alpha)\nabla T_k(u_\alpha - \varphi) \leq \int_\Omega f\, T_k(u_\alpha - \varphi)$$

pour tout $\varphi \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. L'unicité est ici essentielle : s'il n'y avait pas unicité, la continuité n'aurait aucun sens. Aussi ne peut-on pas considérer le cas f mesure, pour lequel la formulation au sens des distributions n'assure pas l'unicité (voir ci-dessus).

Théorème 2 : *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$, $a(x,\alpha,\xi)$ vérifiant (H) et (7.5), $f \in L^1(\Omega)$, u_α et u_{α_0} les solutions de (7.1) correspondant à α et α_0. Lorsque $\alpha \to \alpha_0$, on a $u_\alpha \to u_{\alpha_0}$ dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q < (p-1)N/(N-1)$.*

Démonstration : Ici aussi on peut montrer que (u_α) est borné dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ pour $q < N/(N-1)$ indépendamment de α, voir [11, 12].

De façon analogue à ce que nous venons de faire, choisissons $\varphi = T_h(u_{\alpha_0})$ dans l'équation en u_α et $\varphi = T_h(u_\alpha)$ dans celle en u_{α_0} (ceci reprend partiellement [4]), et faisons la somme

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega [a(x,\alpha,\nabla u_\alpha) - a(x,\alpha,\nabla u_{\alpha_0})]\nabla T_k(u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0})) \\
&\qquad \leq -\int_\Omega a(x,\alpha,\nabla u_{\alpha_0})\nabla T_k(u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0})) - \int_\Omega a(x,\alpha_0,\nabla u_{\alpha_0})\nabla T_k(u_{\alpha_0} - T_h(u_\alpha)) \\
&\qquad + \int_\Omega f[T_k(u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0})) + T_k(u_{\alpha_0} - T_h(u_\alpha))]
\end{aligned}$$

Notons A, B et C les trois parties, donc $A \leq B + C$.

$$\begin{aligned}
C = &\int_{\substack{|u_\alpha|\leq h \\ |u_{\alpha_0}|\leq h}} f[T_k(u_\alpha - u_{\alpha_0}) + T_k(u_{\alpha_0} - u_\alpha)] \\
&\qquad + \int_{|u_\alpha|\geq h \text{ ou } |u_{\alpha_0}|\geq h} f[T_k(u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0})) + T_k(u_{\alpha_0} - T_h(u_\alpha))]
\end{aligned}$$

le premier terme est nul, donc

$$C \leq \int_{|u_\alpha|\geq h \text{ ou } |u_{\alpha_0}|\geq h} |f|.$$

D'autre part, soit

$$A_1 = \int_{|u_{\alpha_0}|\geq h} a(x,\alpha,\nabla u_\alpha)\nabla T_k(u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0}))$$

et

$$A_2 = \int_{|u_{\alpha_0}|\geq h} a(x,\alpha,\nabla u_{\alpha_0})\nabla T_k(u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0}))$$

alors

$$\int_{|u_{\alpha_0}|\leq h} [a(x,\alpha,\nabla u_\alpha) - a(x,\alpha,\nabla u_{\alpha_0})]\nabla T_k(u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0})) \leq A - A_1 + A_2.$$

Enfin, soit

$$\begin{aligned}
B_1 &= \int_{|u_{\alpha_0}|\geq h} a(x,\alpha,\nabla u_{\alpha_0})\nabla T_k(u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0})), \\
B_2 &= \int_{\substack{|u_\alpha|\geq h \\ |u_{\alpha_0}|\leq h}} a(x,\alpha,\nabla u_{\alpha_0})\nabla T_k(u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0})), \\
B_3 &= \int_{|u_\alpha|\geq h} a(x,\alpha_0,\nabla u_{\alpha_0})\nabla T_k(u_{\alpha_0} - T_h(u_\alpha)), \\
B_4 &= \int_{\substack{|u_{\alpha_0}|\geq h \\ |u_\alpha|\leq h}} a(x,\alpha_0,\nabla u_{\alpha_0})\nabla T_k(u_{\alpha_0} - T_h(u_\alpha)).
\end{aligned}$$

On notera que $A_2 = B_1$, que $A_1 \geq 0$, et $B_3 \geq 0$ en effet

$$A_1 = \int_{\substack{|u_{\alpha_0}| \geq h \\ |u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0})| \leq k}} a(x, \alpha, \nabla u_\alpha) \nabla u_\alpha \geq 0$$

et même chose pour B_3.

$$B \leq \int_{\substack{|u_\alpha| \leq h \\ |u_{\alpha_0}| \leq h}} [a(x, \alpha, \nabla u_{\alpha_0}) - a(x, \alpha_0, \nabla u_{\alpha_0})] \nabla T_k(u_{\alpha_0} - u_\alpha) - B_2 - B_4$$

Ce qui nous donne,

$$\int_{|u_{\alpha_0}| \leq h} [a(x, \alpha, \nabla u_\alpha) - a(x, \alpha, \nabla u_{\alpha_0})] \nabla T_k(u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0})) \leq C - B_2 - B_4$$
$$+ \int_{\substack{|u_\alpha| \leq h \\ |u_{\alpha_0}| \leq h}} [a(x, \alpha, \nabla u_{\alpha_0}) - a(x, \alpha_0, \nabla u_{\alpha_0})] \nabla T_k(u_{\alpha_0} - u_\alpha)$$

Donc

$$\int_{|u_{\alpha_0}| \leq h} [a(x, \alpha, \nabla u_\alpha) - a(x, \alpha, \nabla u_{\alpha_0})] \nabla T_k(u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0})) \leq C - B_2 - B_4$$
$$+ \int_{\substack{|u_\alpha| \leq h \\ |u_{\alpha_0}| \leq h}} [a(x, \alpha, \nabla u_{\alpha_0}) - a(x, \alpha_0, \nabla u_{\alpha_0})] \nabla T_k(u_{\alpha_0} - u_\alpha)$$

or $|[a(x, \alpha, \nabla u_{\alpha_0}) - a(x, \alpha_0, \nabla u_{\alpha_0})] \nabla(u_{\alpha_0} - u_\alpha)| \leq c(\alpha - \alpha_0)(b(x) + |\nabla u_{\alpha_0}|^{p-1}) |\nabla(u_{\alpha_0} - u_\alpha)|$

$$\int_{|u_{\alpha_0}| \leq h} [a(x, \alpha, \nabla u_\alpha) - a(x, \alpha, \nabla u_{\alpha_0})] \nabla T_k(u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0})) \leq C - B_2 - B_4$$
$$+ c(\alpha - \alpha_0) \left(\int_{|u_\alpha| \leq h} |b(x)|^{p'} + |\nabla u_\alpha|^p \right)^{1/p'} \left(\int_{\substack{|u_{\alpha_0}| \leq h \\ |u_\alpha| \leq h}} |\nabla T_k(u_\alpha - u_{\alpha_0})|^p \right)^{1/p}$$

Il s'agit maintenant de passer à la limite en $\alpha \to \alpha_0$ et en $h \to \infty$, mais comme il y deux passages à la limite, on ne peut faire comme précédemment avec une limite dans L^1 puis une limite presque partout, nous allons donc démontrer la convergence presque partout de (u_α) par une méthode analogue à celle de [12]. Montrons que (∇u_α) est convergente (et donc de Cauchy) en mesure, ce qui entraînera $\nabla u_\alpha \to \nabla u_{\alpha_0}$ presque partout, pour une sous-suite (voir chapitre 2). Cela consiste à prouver que

$$\forall \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists\, \alpha_1 \text{ tel que } \forall \alpha \leq \alpha_1 \quad \text{mes}\{x; |(\nabla u_\alpha - \nabla u_{\alpha_0})(x)| \geq \delta\} \leq \varepsilon.$$

Pour cela, fixons $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$, et remarquons que pour $k > 0$ et $h > 0$ nous avons

$$\begin{aligned} &\{x; |(\nabla u_\alpha - \nabla u_{\alpha_0})(x)| \geq \delta\} \subset \\ &\qquad \{|u_{\alpha_0}| \geq h\} \cup \{|\nabla u_\alpha| \geq h\} \cup \{|\nabla u_{\alpha_0}| \geq h\} \cup \{|u_\alpha - u_{\alpha_0}| \geq k\} \\ &\qquad \cup \{|(\nabla u_\alpha - \nabla u_{\alpha_0})| \geq \delta, |u_{\alpha_0}| \leq h, |\nabla u_\alpha| \leq h, |\nabla u_{\alpha_0}| \leq h, |u_\alpha - u_{\alpha_0}| \leq k\} \end{aligned}$$

nous appellerons D_1 à D_5 les cinq ensembles du membre de droite. On pourra remarquer, dans la suite de la démonstration, que seule la majoration de la mesure de D_5 fait intervenir les équations dont u_α et u_{α_0} sont solutions. Les autres majorations utilisent le fait que (u_α) et (∇u_α) sont bornées. C désignera une constante quelconque.

Majorons mes(D_1), nous avons

$$\int_\Omega |u_{\alpha_0}| \geq \int_{D_1} |u_{\alpha_0}| \geq h\,\mathrm{mes}(D_1)$$

donc

$$\mathrm{mes}(D_1) \leq \frac{1}{h}\int_\Omega |u_{\alpha_0}| \leq \frac{C}{h} \leq \varepsilon$$

pour h assez grand, puisque u_{α_0} est borné dans $L^q(]0,T[\times\Omega)$ pour $q<(p-1)N/(N-1)$ et donc dans $L^1(\Omega)$. Fixons donc h tel que mes$(D_1) \leq \varepsilon$.

Majorons mes(D_2) et mes(D_3), nous avons

$$\int_\Omega |\nabla u_\alpha| \geq \int_{D_1} |\nabla u_\alpha| \geq h\,\mathrm{mes}(D_2)$$

donc

$$\mathrm{mes}(D_2) \leq \frac{1}{h}\int_\Omega |\nabla u_\alpha| \leq \frac{C}{h} \leq \varepsilon$$

pour h assez grand, puisque (∇u_α) est borné dans $L^q(]0,T[\times\Omega)$ pour $q<(p-1)N/(N-1)$ et donc dans $L^1(\Omega)$. Fixons donc h tel que mes$(D_2) \leq \varepsilon$ et mes$(D_3) \leq \varepsilon$.

Majorons maintenant mes(D_4), nous avons

$$\int_\Omega |(u_\alpha - u_{\alpha_0})| \geq \int_{D_3} |(u_\alpha - u_{\alpha_0})| \geq k\,\mathrm{mes}(D_4)$$

Comme (u_α) est borné dans $W^{1,q}(\Omega)$ et donc dans $L^1(\Omega)$ indépendamment de α on a

$$2C \geq \int_\Omega |(u_\alpha - u_{\alpha_0})| \geq k\,\mathrm{mes}(D_4)$$

donc pour k assez grand, on a

$$\mathrm{mes}(D_4) \leq \varepsilon.$$

Fixons k ainsi.

Il reste donc à majorer mes(D_5). D'après la monotonie de A, nous avons $[a(t,x,\xi_1) - a(t,x,\xi_2)](\xi_1 - \xi_2) > 0$ pour $\xi_1 - \xi_2 \neq 0$ or l'ensemble des (ξ_1, ξ_2) tels que $|\xi_1| \leq h$, $|\xi_2| \leq h$ et $|\xi_1 - \xi_2| \geq \delta$ est compact et a est continue en ξ pour presque tout t et x, donc $[a(t,x,\xi_1) - a(t,x,\xi_2)](\xi_1 - \xi_2)$ atteint sur ce compact son minimum que nous noterons $\gamma(x)$, qui vérifie $\gamma(x) > 0$ presque partout. De plus grâce à un résultat d'intégration (voir chapitre 2), il existe $\varepsilon' > 0$, tel que pour tout ensemble mesurable $E \subset\ ]0,T[\times\Omega$

$$\int_E \gamma \leq \varepsilon' \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{mes}(E) \leq \varepsilon$$

pour obtenir $\mathrm{mes}(D_5) \leq \varepsilon$, il suffit donc de montrer que $\int_{D_5} \gamma \leq \varepsilon'$. Par définition de γ et de D_5, nous avons

$$\int_{D_5} \gamma \leq \int_{D_5} [a(t,x,\nabla u_\alpha) - a(t,x,\nabla u_{\alpha_0})](\nabla u_\alpha - \nabla u_{\alpha_0})\mathbf{1}_{\{|u_\alpha - u_{\alpha_0}|\leq\eta\}}$$

Or on a vu que

$$\begin{aligned}\int_{|u_{\alpha_0}|\leq h} [a(x,\alpha,\nabla u_\alpha) - a(x,\alpha,\nabla u_{\alpha_0})]\nabla T_k(u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0})) \leq C - B_2 - B_4 \\ +c(\alpha-\alpha_0)\left(\int_{|u_\alpha|\leq h} |b(x)|^{p'} + |\nabla u_\alpha|^p\right)^{1/p'} \left(\int_{\substack{|u_{\alpha_0}|\leq h \\ |u_\alpha|\leq h}} |\nabla T_k(u_\alpha - u_{\alpha_0})|^p\right)^{1/p}\end{aligned}$$

et $D_5 \subset \{|u_{\alpha_0}| \leq h\}$ donc ceci majore $\int_{D_5} \gamma$.

Soit v la limite de u_α presque partout grâce à Rellich, k a déjà été fixé, nous allons choisir un nouvel h plus petit que le précédent (majoration de D_1 et D_2) tel que

$$\int_{|v|\geq h \text{ ou } |u_{\alpha_0}|\geq h} |f| \leq \varepsilon''$$

par continuité de la mesure car $\mathrm{mes}\{|v| \geq h \text{ ou } |u_{\alpha_0}| \geq h\} = O(1/h)$. De plus

$$\gamma \int_{h\leq|u_\alpha|\leq h+k} |\nabla u_\alpha|^p \leq k \int_\Omega |f|$$

en choisissant $v = T_h(u_\alpha)$ dans l'équation entropique. Et presque de même

$$\gamma \int_{h-k\leq|u_{\alpha_0}|\leq h} |\nabla u_{\alpha_0})|^p \leq k \int_{h-k\leq|u_{\alpha_0}|} |f|$$

donc

$$\begin{aligned}\int_{h-k\leq|u_{\alpha_0}|\leq h} |a(x,\alpha,\nabla u_{\alpha_0})|^{p'} &\leq \int_{h-k\leq|u_{\alpha_0}|\leq h} (b(x) + |\nabla u_{\alpha_0}|^{p-1})^{p'} \\ &\leq \int_{h-k\leq|u_{\alpha_0}|} (b(x) + (|f|/\gamma)^{1/(p-1)})^{p'}\end{aligned}$$

Soit donc h assez grand tel que

$$\left(k\int_{h-k\leq|u_{\alpha_0}|} |f|\right)^{1/p} \leq \varepsilon''$$

Comme $\nabla T_k(u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0})) = 0$ pour $|u_\alpha| \leq k+h$

$$\begin{aligned}B_2 &= \int_{\substack{|u_\alpha|\geq h \\ |u_{\alpha_0}|\leq h}} a(x,\alpha,\nabla u_{\alpha_0})\nabla T_k(u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0})) \\ &= \int_{\substack{|u_\alpha|\geq h, |u_{\alpha_0}|\leq h \\ |u_\alpha - u_{\alpha_0}|\leq k}} a(x,\alpha,\nabla u_{\alpha_0})\nabla u_\alpha - \int_{\substack{|u_\alpha|\geq h, |u_{\alpha_0}|\leq h \\ |u_\alpha - u_{\alpha_0}|\leq k}} a(x,\alpha,\nabla u_{\alpha_0})\nabla u_{\alpha_0}\end{aligned}$$

notons alors B_5 et B_6 les deux dernières intégrales, et B_7, B_8 celles venant de la même façon de B_4. Grâce à Hölder, on a

$$\begin{aligned}
|B_5| &\leq \int_{\substack{|u_\alpha|\geq h, |u_{\alpha_0}|\leq h \\ |u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0})|\leq k}} |a(x,\alpha,\nabla u_{\alpha_0})\nabla u_\alpha| \\
&\leq \left(\int_{\substack{|u_\alpha|\geq h, |u_{\alpha_0}|\leq h \\ |u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0})|\leq k}} |a(x,\alpha,\nabla u_{\alpha_0})|^{p'}\right)^{1/p'} \left(\int_{\substack{|u_\alpha|\geq h, |u_{\alpha_0}|\leq h \\ |u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0})|\leq k}} |\nabla u_\alpha|^p\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int_{h-k\leq |u_{\alpha_0}|\leq h} |a(x,\alpha,\nabla u_{\alpha_0})|^{p'}\right)^{1/p'} \left(\int_{h\leq |u_\alpha|\leq h+k} |\nabla u_\alpha|^p\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned}
\{|u_\alpha| \geq h, |u_{\alpha_0}| \leq h, |u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0})| \leq k\} &\subset \{h-k \leq |u_{\alpha_0}| \leq h\} \\
\{|u_\alpha| \geq h, |u_{\alpha_0}| \leq h, |u_\alpha - T_h(u_{\alpha_0})| \leq k\} &\subset \{h \leq |u_\alpha| \leq h+k\}
\end{aligned}$$

Ainsi pour h assez grand $|B_5| \leq C\varepsilon''$ et de même pour B_6, $|B_7|$, B_8. Pour ce h fixé, on a

$$\int_{|u_\alpha|\leq h} |b(x)|^{p'} + |\nabla u_\alpha|^p \leq Ch$$

et

$$\int_{\substack{|u_{\alpha_0}|\leq h \\ |u_\alpha|\leq h}} |\nabla T_k(u_\alpha - u_{\alpha_0})|^p \leq Ch$$

indépendamment de α donc pour $|\alpha - \alpha_0| \leq \alpha_1$, on a

$$c(\alpha-\alpha_0)\left(\int_{|u_\alpha|\leq h} |b(x)|^{p'} + |\nabla u_\alpha|^p\right)^{1/p'} \left(\int_{\substack{|u_{\alpha_0}|\leq h \\ |u_\alpha|\leq h}} |\nabla T_k(u_\alpha - u_{\alpha_0})|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon''$$

et pour $|\alpha - \alpha_0| \leq \alpha_1$ on a aussi

$$\left|\int_{|u_\alpha|\geq h \text{ ou } |u_{\alpha_0}|\geq h} |f| - \int_{|v|\geq h \text{ ou } |u_{\alpha_0}|\geq h} |f|\right| \leq \varepsilon''$$

par continuité de la mesure donc

$$C \leq \int_{|u_\alpha|\geq h \text{ ou } |u_{\alpha_0}|\geq h} |f| \leq 2\varepsilon''$$

compte tenu du choix de h.

Finalement

$$\int_{D_5} \gamma \leq 4\varepsilon'' + 2\varepsilon'' + \varepsilon''$$

pour $|\alpha - \alpha_0| \leq \alpha_1$, donc si l'on choisit $\varepsilon'' \leq \varepsilon'/7$ on a $\int_{D_5} \gamma \leq \varepsilon'$ donc $\text{mes}(D_7) \leq \varepsilon$.

Ainsi pour $|\alpha - \alpha_0| \leq \alpha_1$, on a

$$\text{mes}(\{|(\nabla u_\alpha - \nabla u_{\alpha_0})(x)| \geq \delta\}) \leq 5\varepsilon,$$

la convergence en mesure de (∇u_α) vers ∇u est donc démontrée, donc (après extraction d'une sous-suite) $\nabla u_\alpha \to \nabla u_{\alpha_0}$ presque partout (voir chapitre 2) donc $\nabla u_\alpha \to \nabla u_{\alpha_0}$ dans $L^q(\Omega)$ (ceci est une conséquence du théorème de Vitali). Et grâce à l'inégalité de Poincaré $u_\alpha \to u_{\alpha_0}$ dans $W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $q(p-1) < N/(N-1)$.

Remarque 1 : Ici même pour a fortement monotone, lipschitzien en α et $p = 2$ cette méthode ne permet pas de montrer que $\alpha \to u_\alpha$ est lipschitzienne.

Remarque 2 : Boccardo [9] a montré, à l'aide d'une version L^1 du lemme de Minty, que la H-convergence de $\mathrm{div}(a(x, \alpha, \xi)\xi)$ implique la convergence faible de (u_α) vers u_{α_0} lorsque $f \in L^1(\Omega)$. Ici l'hypothèse est plus forte : continuité de $a(x, \alpha, \xi)$ par rapport à α au sens de (7.4), aussi la conclusion est plus forte : convergence forte de (u_α) (et en particulier convergence presque partout de (∇u_α)).

Remarque 3 : Le théorème 2 redémontre en fait l'unicité des solutions du problème elliptique (c'est-à-dire évite d'utiliser [4]). Si l'on utilise l'unicité démontrée dans [4], on peut faire la démonstration suivante (qui est plus proche de l'idée de [12]).

La suite (u_α) étant bornée dans $W^{1,q}(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite, encore notée u_α, et convergeant faiblement vers u dans $W^{1,q}(\Omega)$. Nous allons montrer que $\nabla u_\alpha \to \nabla u$ presque partout et que u est solution entropique de (7.1) avec α_0 et donc par unicité $u = u_{\alpha_0}$. Ce qui implique, grâce à la convergence presque partout et à l'unicité de la limite, que $u_\alpha \to u_{\alpha_0}$ dans $W^{1,q}(\Omega)$ (fort).

Soit $\eta > 0$ qui sera petit par la suite

$$\begin{aligned}&\{x; |(\nabla u_\alpha - \nabla u)(x)| \geq \delta\} \subset \\ &\qquad \{|u| \geq h\} \cup \{|u_\alpha| \geq h\} \cup \{|\nabla u_\alpha| \geq h\} \cup \{|\nabla u| \geq h\} \cup \{|u_\alpha - u| \geq \eta\} \\ &\qquad \cup \{|(\nabla u_\alpha - \nabla u_{\alpha_0})| \geq \delta, |u| \leq h, |u_\alpha| \leq h |\nabla u_\alpha| \leq h, |\nabla u| \leq h, |u_\alpha - u| \leq \eta\}\end{aligned}$$

Les mesures des quatre premiers ensembles sont majorées de la même façon que ci-dessus, celle du cinquième est petite pour η fixé et $\alpha - \alpha_0$ petit car u_α tend vers u presque partout grâce au théorème de Rellich, il reste donc à fixer η et à majorer la mesure du sixième ensemble, que nous noterons D_6. Pour cela, et comme ci dessus il suffit de majorer $\int_{D_6} \gamma$:

$$\int_{D_6} \gamma \leq \int_{D_6} [a(x, \alpha, \nabla u_\alpha) - a(x, \alpha, \nabla u)] \nabla(u_\alpha - u).$$

Comme $D_6 \subset \{|u| \leq h, |u_\alpha - u| \geq \eta\}$

$$\int_{D_6} [a(x, \alpha, \nabla u_\alpha) \nabla(u_\alpha - u) = \int_{D_6} [a(x, \alpha, \nabla u_\alpha) \nabla T_\eta(u_\alpha - T_h(u))$$

et u_α est solution entropique donc

$$\int_{D_6} [a(x, \alpha, \nabla u_\alpha) \nabla T_\eta(u_\alpha - T_h(u)) \leq \int_\Omega f T_\eta(u_\alpha - T_h(u))$$

et pour η petit

$$\int_\Omega fT_\eta(u_\alpha - T_h(u)) \leq \eta \int_\Omega |f| \leq \varepsilon,$$

ainsi

$$\int_{D_6} [a(x, \alpha, \nabla u_\alpha)\nabla(u_\alpha - u) \leq \varepsilon.$$

L'autre terme est

$$\int_{D_6} a(x, \alpha, \nabla u)\nabla(u_\alpha - u) = \int_{D_6} a(x, \alpha, \nabla T_h(u))\nabla(T_h(u_\alpha) - T_h(u))$$

d'après la condition de croissance de a

$$|a(x, \alpha, \nabla T_h(u))| \leq (b(x) + |\nabla T_h(u)|^{p-1})$$

qui est donc borné dans $L^{p'}$ car h est déjà fixé et $(T_h(u_\alpha))$ est borné dans $W^{1,p}(\Omega)$ donc est convergent à une sous-suite près dans $W^{1,p}(\Omega)$ faible, sa limite étant $T_h(u)$ car grâce au théorème de Rellich $u_\alpha \to u$ presque partout et donc $T_h(u_\alpha) \to T_h(u)$ presque partout donc

$$\nabla(T_h(u_\alpha) - T_h(u)) \to 0 \quad \text{dans } L_0^p(\Omega) \text{ faible}$$

donc

$$\left| \int_{D_6} a(x, \alpha, \nabla T_h(u))\nabla(T_h(u_\alpha) - T_h(u)) \right| \leq \varepsilon$$

lorsque $\alpha - \alpha_0$ est petit, et donc

$$\int_{D_6} \gamma \leq \int_{D_6} [a(x, \alpha, \nabla u_\alpha) - a(x, \alpha, \nabla u)]\nabla(u_\alpha - u) \leq 2\varepsilon,$$

ce qui permet de conclure.

8. Existence et unicité des solutions entropiques de problèmes paraboliques à données L^1

Ce chapitre est la version française d'un article à paraître à Nonlinear Analysis TMA [43].

La formulation classique des problèmes paraboliques dans le cas où les données sont dans L^1 n'assure pas l'unicité des solutions aussi nous présentons ici une formulation appelée *entropique* permettant d'obtenir existence et unicité.

8.1 Position du problème

Il s'agit de résoudre l'équation parabolique

$$\begin{aligned} u_t - \operatorname{div}(a(t,x,\nabla u)) &= f \quad \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega \\ u(0,.) &= u_0 \text{ dans } \Omega \end{aligned} \tag{8.1}$$

avec u_0 dans $L^1(\Omega)$ et f dans $L^1(]0,T[\times\Omega)$ où Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$ et a une fonction de Carathéodory satisfaisant des conditions de coercitivité, de monotonie et de croissance du type de celles de Leray-Lions, définissant un opérateur sur $L^p(]0,T[;W_0^{1,p}(\Omega))$.

Boccardo et Gallouët [11] ont montré, dans le cas plus général où $u_0 \in M(\overline{\Omega})$, $f \in M([0,T]\times\overline{\Omega})$ (pour O un ouvert $M(\overline{O}) = (C(\overline{O}))'$ est le dual de l'ensemble des fonctions continues sur $\overline{O}$ muni de sa norme habituelle, c'est un espace de mesures), et $p > 2 - 1/(N+1)$, qu'il existait une solution au sens suivant

$$u \in \bigcap_{q < \frac{(p-1)(N+1)+1}{N+1}} L^q(]0,T[,W_0^{1,q}(\Omega))$$

et

$$-\int_0^T\!\!\int_\Omega u\,\varphi_t + \int_\Omega \varphi(0)\,du_0 + \int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,\nabla u)\nabla\varphi = \int_0^T\!\!\int_\Omega \varphi\,df \tag{8.2}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}([0,T[\times\Omega)$.

Cependant cette formulation n'assure pas l'unicité pour $N > 2$: il suffit de considérer le contre-exemple « elliptique » (voir [43] et chapitre 6) adapté à partir de celui de Serrin [46]. Il existe A une matrice uniformément coercitive et bornée, c'est-à-dire que $a_{ij}(x) \in L^\infty(\Omega)$ et que

$$\sum_{i,j} \xi_i \, a_{ij}(x) \, \xi_j \geq \sum_i {\xi_i}^2 \qquad \forall (\xi_i) \in \mathbf{R}^N \quad \text{pp } x \in \Omega,$$

et il existe $v(x)$ non nul, tel que $v \in \bigcap_{q<2-\varepsilon} W_0^{1,q}(\Omega)$ (pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on choisit ici $\varepsilon < 1/N$) et qui vérifie

$$-\operatorname{div}(A\nabla v) = 0 \text{ dans } \Omega$$

au sens des distributions, et

$$v = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Alors $w(t,x) = v(x)$ vérifie

$$\begin{aligned} w_t - \operatorname{div}(A\nabla w) &= 0 \text{ dans }]0,T[\times\Omega \\ w &= 0 \text{ sur }]0,T[\times\partial\Omega \\ w(0,.) &= v \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$

au sens de (8.2) avec $w \in \bigcap_{q<\frac{N+2}{N+1}} L^q(]0,T[,W_0^{1,q}(\Omega))$ or, de plus, $v \in L^2(\Omega)$ (car $\varepsilon < 1/N$, voir [43]) donc il existe une solution variationnelle $\widetilde{w}$ de ce même problème mais telle que $\widetilde{w} \in L^2(]0,T[;H_0^1(\Omega))$ (Lions et Magenes [35]). Comme $w \notin L^2(]0,T[;H_0^1(\Omega))$ (car $v \notin H_0^1(\Omega)$), w et $\widetilde{w}$ sont distincts donc $\overline{w} = w - \widetilde{w} \in \bigcap_{q<\frac{N+2}{N+1}} L^q(]0,T[,W_0^q(\Omega))$ est une solution non nulle de

$$\begin{aligned} \overline{w}_t - \operatorname{div}(A\nabla \overline{w}) &= 0 \text{ dans }]0,T[\times\Omega \\ \overline{w} &= 0 \text{ sur }]0,T[\times\partial\Omega \\ \overline{w}(0,.) &= 0 \text{ dans } \Omega. \end{aligned}$$

au sens de (8.2).

Afin de remédier à la non-unicité, une formulation *entropique* est proposée, celle-ci est proche de celle qui a été introduite pour le cas elliptique dans [4]. Dans le cas où a ne dépend pas de t, l'existence et l'unicité de la solution entropique ont été montrées, en utilisant la théorie des semi-groupes, par Andreu, Mazón, Segura de León et Toledo [2].

Une autre formulation définissant des solutions dites *renormalisées* et assurant aussi l'unicité est donnée par Blanchard et Murat [8]. Ces deux formulations conduisent à la même solution.

Donnons les hypothèses sur a, nous les appellerons (H) par la suite : a est une fonction de Carathéodory, c'est-à-dire que

- $a(t,x,\xi) : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ est mesurable en $t \in \mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}^N$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}^N$ et continue en $\xi \in \mathbf{R}^N$ pour presque tout $t \in \mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}^N$. Nous noterons $a(t,x,\nabla u) = a(t,x,\nabla u(t,x))$.

et a vérifie aussi des conditions de coercitivité, monotonie et croissance : il existe p vérifiant $2 - 1/(N+1) < p \leq N$ et

- Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout ξ et presque tout t et x on ait

$$a(t,x,\xi)\xi \geq \alpha|\xi|^p$$

- Pour tout ξ et η et presque tout t et x on a

$$[a(t,x,\xi) - a(t,x,\eta)](\xi - \eta) > 0 \quad \text{pour} \quad \xi \neq \eta$$

- Il existe $b(t,x) \in L^{p'}(]0,T[\times\Omega)$, (où $p' = p/(p-1)$) et $\beta > 0$ tels que pour tout ξ et presque tout t et x on ait

$$|a(t,x,\xi)| \leq \beta(b(t,x) + |\xi|^{p-1})$$

Ces hypothèses sont classiques (sauf $p > 2 - 1/(N+1)$) pour l'étude des opérateurs non linéaires sous forme divergentielle (voir Leray et Lions [33]).

Soit $k > 0$ et $T_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction « tronquante » valant

$$\begin{cases} -k & \text{pour} \quad x \leq -k \\ x & \text{pour} \quad |x| \leq k \\ k & \text{pour} \quad x \geq k. \end{cases}$$

et sa primitive $\Theta_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$

$$\Theta_k(x) = \int_0^x T_k(s)\,ds.$$

Nous utiliserons par la suite le résultat suivant (F. Mignot [28])

$$\langle v_t, T_k(v)\rangle = \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega \Theta_k(v)\right) \qquad \text{dans } L^1(]0,T[)$$

qui implique

$$\int_0^T \langle v_t, T_k(v)\rangle = \int_\Omega \Theta_k(v(T)) - \int_\Omega \Theta_k(v(0))\,.$$

$\langle .,.\rangle$ représente la dualité entre $W^{-1,p'}(\Omega)$ et $W_0^{1,p}(\Omega)$. Il en sera de même par la suite sauf mention contraire.

Définition : *Pour $f \in L^1(]0,T[\times\Omega)$, $u_0 \in L^1(\Omega)$ et Ω ouvert borné de $\mathbf{R}^N$, on appelle solution* entropique *de* (8.1) *une fonction $u \in C([0,T];L^1(\Omega))$ telle que pour tout $k > 0$ on ait $T_k(u) \in L^p(]0,T[;W_0^{1,p}(\Omega))$ et qui vérifie*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \Theta_k(u-\varphi)(T) - \int_\Omega \Theta_k(u_0 - \varphi(0)) + \int_0^T \langle \varphi_t, T_k(u-\varphi)\rangle \\ &\qquad + \int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,\nabla u)\nabla T_k(u-\varphi) \leq \int_0^T\!\!\int_\Omega f\,T_k(u-\varphi) \end{aligned} \tag{8.3}$$

pour tout $k > 0$ et $\varphi \in L^p(]0,T[;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(]0,T[\times\Omega) \cap C([0,T];L^1(\Omega))$ tel que $\varphi_t \in L^{p'}(]0,T[;W^{-1,p'}(\Omega))$.

Le résultat que nous prouvons ici est le théorème suivant

Théorème : *Soient* Ω *ouvert borné de* $\mathbf{R}^N$, $f \in L^1(]0,T[\times\Omega)$, $u_0 \in L^1(\Omega)$, *et* a *vérifiant* (H), *alors le problème* (8.1) *admet une et une seule solution* entropique.

Nous rappelons tout d'abord comment est obtenue la solution de [11] et nous précisons sa régularité et, dans les deux paragraphes suivants, nous montrons l'existence puis l'unicité de la solution entropique.

8.2 La solution obtenue par approximation

La méthode employée, dans [11], pour montrer l'existence de solutions pour $u_0 \in M(\overline{\Omega})$ et $f \in M([0,T] \times \overline{\Omega})$ consiste à régulariser u_0 et f par deux suites (u_0^n) et (f_n) appartenant respectivement à $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ et $L^{p'}(]0,T[;W^{-1,p'}(\Omega)) \cap L^1(]0,T[\times\Omega)$ ce qui donne une solution u_n de (8.1) (avec f_n et u_0^n au lieu de f et u_0) puis à passer à la limite pour $n \to \infty$.

Plus précisément, ici $f \in L^1(]0,T[\times\Omega) \subset M([0,T]\times\overline{\Omega})$ soit alors (f_n) une suite de fonctions de $L^1(]0,T[\times\Omega) \cap L^{p'}(]0,T[;W^{-1,p'}(\Omega))$ telle que $\|f_n\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}$ et $f_n \to f$ dans $L^1(]0,T[\times\Omega)$ et soit u_0^n une suite de $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$ telle que $\|u_0^n\|_{L^1} \leq \|u_0\|_{L^1}$ et $u_0^n \to u_0$ dans $L^1(\Omega)$. Soit u_n la solution « classique » (voir Lions [34]) de

$$\begin{aligned} u_t^n - \operatorname{div}(a(t,x,\nabla u_n)) &= f_n \ \text{ dans }]0,T[\times\Omega \\ u_n &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ u_n(0,.) &= u_0^n \ \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'on a

$$u_n \in L^p(]0,T[;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad u_t^n \in L^{p'}(]0,T[;W^{-1,p'}(\Omega))$$

et que u_n vérifie

$$\text{(8.4)} \qquad \int_0^T \langle u_t^n, \varphi\rangle + \int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,\nabla u_n)\nabla\varphi = \int_0^T \langle f_n, \varphi\rangle$$

pour tout $\varphi \in L^p(]0,T[;W_0^{1,p}(\Omega))$ et que $u_n(0) = u_0^n$. Il est montré dans [11] que (u_n) est borne dans $L^q(]0,T[,W_0^{1,q}(\Omega))$ pour tout $q < \frac{(p-1)(N+1)+1}{N+1}$ et que $T_k(u_n)$ est borné dans $L^p(]0,T[,W_0^{1,p}(\Omega))$ pour tout $k > 0$ aussi (à une sous suite près) il existe u tel que (u_n) converge faiblement vers u dans $\bigcap_{q<[(p-1)(N+1)+1]/(N+1)} L^q(]0,T[,W_0^{1,q}(\Omega))$ et $T_k(u_n)$ converge faiblement vers $T_k(u)$ dans $L^p(]0,T[,W_0^{1,p}(\Omega))$ pour tout $k > 0$. Pour montrer que u est une solution de (8.1), il nous reste à montrer la propriété suivante.

Propriété : *La suite* (∇u_n) *converge presque partout vers* ∇u *(éventuellement à une sous-suite près).*

Démonstration : Montrons que (∇u_n) est de Cauchy en mesure, ce qui entraînera $\nabla u_n \to \nabla u$ presque partout, pour une sous suite (voir chapitre 2). Cela consiste à prouver que

$$\forall\delta>0, \forall\varepsilon>0, \exists n_0 \text{ tel que } \forall n,m \geq n_0 \quad \operatorname{mes}\{(t,x); |(\nabla u_n - \nabla u_m)(t,x)| \geq \delta\} \leq \varepsilon.$$

Pour cela, fixons $\delta>0$ et $\varepsilon>0$, et remarquons que pour $k>0$ et $\eta>0$ nous avons

$$\begin{aligned}\{(t,x); |(\nabla u_n - \nabla u_m)(t,x)| \geq \delta\} \subset &\\ &\{|\nabla u_n| \geq k\} \cup \{|\nabla u_m| \geq k\} \cup \{|u_n - u_m| \geq \eta\}\\ &\cup \{|(\nabla u_n - \nabla u_m)| \geq \delta, |\nabla u_n| \leq k, |\nabla u_m| \leq k, |u_n - u_m| \leq \eta\}\end{aligned}$$

nous appellerons A_1 à A_4 les quatre ensembles du membre de droite. On pourra remarquer, dans la suite de la démonstration, que seule la majoration de la mesure de A_4 fait intervenir (8.4), l'équation dont u_n et u_m sont solutions. Les autres majorations utilisent le fait que (u_n) et (∇u_n) sont bornées.

Majorons $\operatorname{mes}(A_1)$ et $\operatorname{mes}(A_2)$, nous avons

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega |\nabla u_n| \geq \int_{A_1} |\nabla u_n| \geq k \operatorname{mes}(A_1)$$

donc

$$\operatorname{mes}(A_1) \leq \frac{1}{k}\int_0^T\!\!\int_\Omega |\nabla u_n| \leq \frac{C}{k} \leq \varepsilon$$

pour k assez grand, puisque (∇u_n) est borné dans $L^q(]0,T[\times\Omega)$ pour $q<[(p-1)(N+1)+1]/(N+1)$ et donc dans $L^1(]0,T[\times\Omega)$. Fixons donc k tel que $\operatorname{mes}(A_1) \leq \varepsilon$ et $\operatorname{mes}(A_2) \leq \varepsilon$ (pour tous $n,m \in \mathbf{N}$).

Majorons maintenant $\operatorname{mes}(A_3)$, nous avons

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega |(u_n - u_m)| \geq \int_{A_3} |(u_n - u_m)| \geq \eta \operatorname{mes}(A_3)$$

il suffit donc de montrer que (u_n) est de Cauchy dans $L^1(]0,T[\times\Omega)$. Comme (u_n) est borné dans $L^q(]0,T[;W_0^{1,q}(\Omega))$ pour $q<[(p-1)(N+1)+1]/(N+1)$, $\operatorname{div}(a(t,x,\nabla u_n))$ est borné dans $L^q(]0,T[;W^{-1,q}(\Omega))$ pour tout $q<[(p-1)(N+1)+1]/(p-1)(N+1)$. De plus $L^1(\Omega) \subset W^{-1,q}(\Omega)$ pour tout $q<N/(N-1)$, et comme $p>2-1/(N+1)$, on a $[(p-1)(N+1)+1]/(p-1)(N+1) < N/(N-1)$ donc (f_n) qui est, par hypothèse, borné dans $L^1(]0,T[\times\Omega)$, l'est aussi dans $L^1(]0,T[;W^{-1,q}(\Omega))$ pour $q<[(p-1)(N+1)+1]/(p-1)(N+1)$. Or $u_t^n = f_n + \operatorname{div}(a(t,x,\nabla u_n))$ donc (u_t^n) est borné dans $L^1(]0,T[;W^{-1,q}(\Omega))$ pour tout $q<[(p-1)(N+1)+1]/(p-1)(N+1)$. Ainsi

$$\begin{aligned}&(u_n) \text{ est borné dans } L^q(]0,T[;W_0^{1,q}(\Omega))\\ &(u_t^n) \text{ est borné dans } L^1(]0,T[;W^{-1,q}(\Omega))\end{aligned}$$

donc, d'après un lemme de compacité du type de celui d'Aubin (voir, par exemple, Simon [47]), (u_n) converge (à une sous-suite près) dans $L^q(]0,T[;L^q(\Omega))$ pour tout $q<[(p-1)(N+1)+1]/(p-1)(N+1)$ et donc dans $L^1(]0,T[\times\Omega)$. Ainsi la suite (u_n)

est convergente (à une sous-suite près) dans $L^1(]0,T[\times\Omega)$ et est donc de Cauchy dans $L^1(]0,T[\times\Omega)$ donc pour η donné, il existe n_0 tel que pour $n, m \geq n_0$ on ait

$$\operatorname{mes}(A_3) \leq \varepsilon.$$

Il reste donc à majorer $\operatorname{mes}(A_4)$, et à choisir η. D'après la monotonie de a, nous avons $[a(t,x,\xi_1) - a(t,x,\xi_2)](\xi_1 - \xi_2) > 0$ pour $\xi_1 - \xi_2 \neq 0$ or l'ensemble des (ξ_1, ξ_2) tels que $|\xi_1| \leq k$, $|\xi_2| \leq k$ et $|\xi_1 - \xi_2| \geq \delta$ est compact et a est continue en ξ pour presque tout t et x, donc $[a(t,x,\xi_1) - a(t,x,\xi_2)](\xi_1 - \xi_2)$ atteint sur ce compact son minimum que nous noterons $\gamma(t,x)$, qui vérifie $\gamma(t,x) > 0$ pp. De plus grâce à un résultat d'intégration (voir chapitre 2), il existe $\varepsilon' > 0$, tel que pour tout ensemble mesurable $A \subset\ ]0,T[\times\Omega$

$$\int_A \gamma \leq \varepsilon' \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{mes}(A) \leq \varepsilon \tag{8.5}$$

pour obtenir $\operatorname{mes}(A_4) \leq \varepsilon$, il suffit donc de montrer que $\int_{A_4} \gamma \leq \varepsilon'$. Par définition de γ et de A_4, nous avons

$$\int_{A_4} \gamma \leq \int_{A_4} [a(t,x,\nabla u_n) - a(t,x,\nabla u_m)](\nabla u_n - \nabla u_m) \mathbf{1}_{\{|u_n - u_m| \leq \eta\}},$$

de plus le terme intégré est positif et $\nabla T_\eta(u_n - u_m) = (\nabla u_n - \nabla u_m)\mathbf{1}_{\{|u_n-u_m|\leq\eta\}}$, nous avons donc

$$\int_{A_4} \gamma \leq \int_0^T\!\!\int_\Omega [a(t,x,\nabla u_n) - a(t,x,\nabla u_m)] \nabla T_\eta(u_n - u_m)$$

et si l'on choisit $\varphi = T_\eta(u_n - u_m) \in L^p(]0,T[; W^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ qui vérifie $T_\eta(u_n - u_m)_t \in L^{p'}(]0,T[; W^{-1,p'}(\Omega))$ dans l'équation (8.4) écrite avec u_n puis avec u_m on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle (u_n - u_m)_t, T_\eta(u_n - u_m)\rangle + \int_0^T\!\!\int_\Omega [a(t,x,\nabla u_n) - a(t,x,\nabla u_m)] \nabla T_\eta(u_n - u_m) \\ = \int_0^T\!\!\int_\Omega (f_n - f_m)\, T_\eta(u_n - u_m)\end{aligned}$$

soit (Θ_η est la primitive de T_η)

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Theta_\eta(u_n - u_m)(T) - \int_\Omega \Theta_\eta(u_n - u_m)(0) \\ &+ \int_0^T\!\!\int_\Omega [a(t,x,\nabla u_n) - a(t,x,\nabla u_m)] \nabla T_\eta(u_n - u_m) = \int_0^T\!\!\int_\Omega (f_n - f_m)\, T_\eta(u_n - u_m)\end{aligned}$$

le premier terme est positif ($\Theta_\eta(x) \geq 0$), et $\Theta_\eta(x) \leq \eta|x|$ donc

$$\begin{aligned}&\int_0^T\!\!\int_\Omega [a(t,x,\nabla u_n) - a(t,x,\nabla u_m)] \nabla T_\eta(u_n - u_m) \\ &\qquad \leq \eta \int_0^T\!\!\int_\Omega |f_n - f_m| + \eta \int_\Omega |u_0^n - u_0^m| \leq 2\,\eta\,(\|f\|_{L^1} + \|u_0\|_{L^1})\end{aligned}$$

aussi pour η suffisamment petit, on a $\int_{A_4} \gamma \le \varepsilon'$ et donc mes$(A_4) \le \varepsilon$ (grâce à (8.5)).

Ainsi η étant fixé, la majoration de mes(A_3) nous donne n_0 tel que pour tout $n, m \ge n_0$ on ait mes$(A_3) \le \varepsilon$ et donc

$$\mathrm{mes}(\{|(\nabla u_n - \nabla u_m)(x)| \ge \delta\}) \le 4\varepsilon,$$

la convergence en mesure de (∇u_n) vers ∇u est donc démontrée, ainsi que la propriété (après extraction d'une sous-suite).

Ceci achève de prouver que u est solution de (8.2). Par la suite nous avons besoin de la propriété suivante.

Propriété : *La suite (u_n) est de Cauchy dans $C([0,T];L^1(\Omega))$, aussi $u \in C([0,T];L^1(\Omega))$ et il y a convergence de u_n vers u dans $C([0,T];L^1(\Omega))$.*

Démonstration : Soient m et n deux entiers, u_n et u_m vérifient alors (d'après (8.4))

$$\int_0^T \langle (u_n - u_m)_t, \varphi\rangle + \int_0^T\!\!\int_\Omega [a(t,x,\nabla u_n) - a(t,x,\nabla u_m)]\nabla\varphi = \int_0^T\!\!\int_\Omega (f_n - f_m)\,\varphi$$

pour tout $\varphi \in L^p(]0,T[;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(]0,T[\times\Omega)$.

Prenons $\varphi = T_1(u_n - u_m)\mathbf{1}_{\{[0,t[\}}$, avec $t \le T$, on a bien $\varphi \in L^p(]0,T[;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ donc

$$\begin{aligned}\int_0^t \langle (u_n - u_m)_t, T_1(u_n - u_m)\rangle + \int_0^t\!\!\int_\Omega [a(t,x,\nabla u_n) - a(t,x,\nabla u_m)]\nabla T_1(u_n - u_m)\\ = \int_0^t\!\!\int_\Omega (f_n - f_m)\,T_1(u_n - u_m) \le T\int_\Omega |f_n - f_m|\end{aligned} \tag{8.6}$$

et rappelons que Θ_1 est la primitive de T_1, d'où

$$\langle (u_n - u_m)_t, T_1(u_n - u_m)\rangle = \left(\int_\Omega \Theta_1(u_n - u_m)\right)_t$$

or $u_n \in C([0,T];L^2(\Omega))$ donc

$$\int_0^t \langle (u_n - u_m)_t, T_1(u_n - u_m)\rangle = \int_\Omega [\Theta_1(u_n - u_m)](t) - \int_\Omega [\Theta_1(u_n - u_m)](0)$$

de plus $\nabla T_1(u_n - u_m) = \nabla(u_n - u_m)\mathbf{1}_{\{|u_n - u_m| \le 1\}}$ aussi

$$\begin{aligned}\int_0^t\!\!\int_\Omega [a(t,x,\nabla u_n) - a(t,x,\nabla u_m)]\nabla T_1(u_n - u_m) =\\ \int_0^t\!\!\int_\Omega [a(t,x,\nabla u_n) - a(t,x,\nabla u_m)]\nabla(u_n - u_m)\mathbf{1}_{\{|u_n - u_m| \le 1\}} \ge 0\end{aligned}$$

grâce à la monotonie de a, si bien que (8.6) conduit à

$$\int_\Omega [\Theta_1(u_n - u_m)](t) - \int_\Omega \Theta_1(u_0^n - u_0^m) \le T\int_\Omega |f_n - f_m|$$

soit

$$\int_\Omega [\Theta_1(u_n - u_m)](t) \leq \int_\Omega \Theta_1(u_0^n - u_0^m) + T\int_\Omega |f_n - f_m|$$

or

$$\Theta_1(x) \leq |x|$$

donc

$$\int_\Omega [\Theta_1(u_n - u_m)](t) \leq \int_\Omega |u_0^n - u_0^m| + T\int_\Omega |f_n - f_m|$$

pour tout $t \leq T$. Notons $a_{n,m}$ le second membre, aussi

$$\int_{|u_n-u_m|<1} |u_n - u_m|^2(t) + \int_{|u_n-u_m|>1} \frac{|u_n-u_m|(t)}{2} \leq \int_\Omega [\Theta_1(u_n - u_m)](t) \leq a_{n,m}$$

et

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u_n - u_m|(t) &= \int_{|u_n-u_m|<1} |u_n - u_m|(t) + \int_{|u_n-u_m|>1} |u_n - u_m|(t)\\ &\leq \left(\int_{|u_n-u_m|<1} |u_n - u_m|^2(t)\right)^{\frac12} \operatorname{mes}(\Omega)^{\frac12} + 2\,a_{n,m}\\ &\leq (2\operatorname{mes}(\Omega))^{\frac12} {a_{n,m}}^{\frac12} + 2\,a_{n,m}.\end{aligned}$$

Comme (f_n) et (u_n) convergent dans L^1 on a $a_{n,m} \to 0$ pour m et $n \to \infty$ donc (u_n) est de Cauchy dans $C([0,T];L^1(\Omega))$, aussi $u \in C([0,T];L^1(\Omega))$ et $\forall\, t \leq T$ on a $u_n(t) \to u(t)$ dans $L^1(\Omega)$. Ce qui achève la démonstration de cette propriété.

8.3 Existence d'une solution entropique

Nous pouvons maintenant montrer que la limite u de la suite (u_n), définie précédemment, est une solution entropique de (8.1), c'est-à-dire qu'elle vérifie (8.3).

La solution u de (8.2), obtenue au paragraphe précédent, est limite de (u_n) qui vérifie (8.4), c'est-à-dire,

$$\int_0^T \langle u_t^n, \psi\rangle + \int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,\nabla u_n)\nabla\psi = \int_0^T \langle f_n, \psi\rangle \tag{8.7}$$

pour tout $\psi \in L^p(]0,T[;W_0^{1,p}(\Omega))$. Choisissons $\psi = T_k(u_n - \varphi)$ où φ vérifie $\varphi \in L^p(]0,T[;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ et $\varphi_t \in L^{p'}(]0,T[;W^{-1,p'}(\Omega))$: on vérifie aisément que $\psi \in L^p(]0,T[\times\Omega)$ et $\nabla\psi \in L^p(]0,T[\times\Omega)$ car

$$\nabla\psi = \mathbf{1}_{\{|u_n-\varphi|\leq k\}}\nabla(u_n - \varphi)$$

si bien que $\psi \in L^p(]0,T[;W_0^{1,p}(\Omega))$. Ce choix de ψ dans (8.7) est donc possible et, nous obtenons

$$\int_0^T \langle u_t^n, T_k(u_n - \varphi)\rangle + \int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n - \varphi) = \int_0^T\!\!\int_\Omega f_n\,T_k(u_n - \varphi)$$

et comme $u_t^n = (u_n - \varphi)_t + \varphi_t$ on a

$$\int_0^T \langle u_t^n, T_k(u_n-\varphi)\rangle = \int_\Omega [\Theta_k(u_n-\varphi)](T) - \int_\Omega [\Theta_k(u_n-\varphi)](0) + \int_0^T \langle \varphi_t, T_k(u_n-\varphi)\rangle$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned}\int_\Omega [\Theta_k(u_n-\varphi)](T) - \int_\Omega [\Theta_k(u_n-\varphi)](0) + \int_0^T \langle \varphi_t, T_k(u_n-\varphi)\rangle \\ + \int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,\nabla u_n)\nabla T_k(u_n-\varphi) = \int_0^T\!\!\int_\Omega f_n\, T_k(u_n-\varphi)\end{aligned} \tag{8.8}$$

(c'est la formulation *entropique* pour u_n avec une égalité). Etudions le passage à la limite pour $n\to\infty$ de chacun des termes.

On a vu que $u_n \to u$ dans $C([0,T];L^1(\Omega))$, donc $\forall\, t \le T$, $u_n(t)\to u(t)$ dans $L^1(\Omega)$. Comme Θ_k est lipschitzienne de coefficient 1, on a, lorsque $n\to\infty$

$$\int_\Omega [\Theta_k(u_n-\varphi)](T) \to \int_\Omega [\Theta_k(u-\varphi)](T)$$

et $\int_\Omega [\Theta_k(u_n-\varphi)](0) = \int_\Omega \Theta_k(u_0^n - \varphi(0))$ et $u_0^n \to u_0$ dans $L^1(\Omega)$ donc de même

$$\int_\Omega [\Theta_k(u_n-\varphi)](0) \to \int_\Omega \Theta_k(u_0-\varphi(0))$$

Passons maintenant à la limite dans $\int_0^T \langle \varphi_t, T_k(u_n-\varphi)\rangle$. Utilisons l'hypothèse $\varphi \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$, et notons $M = \|\varphi\|_\infty$, alors $T_k(u_n-\varphi) = T_k(T_{k+M}(u_n)-\varphi)$. De plus $\varphi_t \in L^{p'}(]0,T[;W^{-1,p'}(\Omega))$, il suffit donc de montrer que, $T_k(T_{k+M}(u_n) - \varphi) \to T_k(T_{k+M}(u)-\varphi)$ dans $L^p(]0,T[;W^{1,p}(\Omega))$ faible. La convergence dans $L^p(]0,T[;W^{1,p}(\Omega))$ faible signifie que $\mathbf{1}_{\{|T_{k+M}(u_n)-\varphi|\le k\}}\nabla(T_{k+M}(u_n)-\varphi)$ converge dans $L^p(]0,T[\times\Omega)$ faible ce qui bien le cas puisque $\nabla T_{k+M}(u_n)$ converge dans $L^p(]0,T[\times\Omega)$ faible, et puisqu'à une sous-suite près $T_{k+M}(u_n)$ converge presque partout. Donc

$$\int_0^T \langle \varphi_t, T_k(T_{k+M}(u_n)-\varphi)\rangle \to \int_0^T \langle \varphi_t, T_k(T_{k+M}(u)-\varphi)\rangle$$

c'est-à dire que

$$\int_0^T \langle \varphi_t, T_k(u_n-\varphi)\rangle \to \int_0^T \langle \varphi_t, T_k(u-\varphi)\rangle.$$

Le dernier des termes de gauche peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned}&\int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,\nabla T_{k+M}(u_n))\nabla T_k(T_{k+M}(u_n)-\varphi)\\ &= \int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,\nabla T_{k+M}(u_n))\nabla T_{k+M}(u_n)\,\mathbf{1}_{\{|T_{k+M}(u_n)-\varphi|\le k\}}\\ &- \int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,\nabla T_{k+M}(u_n))\nabla\varphi\,\mathbf{1}_{\{|T_{k+M}(u_n)-\varphi|\le k\}}.\end{aligned}$$

Comme $T_{k+M}(u_n)$ est borné dans $L^p(]0,T[,W_0^{1,p}(\Omega))$, $a(t,x,\nabla T_{k+M}(u_n))$ est borné dans $L^{p'}(]0,T[\times\Omega)$ et donc converge faiblement. De plus $\nabla T_{k+M}(u_n) \to \nabla T_{k+M}(u)$ pp, donc $a(t,x,\nabla T_{k+M}(u_n)) \to a(t,x,\nabla T_{k+M}(u))$ pp (car $\nabla T_{k+M}(u_n) \to \nabla T_{k+M}(u)$ presque partout) et dans $L^{p'}(]0,T[\times\Omega)$ faible. Et comme, grâce à la convergence dominée, $\nabla\varphi\,\mathbf{1}_{\{|T_{k+M}(u_n)-\varphi|\leq k\}}$ converge dans $L^p(]0,T[\times\Omega)$, on a

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,\nabla T_{k+M}(u_n))\nabla\varphi\,\mathbf{1}_{\{|T_{k+M}(u_n)-\varphi|\leq k\}} \to \int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,\nabla T_{k+M}(u))\nabla\varphi\,\mathbf{1}_{\{|T_{k+M}(u)-\varphi|\leq k\}}$$

l'autre terme étant positif, le lemme de Fatou nous donne (nous avons montré la convergence presque partout de (∇u_n) ce qui entraîne celle de $\nabla T_{k+M}(u_n)$)

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,\nabla T_{k+M}(u))\nabla T_{k+M}(u)\mathbf{1}_{\{|T_{k+M}(u)-\varphi|\leq k\}} \leq \underline{\lim}\int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,\nabla T_{k+M}(u_n))\nabla T_{k+M}(u_n)\,\mathbf{1}_{\{|T_{k+M}(u_n)-\varphi|\leq k\}}$$

(où $\underline{\lim}$ indique la limite inférieure).

Enfin il reste à passer à la limite dans $\int_0^T\int_\Omega f_n\,T_k(u_n-\varphi)$. Comme $|T_k(u_n-\varphi)| \leq k$, $T_k(u_n-\varphi)$ converge vers $T_k(u-\varphi)$ dans $L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ faible $*$ par convergence dominée et, de plus, $f_n \to f$ dans $L^1(]0,T[\times\Omega)$ donc

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega f_n\,T_k(u_n-\varphi) \to \int_0^T\!\!\int_\Omega f\,T_k(u-\varphi).$$

Et finalement grâce à (8.8) nous obtenons

$$\int_\Omega [\Theta_k(u-\varphi)](T) - \int_\Omega \Theta_k(u_0-\varphi(0)) + \int_0^T \langle \varphi_t, T_k(u-\varphi)\rangle + \int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,\nabla u)\nabla T_k(u-\varphi) \leq \int_0^T\!\!\int_\Omega f\,T_k(u-\varphi).$$

Remarque : On peut, en fait, montrer la convergence forte de $\nabla T_h(u_n)$ vers $\nabla T_h(u)$ dans $L^p(]0,T[\times\Omega)$ (voir [7], et [39], [36] pour l'elliptique), ce qui conduit à une égalité dans la formulation entropique, cependant l'inégalité est suffisante pour montrer l'unicité.

8.4 Unicité de la solution entropique

Nous allons montrer ici l'unicité de la solution entropique (c'est-à-dire une solution de (8.3)). Soit u la solution entropique construite précédemment et soit v une autre solution entropique, nous allons montrer que $u = v$ ce qui donnera l'unicité.

Cette solution u n'est, *a priori*, pas unique : elle pourrait dépendre du choix de (f_n) (l'approximation de f) et, de plus, plusieurs sous-suites ont été extraites lors de la construction de u. Cependant l'égalité $u = v$ montre aussi l'unicité de la solution u construite par approximations.

On souhaite choisir $\psi = T_h(u_n)$ comme fonction test dans (8.3), cependant T_h n'est pas assez régulier, si bien que $(T_h)'(u_n) \notin L^p(]0,T[;W_0^{1,p}(\Omega))$, aussi introduisons nous, pour $h > \varepsilon > 0$, $T_h^\varepsilon \in C^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ tel que

- $(T_h^\varepsilon)'(x) = 0$ si $|x| \geq h$,
- $(T_h^\varepsilon)'(x) = 1$ si $|x| \leq h - \varepsilon$,
- $0 \leq (T_h^\varepsilon)' \leq 1$,

ainsi $T_h^\varepsilon(u_n) \in L^p(]0,T[;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(]0,T[\times\Omega) \cap C([0,T];L^1(\Omega))$ et $(T_h^\varepsilon)'(u_n) \in L^p(]0,T[;W_0^{1,p}(\Omega))$ (car $(T_h^\varepsilon)'$ et $(T_h^\varepsilon)'' \in L^\infty$), l'équation (8.3) nous donne alors (par un argument classique de régularisation)

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Theta_k(v - T_h^\varepsilon(u_n))(T) - \int_\Omega \Theta_k(u_0 - T_h^\varepsilon(u_0^n)) + \int_0^T \langle (u_n)_t, (T_h^\varepsilon)'(u_n)\, T_k(v - T_h^\varepsilon(u_n))\rangle \\ + \int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,\nabla v)\,\nabla T_k(v - T_h^\varepsilon(u_n)) \leq \int_0^T\!\!\int_\Omega f\, T_k(v - T_h^\varepsilon(u_n))\,.\end{aligned} \tag{8.9}$$

Eliminons $\int_0^T \langle (u_n)_t, (T_h^\varepsilon)'(u_n)\, T_k(v - T_h^\varepsilon(u_n))\rangle$, de (8.9) pour cela, choisissons $\varphi = (T_h^\varepsilon)'(u_n)\psi$ dans (8.4) avec $\psi \in L^p(]0,T[;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ si bien que $\varphi \in L^p(]0,T[;W_0^{1,p}(\Omega))$, on a donc

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle (u_n)_t, (T_h^\varepsilon)'(u_n)\psi\rangle + \int_0^T\!\!\int_\Omega (T_h^\varepsilon)''(u_n)\psi\, a(t,x,\nabla u_n)\nabla u_n \\ + \int_0^T\!\!\int_\Omega (T_h^\varepsilon)'(u_n)\, a(t,x,\nabla u_n)\nabla\psi = \int_0^T\!\!\int_\Omega f_n\, (T_h^\varepsilon)'(u_n)\,\psi\end{aligned} \tag{8.10}$$

Choisissons $\psi = T_k(v - T_h^\varepsilon(u_n))$, alors de (8.9) et (8.10), nous obtenons

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Theta_k(v - T_h^\varepsilon(u_n))(T) - \int_\Omega \Theta_k(u_0 - T_h^\varepsilon(u_0^n)) \\ &- \int_0^T\!\!\int_\Omega (T_h^\varepsilon)''(u_n)T_k(v - T_h^\varepsilon(u_n))\, a(t,x,\nabla u_n)\nabla u_n \\ &- \int_0^T\!\!\int_\Omega (T_h^\varepsilon)'(u_n)\, a(t,x,\nabla u_n)\nabla T_k(v - T_h^\varepsilon(u_n)) + \int_0^T\!\!\int_\Omega a(t,x,\nabla v)\,\nabla T_k(v - T_h^\varepsilon(u_n)) \\ &\leq \int_0^T\!\!\int_\Omega f\, T_k(v - T_h^\varepsilon(u_n)) - \int_0^T\!\!\int_\Omega f_n\, (T_h^\varepsilon)'(u_n)T_k(v - T_h^\varepsilon(u_n)).\end{aligned}$$

Nous allons maintenant faire tendre successivement ε vers 0, n vers ∞ puis h vers ∞. Commençons par $\varepsilon \to 0$. Notons A_1^ε à A_7^ε ces sept termes, nous obtenons alors

$$A_1^\varepsilon + A_2^\varepsilon + A_3^\varepsilon + A_4^\varepsilon + A_5^\varepsilon \leq A_6^\varepsilon + A_7^\varepsilon$$

et donc

$$A_1^\varepsilon + A_2^\varepsilon + A_4^\varepsilon + A_5^\varepsilon \leq A_6^\varepsilon + A_7^\varepsilon + |A_3^\varepsilon|.$$

comme $|\Theta_k(v - T_h^\varepsilon(u_n))(T)| \leq k[|v| + |T_h(u_n)|](T)$, $(T_h^\varepsilon)'(x) \leq T_h'(x)$ et $|\nabla T_k(v - T_h^\varepsilon(u_n))| \leq [|\nabla T_{k+h}(v)| + |\nabla T_h(u_n)|]$, les quatre termes du membre de gauche et les deux premiers du membre de droite passent à la limite pour $\varepsilon \to 0$ grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Majorons $|A_3^\varepsilon|$ (ces calculs s'inspirent de ceux de [18]), soit R_h^ε fonction paire telle que $R_h^\varepsilon(0) = 0$ et $(R_h^\varepsilon)'(x) = 1 - (T_h^\varepsilon)'(x)$ pour $x > 0$ ($R_h^\varepsilon \in C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$) et choisissons $\varphi = (R_h^\varepsilon)'(u_n)$ dans (8.4) alors

$$\int_\Omega R_h^\varepsilon(u_n)(T) - \int_\Omega R_h^\varepsilon(u_0^n) + \int_0^T\!\!\int_\Omega (R_h^\varepsilon)''(u_n)\, a(t,x,\nabla u_n)\nabla u_n = \int_0^T\!\!\int_\Omega f_n\,(R_h^\varepsilon)'(u_n)$$

or $R_h^\varepsilon(x) \geq 0$ donc

$$\int_0^T\!\!\int_\Omega (R_h^\varepsilon)''(u_n)\, a(t,x,\nabla u_n)\nabla u_n \leq \int_0^T\!\!\int_\Omega |f_n| \mathbf{1}_{\{|u_n| \geq h-\varepsilon\}} + \int_\Omega R_h^\varepsilon(u_0^n)$$

et $\int_\Omega R_h^\varepsilon(u_0^n) \leq \int_\Omega |u_0^n| \mathbf{1}_{\{|u_0^n| \geq h-\varepsilon\}}$ et $|(T_h^\varepsilon)''(x)| = (R_h^\varepsilon)''(x)$ donc

$$\begin{aligned}\int_0^T\!\!\int_\Omega |(T_h^\varepsilon)''(u_n)|\ a(t,x,\nabla u_n)\nabla u_n &= \int_0^T\!\!\int_\Omega (R_h^\varepsilon)''(u_n)\, a(t,x,\nabla u_n)\nabla u_n \\ &\leq \int_0^T\!\!\int_\Omega |f_n| \mathbf{1}_{\{|u_n| \geq h-\varepsilon\}} + \int_\Omega |u_0^n| \mathbf{1}_{\{|u_0^n| \geq h-\varepsilon\}}.\end{aligned}$$

Donc

$$|A_3^\varepsilon| \leq k \left(\int_0^T\!\!\int_\Omega |f_n| \mathbf{1}_{\{|u_n| \geq h-\varepsilon\}} + \int_\Omega |u_0^n| \mathbf{1}_{\{|u_0^n| \geq h-\varepsilon\}} \right)$$

qui converge vers $k(\int_0^T\!\int_\Omega |f_n| \mathbf{1}_{\{|u_n| \geq h\}} + \int_\Omega |u_0^n| \mathbf{1}_{\{|u_0^n| \geq h\}})$ lorsque $\varepsilon \to 0$, par convergence dominée.

Il reste à observer, pour A_4^ε, que

$$\begin{aligned}(T_h)'(u_n) a(t,x,\nabla u_n) &= \mathbf{1}_{\{|u_n| \leq h\}} a(t,x,\nabla u_n) \\ &= a(t,x,\nabla u_n \mathbf{1}_{\{|u_n| \leq h\}}) = a(t,x,\nabla T_h(u_n))\end{aligned}$$

car la coercitivité de a entraîne $a(t,x,0) = 0$, pour obtenir

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Theta_k(v - T_h(u_n))(T) - \int_\Omega \Theta_k(u_0 - T_h(u_0^n)) \\ &+ \int_0^T\!\!\int_\Omega [a(t,x,\nabla v) - a(t,x,\nabla T_h(u_n))] \nabla T_k(v - T_h(u_n)) \\ &\leq \int_0^T\!\!\int_\Omega (f - f_n\,(T_h)'(u_n)) T_k(v - T_h(u_n)) + k \left(\int_0^T\!\!\int_\Omega |f_n| \mathbf{1}_{\{|u_n| \geq h\}} + \int_\Omega |u_0^n| \mathbf{1}_{\{|u_0^n| \geq h\}} \right)\end{aligned}$$

Faisons maintenant tendre $n \to \infty$, nous avons

$$\begin{aligned}&[a(t,x,\nabla v) - a(t,x,\nabla T_h(u_n))] \nabla T_k(v - T_h(u_n)) \\ &\qquad = [a(t,x,\nabla v) - a(t,x,\nabla T_h(u_n))] \nabla (v - T_h(u_n)) \mathbf{1}_{\{|v - T_h(u_n)| \leq k\}} \geq 0\end{aligned}$$

et nous avons montré que $\nabla u_n \to \nabla u$ presque partout donc $\nabla T_h(u_n) \to \nabla T_h(u)$ presque partout donc grâce au lemme de Fatou nous avons

$$\int_0^T\int_\Omega [a(t,x,\nabla v) - a(t,x,\nabla T_h(u))]\nabla T_k(v - T_h(u)) \\ \leq \underline{\lim} \int_0^T\int_\Omega [a(t,x,\nabla v) - a(t,x,\nabla T_h(u_n))]\nabla T_k(v - T_h(u_n))$$

et les autres termes convergent (à une sous-suite près, pour avoir la domination de (f_n) et (u_0^n) (voir chapitre 2)) grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue quand $n \to \infty$ donc

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \Theta_k(v - T_h(u))(T) - \int_\Omega \Theta_k(u_0 - T_h(u_0)) \\ &+ \int_0^T\int_\Omega [a(t,x,\nabla v) - a(t,x,\nabla T_h(u))]\nabla T_k(v - T_h(u)) \\ &\leq \int_0^T\int_\Omega f(1 - (T_h)'(u))T_k(v - T_h(u)) + k\left(\int_0^T\int_\Omega |f|\mathbf{1}_{\{|u|\geq h\}} + \int_\Omega |u_0|\mathbf{1}_{\{|u_0|\geq h\}}\right) \end{aligned}$$

Enfin faisons $h \to \infty$, nous avons $v(T)$ et $u(T) \in L^1(\Omega)$ et $u_0 \in L^1(\Omega)$ or $|\Theta_k(v - T_h(u))(T)| \leq k(|v(T)| + |u(T)|)$ et $|\Theta_k(u_0 - T_h(u_0))| \leq k|u_0|$ donc par convergence dominée $\int_\Omega \Theta_k(u_0 - T_h(u_0)) \to 0$ et $\int_\Omega \Theta_k(v - T_h(u))(T) \to \int_\Omega \Theta_k(v - u)(T)$ et

$$\left(\int_0^T\int_\Omega |f|\mathbf{1}_{\{|u|\geq h\}} + \int_\Omega |u_0|\mathbf{1}_{\{|u_0|\geq h\}}\right) \to 0$$

et $1 - T_h'(u) \to 0$ presque partout donc par convergence dominée

$$\int_0^T\int_\Omega f(1 - (T_h)'(u))T_k(v - T_h(u)) \to 0$$

donc

$$\int_\Omega \Theta_k(v - u)(T) + \int_0^T\int_\Omega [a(t,x,\nabla v) - a(t,x,\nabla v)]\nabla T_k(v - u) \leq 0$$

et $\Theta_k(x) \geq 0$ donc, par coercitivité de a, $T_k(u - v) = 0$ presque partout pour tout k et donc $u = v$ presque partout, ce qui achève la démonstration.

Part IV

Seconds membres mesure : propriétés

9. Etude des singularités de la solution d'une équation à second membre mesure

Pour $\Omega = B_1(\mathbf{R}^N)$, la boule unité de $\mathbf{R}^N$, il s'agit de comparer, en 0, les solutions de

$$\begin{aligned} -\Delta w &= \delta \\ -\Delta v &= f \in L^1(\Omega) \end{aligned} \tag{9.1}$$

vérifiant des conditions de Dirichlet homogène sur $\partial\Omega$. On pourrait supposer qu'en 0, w l'emporte sur v (i.e. qu'elle explose plus au sens $w - v \to +\infty$ pour $x \to 0$), il n'en est rien comme le montre l'exemple suivant qui vérifie

Propriétés : Soit $\Omega = B_1(\mathbf{R}^N)$, la boule unité de $\mathbf{R}^N$, soient w et v solutions de (9.1) alors

$$w - v \not\to +\infty \quad \text{en } 0, \qquad T_k(w - v) \text{ non continu en } 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_\Omega (w - v) = +\infty, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_\Omega T_k(w - v) = k,$$

où $B_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^N ; |x| < \varepsilon\}$.

9.1 Construction de w et v

La solution w, radiale, est bien connue : pour $N > 2$, on a $w = C_N(1/r^{N-2} - 1)$ où $r = |x|$, et C_N est une constante.

Pour construire v, nous allons utiliser u une solution de $-\Delta u = g$ avec $g \in L^1(\Omega)$, qui vaut ∞ en 0. Nous reprenons la solution d'Orsina [40] : considérons u radiale telle que $u(1) = 0$ et

$$u'(r) = \frac{-1}{r^{N-1}(-\ln(r/e))^{\theta-1}}$$

avec $1 < \theta < 2 - 1/N$. Pour une fonction radiale, le laplacien devient

$$-\left(u'' + (N-1)\frac{u'}{r}\right) = g$$

d'où

$$g = \frac{(\theta - 1)e}{r^N(-\ln(r/e))^\theta}$$

donc g est positif et (avec $D_N = |B_1|$)

$$\int_\Omega g = \frac{D_N}{\theta - 1} < \infty$$

d'où $g \in L^1(\Omega)$.

Soit φ_n radiale régulière telle que $\varphi_n(r) = 1$ pour $r \leq 1/4n^2$ et 0 pour $r \geq 1/3n^2$. Alors $u\,\varphi_n$ est solution de

$$-\Delta(u\,\varphi_n) = g\,\varphi_n - 2\nabla u \cdot \nabla\varphi_n - u\,\Delta\varphi_n$$

et comme $g \in L^1(\Omega)$, $u \in L^1(\Omega)$, $\nabla u \in L^1(\Omega)$, $\varphi_n \in L^\infty(\Omega)$, $\nabla\varphi_n \in L^\infty(\Omega)$ et $\Delta\varphi_n \in L^\infty(\Omega)$, on a

$$g_n = g\,\varphi_n - 2\nabla u \cdot \nabla\varphi_n - u\Delta\varphi_n \in L^1(\Omega)$$

et $u\,\varphi_n(0) = u(0) = \infty$. Soient $u_n = u\,\varphi_n / \max(1, \|g_n\|_1)$ et $f_n = g_n / \max(1, \|g_n\|_1)$, donc u_n est solution de

$$-\Delta u_n = f_n,$$

le support de u_n est inclus dans la boule de rayon $1/3n^2$ et $\|f_n\| \leq 1$.

Soient $x_n = (1/n, 0, \ldots, 0)$ et $y_n = (1/n - 1/3n^2, 0, \ldots, 0)$, ainsi $y_{n+1} < x_{n+1} < y_n < x_n$. Posons maintenant $v_n(x) = u_n(x - x_n)/n^2$ (alors $v_n(y_n) = 0$ compte-tenu du support de u_n), et $v = \sum_{n\geq 1} v_n$ donc v vérifie

$$-\Delta v = f = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} f_n(. - x_n)$$

et comme $\|f_n(. - x_n)\|_1 = \|f_n\|_1 \leq 1$,

$$\|f\|_1 \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty$$

donc $f \in L^1(\Omega)$. De plus les supports des v_n sont disjoints donc $v(x_n) = \infty$, et $v(y_n) = 0$, ainsi v n'est pas continue en 0 (puisque x_n et $y_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$).

9.2 Propriétés de $w - v$

Considérons maintenant $w - v$ qui est solution de

$$-\Delta(w - v) = \delta - f$$

et qui vérifie $(w-v)(x_n) = C_N/{x_n}^{N-2} - \infty = -\infty$ et $(w-v)(y_n) = C_N/(y_n)^{N-2} - 0 = C_N\, n^{N-2}/(1 - 1/3n)^{N-2} \geq C_N\, n^{N-2}$ ainsi

$$(w - v)(x_n) = -\infty, \qquad (w - v)(y_n) \geq C_N\, n^{N-2}$$

donc $w-v$ n'a pas de valeur en 0 et $T_k(w-v)(x_n) = -k$ alors que $T_k(w-v)(y_n) = T_k(n^{N-2}/(1-1/3n)^{N-2}) = k$ pour n assez grand, soit

$$T_k(w-v)(x_n) = -k, \qquad T_k(w-v)(y_n) = k$$

pour n assez grand, donc $T_k(w-v)$ n'est pas continu en 0.

On vient de voir que $w-v$ n'est pas continu en 0, cependant

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{|B_\varepsilon|}\int_{B_\varepsilon}(w-v) = +\infty$$

En effet

$$\frac{1}{|B_\varepsilon|}\int_{B_\varepsilon}(w-v) = \frac{1}{|B_\varepsilon|}\int_{B_\varepsilon} w - \frac{1}{|B_\varepsilon|}\int_{B_\varepsilon} v$$

et d'une part (si $D_N = |B_1|$)

$$\frac{1}{B_\varepsilon}\int_{B_\varepsilon} w = C_N \frac{1}{|B_\varepsilon|}\int_{B_\varepsilon}(\frac{1}{r^{N-2}}-1)dx = C_N\left(\frac{1}{\varepsilon_N}\int_0^\varepsilon r\,dr - 1\right) = C_N\left(\frac{1}{2\varepsilon^{N-2}}-1\right)$$

et d'autre part

$$\int_{B_\varepsilon} v = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\int_{B_\varepsilon} v_n = \sum_{n\geq 1/\varepsilon}\frac{1}{n^2}\int_{B_\varepsilon} v_n$$

or u est positif donc u_n et v_n aussi et $0 \leq \varphi_n \leq 1$ donc

$$\int_{B_\varepsilon} v_n \leq \int_{B_\varepsilon} u_n = \frac{1}{\max(1, \|g_n\|_1)}\int_{B_\varepsilon} u\,\varphi_n \leq \int_{B_\varepsilon} u$$

donc

$$\frac{1}{|B_\varepsilon|}\int_{B_\varepsilon} v \leq \left(\frac{1}{|B_\varepsilon|}\int_{B_\varepsilon} u\right)\left(\sum_{n\geq 1/\varepsilon}\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme $u(r) = \int_1^r u' + u(1) = \int_1^r u'$ (car $u(1) = 0$) et $(-\ln(r/e)) \geq 1$ pour $r \leq 1$ donc

$$u(r) = \int_1^r u' \leq \int_1^r \frac{-1}{r^{N-1}}\,dr = \frac{1}{N-2}\left(\frac{1}{r^{N-2}}-1\right)$$

ainsi

$$u \leq \frac{1}{(N-2)C_N} w$$

donc

$$\frac{1}{|B_\varepsilon|}\int_{B_\varepsilon} u \leq \frac{1}{N-2}\left(\frac{1}{2\varepsilon^{N-2}}-1\right)$$

si bien que

$$\frac{1}{|B_\varepsilon|}\int_{B_\varepsilon} v \leq \frac{1}{N-2}\left(\frac{1}{2\varepsilon^{N-2}}-1\right)\left(\sum_{n\geq 1/\varepsilon}\frac{1}{n^2}\right) \leq \frac{\varepsilon}{N-2}\left(\frac{1}{2\varepsilon^{N-2}}-1\right)$$

car le reste de la série est inférieur à ε. D'où

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon} (w-v) = \infty.$$

Montrons maintenant que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon} T_k(w-v) = k.$$

Comme $w-v$ ne peut être négative que dans le support de v qui est la réunion des translatés des $B_{1/3n^2}$ (c'est-à-dire le support des v_n) et qu'en dehors, $w-v \geq k$ si ε est assez petit, on a

$$\int_{B_\varepsilon} T_k(w-v) \geq \int_{B_\varepsilon - \bigcup_{n\geq 1/\varepsilon}(B_{1/3n^2}+x_n)} k + \int_{\bigcup_{n\geq 1/\varepsilon}(B_{1/3n^2}+x_n)} -k$$

(où $B_{1/3n^2}+x_n$ désigne le translaté de $B_{1/3n^2}$ par x_n), soit

$$\begin{aligned}\int_{B_\varepsilon} T_k(w-v) &\geq \int_{B_\varepsilon} k - 2\int_{\bigcup_{n\geq 1/\varepsilon}(B_{1/3n^2}+x_n)} k \\ &\geq k\left(|B_\varepsilon| - 2\sum_{n\geq 1/\varepsilon} |B_{1/3n^2}|\right)\end{aligned}$$

or $|B_\varepsilon| = D_N \varepsilon^N$ (si $D_N = |B_1|$) et

$$\sum_{n\geq 1/\varepsilon} |B_{1/3n^2}| = D_N \sum_{n\geq 1/\varepsilon} \left(\frac{1}{3n^2}\right)^N \leq \frac{D_N}{3^N} \frac{\varepsilon^{2N-1}}{(2N-1)}$$

donc

$$\int_{B_\varepsilon} T_k(w-v) \geq k\, D_N(\varepsilon^N - C\varepsilon^{2N-1}) \geq k\, D_N\, \varepsilon^N(1 - C\varepsilon^{N-1})$$

d'où

$$\frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon} T_k(w-v) \geq k(1 - C\varepsilon^{N-1})$$

et $T_k(w-v) \leq k$ donc

$$\frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon} T_k(w-v) \leq k$$

et finalement

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon} T_k(w-v) = k.$$

Ce qui achève la démonstration des propriétés de $w-v$.

10. Espaces de Lorentz

Les espaces de Lebesgue ou de Sobolev sont insuffisants pour distinguer les solutions des équations elliptiques à second membre L^1 et mesure : en effet, il existe u et v solutions de

$$-\Delta u = \delta \tag{10.1}$$

$$-\Delta v = f \in L^1 \tag{10.2}$$

dans Ω la boule unité de $\mathbf{R}^N$, satisfaisant des conditions homogènes de Dirichlet sur $\partial\Omega$, et telles que u et $v \in \bigcap_{q<\frac{N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$, mais u et $v \notin W_0^{1,N/(N-1)}(\Omega)$. La solution u est la fonction (bien connue) de Green, et la fonction v est due à Orsina [40]. Ces deux fonctions appartiennent aussi à un même espace de Macinkiewicz.

Comme ces espaces ne permettent pas de distinguer ces deux fonctions, il pourrait être intéressant de considérer une famille plus fine d'espaces et en particulier les espaces de Lorentz. Nous allons montrer que u et v n'appartiennent pas aux mêmes espaces, mais que l'on peut construire w solution de

$$-\Delta w = g \in L^1 \tag{10.3}$$

appartenant aux mêmes espaces que u. Les espaces de Lorentz sont donc, eux aussi, insuffisants.

10.1 Espaces de Lorentz

Nous utilisons la définition de Ziemer [50] des espaces de Lorentz, pour définir f^* nous reprenons aussi la présentation de Kavian [31].

Soit f une fonction mesurable positive, il existe f^* positive, radiale et décroissante (définie sur $\mathbf{R}^+$) telle que

$$\mathrm{mes}_N\{f > t\} = \mathrm{mes}_1\{f^* > t\}$$

où d'une part, $\mathrm{mes}_N\{f > t\} = \mathrm{mes}_N\{x; f(x) > t\}$ et mes_N désigne la mesure de Lebesgue dans Ω, et d'autre part, $\mathrm{mes}_1\{f^* > t\} = \mathrm{mes}_1\{s; f^*(s) > t\}$ et mes_1 est la mesure de Lebesgue sur $]0, |\Omega|[$. On prolonge f^* par 0 en dehors de $]0, |\Omega|[$. Cette fonction est appelée *rearrangement décroissant* de f. On peut choisir

$$f^*(t) = \inf\{s > 0, \mathrm{mes}_N\{f > s\} \leq t\}$$

c'est-à-dire que si $\mathrm{mes}\{f>s\}$ est bijective, $f^*(s) = (\mathrm{mes}_N\{f>s\})^{-1}$. Grâce au théorème de Fubini,

$$\int_\Omega f^p\,dx = \int_\Omega\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{f^p>t\}}\,dt\,dx = \int_0^\infty\int_\Omega \mathbf{1}_{\{f>t^{1/p}\}}\,dx\,dt = \int_0^\infty \mathrm{mes}_N\{f>t^{1/p}\}\,dt$$

et de même

$$\int_0^\infty (f^*)^p\,dt = \int_0^\infty \mathrm{mes}_1\{f^*>t^{1/p}\}\,dt,$$

et comme $\mathrm{mes}_N\{f>t\} = \mathrm{mes}_1\{f^*>t\}$ on a finalement

$$\int_\Omega f^p\,dx = \int_0^\infty (f^*)^p\,dt.$$

Soit maintenant $f \in L^p(\Omega)$, définissons alors $|f|^*$ à partir de $|f|$ (avec, ici encore, $|f|^*(t) = 0$ pour $t>|\Omega|$), on a

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p\,dx\right)^{1/p} = \left(\int_0^\infty (|f|^*)^p\,dt\right)^{1/p} = \left(\int_0^\infty (t^{1/p}|f|^*(t))^p\,\frac{dt}{t}\right)^{1/p}$$

d'où l'idée de définir l'espace des fonctions telles que

$$\left(\int_0^\infty (t^{1/p}|f|^*(t))^q\,\frac{dt}{t}\right)^{1/q} < +\infty,$$

(voir Ziemer [50]).

Définition : *Pour $1<p<+\infty$ et $1 \le q \le +\infty$, on appelle espace de Lorentz $L^{p,q}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions mesurables f telles que $\|f\|_{p,q}<+\infty$ où*

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,q} &= \left(\int_0^\infty (t^{1/p}|f|^*(t))^q\,\frac{dt}{t}\right)^{1/q} && 1<p<+\infty,\ 1\le q<+\infty,\\ \|f\|_{p,q} &= \sup_{t>0} t^{1/p}|f|^*(t) && 1<p<+\infty,\ q=+\infty. \end{aligned}$$

En particulier, et selon le calcul précédent, pour $1<p<+\infty$ on a $L^{p,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$. Rappelons maintenant la définition des espaces de Marcinkiewicz (voir [5])

Définition : *Pour $1<p<+\infty$, on appelle espace de Marcinkiewicz $M^p(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f mesurables telles que*

$$\mathrm{mes}_N\{|f|>t\} \le \frac{M}{t^p}.$$

On a $M^p(\Omega) = L^{p,\infty}(\Omega)$. En effet notons $\varphi_f(t) = \mathrm{mes}_N\{|f|>t\}$, alors $\varphi_f(|f|^*(t)) \le t$ et $|f|^*(\varphi_f(t)) \le t$ pour $t \ge 0$. On déduit donc aisément que si $|f|^*(t) \le Ct^{-1/p}$ alors $\varphi_f(s) \le C^p/s^p$ donc $L^{p,\infty}(\Omega) \subset M^p(\Omega)$, et si $\varphi_f(s) \le C/s^p$ alors $|f|^*(t) \le C^{1/p}t^{-1/p}$ donc $M^p(\Omega) \subset L^{p,\infty}(\Omega)$.

10.2 Quelques fonctions

Par la suite C désignera une constante quelconque (donc, en particulier, un nombre indépendant de p et q) dont la valeur pourra varier d'une ligne à l'autre.

Soit v radiale strictement décroissante positive et continue (donc bijective), alors

$$\mathrm{mes}_N\{v > t\} = \mathrm{mes}_N\{r < v^{-1}(t)\} = D_N(v^{-1}(t))^N$$

(où D_N est la mesure de la boule unité de $\mathbf{R}^N$) donc

$$v^*(t) = \inf\{s > 0, D_N(v^{-1}(s))^N \leq t\} = v((t/D_N)^{1/N}).$$

Commençons par considérer la fonction de Green solution de l'équation (10.1)

$$u = C_N\left(\frac{1}{r^{N-2}} - 1\right)$$

on peut vérifier aisément que $\nabla u \in L^q(\Omega)$ pour tout $q < N/(N-1)$ mais que $\nabla u \notin L^{N/N-1}(\Omega)$. Déterminons à quel espace de Lorentz appartient ∇u. On a $|\nabla u|(r) = (N-2)C_N/r^{N-1}$ donc pour $t \leq |\Omega|$

$$|\nabla u|^*(t) = |\nabla u|((t/D_N)^{1/N}) = \frac{C}{t^{\frac{N-1}{N}}}$$

donc

$$\int_0^\infty (t^{1/p}|\nabla u|^*(t))^q \,\frac{dt}{t} = \int_0^{|\Omega|}\left(t^{\frac{1}{p}}\frac{C}{t^{\frac{N-1}{N}}}\right)^q \frac{dt}{t} = C\int_0^{|\Omega|} t^{\frac{q}{p}-\frac{q(N-1)}{N}-1}dt$$

qui est fini si et seulement si $q/p - q(N-1)/N - 1 > -1$ et donc si $p < N/(N-1)$ et q quelconque. De plus $t^{1/p}|\nabla u|^*(t) = Ct^{1/p-(N-1)/N}$ qui est borné au voisinage de 0 pour $p \leq N/(N-1)$. Ainsi

$$|\nabla u| \in L^{p,q}(\Omega), \quad 1 < p < \frac{N}{N-1}, \quad 1 < q < +\infty,$$

$$|\nabla u| \in L^{p,\infty}(\Omega), \quad 1 < p \leq \frac{N}{N-1},$$

mais

$$|\nabla u| \notin L^{\frac{N}{N-1},q}(\Omega), \quad 1 < q < +\infty.$$

Étudions maintenant la solution de (10.2) qui s'écrit, pour v radiale,

$$-\left(v'' + (N-1)\frac{v'}{r}\right) = f,$$

avec $f = (\theta-1)/r^N(1-\ln r)^\theta$ et $1 < \theta < 2 - 1/N$. On a $f \in L^1(\Omega)$ et

$$v'(r) = \frac{1}{r^{N-1}(1-\ln r)^{\theta-1}}$$

(voir Orsina [40]) donc

$$|\nabla v|^*(t) = \frac{C}{t^{\frac{N-1}{N}}(1 - \frac{1}{N}\ln(\frac{t}{D_N}))^{\theta-1}}$$

donc d'après des calculs analogues aux précédents, on a, pour $1 < p < N/(N-1)$ et $1 < q < \infty$,

$$\int_0^{|\Omega|} (t^{1/p}|\nabla v|^*(t))^q \frac{dt}{t} < +\infty,$$

et $\int_0^{|\Omega|}(t^{1/p}|\nabla v|^*(t))^q/t\,dt = +\infty$ si $p > N/(N-1)$. Mais pour $p = N/(N-1)$,

$$\int_0^{|\Omega|} (t^{1/p}|\nabla v|^*(t))^q \frac{dt}{t} = \int_0^{|\Omega|} \frac{C\,dt}{t(1 - \frac{1}{N}\ln(\frac{t}{D_N}))^{q(\theta-1)}} < +\infty$$

si $q(\theta-1) > 1$, or $\theta - 1 < (N-1)/N$ donc l'intégrale est finie pour $N/(N-1) < 1/(\theta-1) < q < +\infty$ et $p = N/(N-1)$. Enfin $t^{1/p}|\nabla v|^*(t) = Ct^{1/p-(N-1)/N}/(1 - \ln(t/D_N)/N)^{q(\theta-1)}$ qui est borné au voisinage de 0 pour $p \leq N/(N-1)$, donc $\nabla v \in L^{p,\infty}(\Omega)$. Ainsi v vérifie, comme u

$$|\nabla v| \in L^{p,q}(\Omega), \quad 1 < p < \frac{N}{N-1}, \quad 1 < q < +\infty,$$

$$|\nabla v| \in L^{p,\infty}(\Omega), \quad 1 < p \leq \frac{N}{N-1}.$$

Mais on a, de plus,

$$|\nabla v| \in L^{\frac{N}{N-1},q}(\Omega), \quad \frac{N}{N-1} < \frac{1}{(\theta-1)} < q < +\infty.$$

Les espaces de Lorentz permettent donc de distinguer u et v.

Nous allons construire w solution de (10.3) mais appartenant aux mêmes espaces que u. Soit

$$g = \frac{1+\alpha}{r^N(2 - \ln r)(\ln(2 - \ln r))^{2+\alpha}}$$

on a $g \in L^1(\Omega)$ dès que $\alpha > 0$ et (10.3) devient pour une fonction radiale

$$-\left(w'' + (N-1)\frac{w'}{r}\right) = g$$

d'où

$$w'(r) = \frac{1}{r^{N-1}(\ln(2 - \ln r))^{1+\alpha}}$$

donc

$$|\nabla w|^*(t) = \frac{C}{t^{\frac{N-1}{N}}[\ln(2 - \frac{1}{N}\ln(\frac{t}{D_N}))]^{1+\alpha}}$$

alors

$$\int_0^{|\Omega|} (t^{\frac{1}{p}} |\nabla w|^*(t))^q \, \frac{dt}{t} = C \int_0^{|\Omega|} \frac{t^{\frac{q}{p} - \frac{q(N-1)}{N} - 1}}{[\ln(2 - \frac{1}{N}\ln(\frac{t}{D_N}))]^{q(1+\alpha)}} dt$$

qui est fini pour $p < N/(N-1)$ (comme précédemment). Pour $p = N/(N-1)$, si l'on pose $s = \ln(t/D_N)$

$$\int_0^{|\Omega|} \frac{dt}{t[\ln(2 - \frac{1}{N}\ln(\frac{t}{D_N}))]^{q(1+\alpha)}} = \int_{-\infty}^0 \frac{C}{(\ln(2 - \frac{s}{N}))^{q(1+\alpha)}} ds = +\infty$$

pour tout $q < +\infty$. Enfin $t^{1/p}|\nabla w|^*(t) = t^{1/p-(N-1)/N}/[\ln(2 - \frac{1}{N}\ln(t/D_N))]^{1+\alpha}$ qui est fini au voisinage de 0 pour $p \leq N/(N-1)$. Ainsi

$$|\nabla w| \in L^{p,q}(\Omega), \quad 1 < p < \frac{N}{N-1}, \quad 1 < q < +\infty,$$

$$|\nabla w| \in L^{p,\infty}(\Omega), \quad 1 < p \leq \frac{N}{N-1},$$

mais

$$|\nabla w| \notin L^{\frac{N}{N-1},q}(\Omega), \quad 1 < q < +\infty.$$

Donc u et w appartient aux même espaces de Lorentz, qui sont donc insuffisants pour distinguer les solutions à second membre L^1 et δ.

11. Classes de fonctions test pour problèmes elliptiques à second membre mesure

Afin d'obtenir l'unicité des solutions de problèmes elliptiques à second membre $f \in L^1(\Omega)$, les solutions *entropiques* et *renormalisées* ont été introduites. Lorsque f est une mesure, nous montrons qu'il n'y a plus unicité de ces solutions.

11.1 Trois définitions

Pour Ω ouvert borné régulier de $\mathbf{R}^N$ avec $N \geq 2$, on considère le problème elliptique

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) &= f \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{11.1}$$

avec f dans $L^1(\Omega)$ où Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$ et a définit un opérateur elliptique strictement monotone de Leray-Lions [33] agissant de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ pour $2 - 1/N < p \leq N$.

Boccardo et Gallouët [11] ont montré, dans le cas plus général où $f \in M(\overline{\Omega}) = (C(\overline{\Omega}))'$, espace de mesures, et $p > 2 - 1/N$, qu'il existait une solution au sens des distributions $u \in \bigcap_{q < \frac{(p-1)N}{N-1}} W_0^{1,q}(\Omega)$. Cependant cette formulation n'assure pas l'unicité pour $N > 2$: il suffit de considérer le contre-exemple (voir [43] et chapitre 6) adapté à partir de celui de Serrin [46]. Afin de remédier à la non-unicité, des formulations *entropiques* et *remormalisées* ont été proposées (voir [4] pour la première, et [36, 39] pour la seconde).

Nous allons montrer ici, que les solutions entropiques et renormalisées vérifient des formulations qui sont des cas particuliers d'une formulation plus générale, plus abstraite, mais de toute façon inopérante pour les second membres mesures.

Considérons d'abord la formulation entropique due à Bénilan, Boccardo, Gallouët, Gariepy, Pierre et Vazquez [4] :

Définition : *On appelle solution* entropique *de* (11.1)*,* $u \in L^1(\Omega)$ *telle que* $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *pour tout* $k > 0$ *et*

$$\forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \qquad \int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla T_k(u-\varphi) \leq \int_\Omega f\, T_k(u-\varphi). \tag{11.2}$$

La formulation renormalisée a été définie par Lions et Murat [36, 39] :

Définition : *On appelle solution* renormalisée *de* (11.1), $u \in L^1(\Omega)$ *telle que,* $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *pour tout* $k>0$ *et*

$$\forall k>0 \quad \lim_{h\to+\infty} \int_{h\leq|u|\leq k+h} |\nabla u|^p = 0$$

et

$\forall \varphi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega S(u)\, a(x,\nabla u)\nabla\varphi + \int_\Omega S'(u)\varphi\, a(x,\nabla u)\nabla u = \int_\Omega f\, S(u)\varphi \tag{11.3}$$

pour toute fonction S *régulière à variable réelle et à support compact.*

$T_k(u-\varphi)$ et $S(u)\varphi$ sont des éléments particuliers d'une classe de fonctions test plus générale, qui conduit à la formulation suivante :

Définition : *On appelle* solution w *de* (11.1)*,* u *telle que*

$$\int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla w = \int_\Omega f\, w$$

pour tout $w \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *tel que* $\nabla w = 0$ *sur* $\{x; |u(x)| \geq m\}$ *pour un* $m \geq 0$.

Comme on peut choisir $w = T_k(u-\varphi)$ ci-dessus, cette dernière formulation conduit aussi à l'unicité. L'équivalence de ces formulations dit, en quelque sorte, que $T_k(u-\varphi)$ et $S(u)\varphi$ sont « denses » dans les w.

11.2 Équivalence

11.2.1 Solutions entropiques et solutions w

Montrons (d'après [38]) que les solutions entropiques sont solutions w. Soit $w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tel qu'il existe m tel que $\nabla w = 0$ sur $\{x; |u(x)| \geq m\}$. Alors soit $\varphi = T_n(u) - w$, on a bien $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ que l'on peut utiliser dans (11.2), ce qui donne

$$\int_\Omega a(x,\nabla u)\nabla T_k(u - T_n(u) + w) \leq \int_\Omega f\, T_k(u - T_n(u) + w)$$

et donc

$$\int_{|u-T_n(u)+w|\leq k} a(x,\nabla u)\nabla(u-T_n(u)) + \int_{|u-T_n(u)+w|\leq k} a(x,\nabla u)\nabla w \leq \int_\Omega f\, T_k(u-T_n(u)+w)$$

Nous allons maintenant faire tendre n vers $+\infty$.

Comme $u - T_n(u) \to 0$ presque partout et $|T_k(u - T_n(u) + w)| \leq k$ alors grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\int_\Omega f\, T_k(u - T_n(u) + w) \to \int_\Omega f\, T_k(w)$$

Le second terme vérifie

$$\int_{|u-T_n(u)+w|\le k} a(x,\nabla u)\nabla w = \int_{|u-T_n(u)+w|\le k} a(x,\nabla T_m(u))\nabla w$$

car $a(x,0)=0$ et $\nabla w = 0$ pour $|u|\ge m$, et $u-T_n(u)\to 0$ donc par convergence dominée

$$\int_{|u-T_n(u)+w|\le k} a(x,\nabla T_m(u))\nabla w \to \int_{|w|\le k} a(x,\nabla T_m(u))\nabla w = \int_\Omega a(x,\nabla T_m(u))\nabla T_k(w)$$

et si $k\ge \|w\|_\infty$ on a donc

$$\int_{|u-T_n(u)+w|\le k} a(x,\nabla u)\nabla w \to \int_\Omega a(x,\nabla T_m(u))\nabla w$$

Reste donc le premier terme $\int_{|u-T_n(u)+w|\le k} a(x,\nabla u)\nabla(u-T_n(u))$ mais si $|u|\le n$ alors $u-T_n(u)=0$, et si $|u|\ge n$ alors $\nabla T_n(u)=0$ donc

$$\int_{|u-T_n(u)+w|\le k} a(x,\nabla u)\nabla(u-T_n(u)) = \int_{|u-T_n(u)+w|\le k} a(x,\nabla u)\nabla u\,\mathbf{1}_{|u|\ge n}$$

et $|u-T_n(u)+w|\le k$ implique $|u|\le n+k+\|w\|_\infty$ donc

$$\int_{|u-T_n(u)+w|\le k} a(x,\nabla u)\nabla(u-T_n(u)) \le \int_{|u|\le n+k+\|w\|_\infty} a(x,\nabla u)\nabla u \mathbf{1}_{|u|\ge n}$$

et $0\le a(x,\nabla u)\nabla u\le C|\nabla u|^p$ donc

$$\int_{|u-T_n(u)+w|\le k} a(x,\nabla u)\nabla(u-T_n(u)) \le C\int_{n\le|u|\le n+k+\|w\|_\infty} |\nabla u|^p$$

or par coercitivité et grâce à (11.2) avec $\varphi = T_n(u)$ et $k=n+k+\|w\|_\infty$

$$\int_{n\le|u|\le n+k+\|w\|_\infty} |\nabla u|^p \le \frac{C}{\alpha}\int_{n\le|u|\le n+k+\|w\|_\infty} |f| \le \frac{C}{\alpha}\int_{n\le|u|} |f|$$

et $\int_{n\le|u|}|f|\to 0$ pour $n\to\infty$ donc finalement

$$\int_{|u-T_n(u)+w|\le k} a(x,\nabla u)\nabla(u-T_n(u)) \to 0$$

donc

$$\int_\Omega a(x,\nabla T_m(u))\nabla w \le \int_\Omega f\,T_k(w) \tag{11.4}$$

Bien entendu le choix de $w=T_k(u-\varphi)$ dans (11.4) conduit à (11.2) donc l'unicité des solutions entropiques nous donne celles des solutions de (11.4).

11.2.2 Solutions renormalisées et solutions w

Nous allons maintenant montrer que les solutions renormalisées sont solutions de (11.4) (voir [39, 16] avec des modifications mineures).

Choisissons $\varphi = w$ et $S = S_n$ dans (11.3), avec S_n régulière telle que $0 \le S_n \le 1$, $S(x) = 0$ si $|x| \ge n+1$, $S(x) = 1$ si $|x| \le n$, et radiale linéaire par morceaux. Alors

$$\int_\Omega S_n(u) a(x, \nabla u)\nabla w + \int_\Omega {S_n}'(u) w\, a(x, \nabla u)\nabla u \le \int_\Omega f\, S_n(u) w$$

Faisons tendre n vers ∞. Comme $S_n(x) \to 1$ presque partout et $|f\, S_n(u) w| \le |f\, w|$ par convergence dominée

$$\int_\Omega f\, S_n(u)\, w \to \int_\Omega f\, w$$

Le premier terme s'écrit

$$\int_\Omega S_n(u) a(x, \nabla u)\nabla w = \int_\Omega S_n(u) a(x, \nabla T_m(u))\nabla w$$

puisque $\nabla w = 0$ pour $|x| \ge m$ et $a(x, 0) = 0$ par coercitivité, donc par convergence dominée $(a(x, \nabla T_m(u))\nabla w \in L^1(\Omega))$

$$\int_\Omega S_n(u) a(x, \nabla T_m(u))\nabla w \to \int_\Omega a(x, \nabla T_m(u))\nabla w = \int_\Omega a(x, \nabla u)\nabla w$$

Reste le second terme

$$\int_\Omega {S_n}'(u) w\, a(x, \nabla u)\nabla u = \int_{n \le |u| \le n+1} w\, a(x, \nabla u)\nabla u$$

et

$$\left| \int_{n \le |u| \le n+1} w\, a(x, \nabla u)\nabla u \right| \le C\|w\|_\infty \int_{n \le |u| \le n+1} |\nabla u|^p$$

or d'après les hypothèses (avec $k = 1$)

$$\lim_{h \to +\infty} \int_{h \le |u| \le h+1} |\nabla u|^p = 0$$

donc

$$\int_\Omega {S_n}'(u) w\, a(x, \nabla u)\nabla u \to 0$$

et finalement

$$\int_\Omega a(x, \nabla u)\nabla w = \int_\Omega f\, w.$$

11.3 Non unicité

Nous allons montrer que, bien que contenant plus de fonctions test que les deux autres formulations, cette troisième formulation ne conduit pas à l'unicité des solutions quand f est une mesure.

En fait Boccardo, Gallouët et Orsina [14] ont montré qu'il y a unicité si f ne charge pas les ensembles de capacité nulle, c'est-à dire, en particulier, en dimension $N \geq 3$, si f ne charge pas des objets de dimension 0 ou 1 : les points, les segments... Autrement dit, pour montrer que la solution n'est pas unique on peut choisir f chargeant des points ou des segments, c'est ce que nous allons faire. En dimension 2, il faudrait que f ne charge que des points et le contre exemple ci dessous ne marcherait pas (les limites en $+\infty$ seraient finies), en fait il y a unicité : voir [29]. En dimension 1, $M(\overline{\Omega}) \subset H^{-1}(\Omega)$ il y a donc unicité.

Soit $\Omega = B_{\mathbf{R}^N}$, pour $N \geq 3$ la boule unité de $\mathbf{R}^N$. Et soit

$$A = \{-1/2 \leq x_1 \leq 1/2, x_2 = \cdots = x_n = 0\}$$

Appelons u la solution de Green de

$$\begin{cases} -\Delta u = \delta_A & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où δ_A désigne la mesure $N-1$ dimensionnelle portée par A, et v celle de

$$\begin{cases} -\Delta v = \delta & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous allons montrer que u et v sont aussi solutions w de $-\Delta u = \delta$ et $-\Delta v = \delta$. Ainsi u et v ne sont pas solution de la même équation au sens des distributions, alors qu'elles le sont au sens des solutions w, il n'y a donc pas unicité pour cette formulation qui est donc insuffisante.

Si on appelle $G(x,y)$ le noyau de Green, c'est-à-dire la solution de l'équation, à y fixé,

$$\begin{cases} -\Delta G(x,y) = \delta_y & x \in \Omega \\ G(x,y) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

où δ_y désigne la mesure de Dirac portée par $y \in \Omega$, alors

$$G(x,y) = C_N \frac{1}{|y-x|^{N-2}} + H(x,y)$$

où H est solution (à y fixé) de

$$\begin{cases} -\Delta H(x,y) = 0 & x \in \Omega \\ H(x,y) = -C_N \dfrac{1}{|y-x|^{N-2}} & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Or pour $x \in \partial\Omega$ et $y \in A$, $C_N/|y-x|^{N-2}$ est borné, donc par principe du maximum, H est borné pour $x \in \Omega$ et $y \in A$.

On sait que

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)\, d\delta_A(y)$$

soit

$$u(x) = \int_\Omega \left(C_N \frac{1}{|y-x|^{N-2}} + H(x,y) \right) d\delta_A(y)$$

aussi considérons

$$\begin{aligned} B(x) = \int_\Omega C_N \frac{1}{|y-x|^{N-2}} d\delta_A(y) &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{|(y_1,0,\dots,0)-(x_1,x_2,\dots,x_N)|^{N-2}} dy_1 \\ &= \frac{1}{\rho^{N-2}} \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\left(1+\frac{(y_1-x_1)^2}{\rho^2}\right)^{\frac{N-2}{2}}} dy_1 \end{aligned}$$

avec $\rho = \sqrt{x_2{}^2 + \cdots + x_N{}^2}$. Si l'on note $z = (y_1 - x_1)/\rho$, $z_1 = (1/2 - x_1)/\rho$ et $z_2 = (-1/2 - x_1)/\rho$, on obtient

$$B(x) = \frac{1}{\rho^{N-3}} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{N-2}{2}}} dz.$$

Soit $f(z)$ la primitive de $1/(1+z^2)^{\frac{N-2}{2}}$ nulle en 0, qui est donc impaire, alors

$$B(x) = \frac{1}{\rho^{N-3}} \left[f(z_1) - f(z_2) \right] = \frac{1}{\rho^{N-3}} \left[f\left(\frac{\frac{1}{2} - x_1}{\rho} \right) + f\left(\frac{\frac{1}{2} + x_1}{\rho} \right) \right]$$

Supposons que $x_1 \in [-1/2, 1/2]$, alors $0 \leq (1/2 - x_1)/\rho \leq 1/\rho$ et $0 \leq (1/2 + x_1)/\rho \leq 1/\rho$ donc, puisque f est croissante et $f(0) = 0$,

$$\frac{2}{\rho^{N-3}} f\left(\frac{1}{\rho}\right) \geq B(x) \geq \frac{1}{\rho^{N-3}} \max \left[f\left(\frac{\frac{1}{2} - x_1}{\rho} \right), f\left(\frac{\frac{1}{2} + x_1}{\rho} \right) \right] \geq \frac{1}{\rho^{N-3}} f\left(\frac{1}{2\rho}\right).$$

Ainsi la minoration et la majoration ne dépendent que de ρ. Or pour $N \geq 3$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^{N-3}} f\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

donc, comme H est borné pour $x \in \Omega$ et $y \in A$, pour k donné, il existe ε_1 tel que $|u(x)| \geq k$ lorsque $\rho \leq \varepsilon_1$, et pour ε_2 donné, il existe h tel que $|u(x)| \leq h$ lorsque $\rho \geq \varepsilon_2$.

Supposons maintenant que $x_1 \notin [-1/2, 1/2]$, on peut prendre, par symétrie, $x_1 > 1/2$, notons alors $x_1 = 1/2 + a$ et $z = 1/2 - y_1$ d'où, par définition de $B(x)$ et de ρ,

$$B(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dy_1}{\left[(y_1 - \frac{1}{2} - a)^2 + \rho^2\right]^{\frac{N-2}{2}}} = \int_0^1 \frac{dz}{\left[(z+a)^2 + \rho^2\right]^{\frac{N-2}{2}}}$$

or $z \geq 0$ et $a \geq 0$, donc $z^2 + a^2 + \rho^2 \leq (z+a)^2 + \rho^2 \leq 2(z^2 + a^2 + \rho^2)$ aussi

$$\int_0^1 \frac{dz}{[z^2 + (\rho^2 + a^2)]^{\frac{N-2}{2}}} \geq B(x) \geq \frac{1}{2^{\frac{N-2}{2}}} \int_0^1 \frac{dz}{[z^2 + (\rho^2 + a^2)]^{\frac{N-2}{2}}}$$

et si l'on pose $t = z/\sqrt{\rho^2 + a^2}$, on obtient, comme précédemment,

$$\frac{1}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{N-3}{2}}} f\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}\right) \geq B(x) \geq \frac{1}{2^{\frac{N-2}{2}} (\rho^2 + a^2)^{\frac{N-3}{2}}} f\left(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}\right)$$

donc pour k donné, il existe ε_3 tel que $|u(x)| \geq k$ lorsque $\rho^2 + a^2 \leq \varepsilon_3$, et pour ε_4 donné, il existe h tel que $|u(x)| \leq h$ lorsque $\rho^2 + a^2 \geq \varepsilon_4$.

Ainsi, il existe ε' tel que $|u(x)| \geq k$ sur $\{x; x_1 \in [-1/2, 1/2]$ et $\rho^2 \leq \varepsilon'\} \cup \{x; x_1 \geq 1/2$ et $\rho^2 + (x_1 - 1/2)^2 \leq \varepsilon'\} \cup \{x; x_1 \leq -1/2$ et $\rho^2 + (x_1 + 1/2)^2 \leq \varepsilon'\}$. Soit $A_{\varepsilon'}$ cet ensemble, et soit w tel que $\nabla w = 0$ là où $|u| \geq k$, donc $\nabla w = 0$ sur $A_{\varepsilon'}$. Soit $\varepsilon'' < \varepsilon'$ on a bien sûr $A_{\varepsilon''} \subset A_{\varepsilon'}$ et même $d(A_{\varepsilon''}, {A_{\varepsilon'}}^c) > 0$, on peut donc construire une suite $w_n \in W_0^{1,r}(\Omega)$ pour $r > N$, telle que $w_n \to w$ dans $H_0^1(\Omega)$, $\nabla w_n = 0$ sur $A_{\varepsilon''}$ pour tout n et $w_n(0) \to w(0)$.

Comme w_n est régulière, $\nabla w_n = 0$ sur $A_{\varepsilon''}$, et $w_n = \mathit{const} = w_n(0)$ sur $A_{\varepsilon''} \supset A$,

$$\int_{{A_{\varepsilon''}}^c} \nabla u \, \nabla w_n = \int_\Omega \nabla u \, \nabla w_n = \int_\Omega w_n \, d\delta_A = w_n(0)$$

et il existe h tel que $|u(x)| \leq h$ sur ${A_{\varepsilon''}}^c$ (voir ci-dessus avec $\varepsilon_4 = \varepsilon''$), donc $T_h(u) = u$ sur ${A_{\varepsilon''}}^c$ donc

$$\int_\Omega \nabla u \, \nabla w_n = \int_{{A_{\varepsilon''}}^c} \nabla u \, \nabla w_n = \int_{{A_{\varepsilon''}}^c} \nabla T_h(u) \nabla w_n = \int_\Omega \nabla T_h(u) \nabla w_n$$

comme $T_h(u) \in H_0^1(\Omega)$ et $w_n \to w$ dans $H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla u \, \nabla w_n = \int_\Omega \nabla T_h(u) \nabla w_n \to \int_\Omega \nabla T_h(u) \nabla w = \int_\Omega \nabla u \, \nabla w$$

lorsque $n \to +\infty$ (car $|u| \leq h$ sur ${A_{\varepsilon'}}^c \subset {A_{\varepsilon''}}^c$). Or $w_n(0) \to w(0)$ donc pour tout $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tel que $\nabla w = 0$ lorsque $|u| \geq k$

$$\int_\Omega \nabla u \, \nabla w = w(0) = \int_\Omega w \, d\delta.$$

Ainsi u est solution w de $-\Delta u = \delta$ alors que $-\Delta u = \delta_A$ au sens des distributions.

Considérons maintenant la solution de

$$-\Delta v = \delta$$

bien-sûr

$$v(x) = G(x, 0) = 1/|x|^{N-2} + H(x, 0)$$

donc pour k donné, il existe ε_5 tel que $|v(x)| \geq k$ lorsque $|x| \leq \varepsilon_5$ et pour ε_6 donné, il existe h tel que $|v(x)| \leq h$ lorsque $|x| \geq \varepsilon_6$, aussi, comme pour u, on peut montrer que pour tout $w \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tel que $\nabla w = 0$ lorsque $|v| \geq k$

$$\int_\Omega \nabla v \, \nabla w = w(0) = \int_\Omega w \, d\delta$$

donc v est solution w de $-\Delta v = \delta$ ainsi que $-\Delta v = \delta$ au sens des distributions.

Il y a donc deux solutions différentes pour la même équation, la formulation est donc insuffisante.

12. Convergence faible des tronqués des solutions problèmes elliptiques à second membre mesure

Boccardo et Gallouët [11, 12] ont montré que, pour Ω ouvert borné de $\mathbf{R}^N$, le problème elliptique de Dirichlet homogène

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a(x,u,\nabla u)) &= f \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

admet une solution pour $f \in M(\overline{\Omega}) = (C(\overline{\Omega}))'$. Cette solution est obtenue par approximation, c'est-à-dire qu'elle est la limite de (u_n), où u_n est solution de

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(a(x,u_n,\nabla u_n)) &= f_n \text{ dans } \Omega \\ u_n &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

pour f_n régulier tendant vers f pour la topologie de la convergence faible $*$ de $M(\overline{\Omega})$. Cette méthode utilise des troncatures, en particulier, il est montré que $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et que $(T_k(u_n))$ est borné dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, cette suite converge donc faiblement (à une sous-suite près) dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. A-t-on la convergence forte ? Lions et Murat [36, 39] ont montré que pour $f \in L^1(\Omega)$ et $f_n \to f$ dans $L^1(\Omega)$ (fort), la réponse est oui. Dans le cas où f est une mesure, Dal Maso, Murat, Orsina et Prignet (voir [22] et chapitre 13) montrent que la convergence est forte sous l'hypothèse que les parties positives et négatives de f (pour simplifier) doivent être approchées par des fonctions, respectivement, positives et négatives. Nous allons montrer ici que sans cette condition sur (f_n), la convergence peut ne pas être forte.

L'exemple va être construit pour le laplacien, avec $f = 0$, $f_n \to 0$ dans $M(\overline{\Omega})$ faible $*$, (u_n) et et $(T_k(u_n))$ convergeant seulement faiblement, respectivement dans $\bigcap_{q<n/(N-1)} W_0^{1,q}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$, vers 0. Soit $\Omega = B_1(\mathbf{R}^N)$, la boule unité de $\mathbf{R}^N$, on considère des solutions radiales en dimension N. Pour ces fonctions, $-\Delta u = f$ devient

$$-\left(u'' + (N-1)\frac{u'}{r}\right) = f$$

avec $r = |x|$ norme euclidienne dans $\mathbf{R}^N$. La solution générale sans second membre est $1/r^{N-2}$ et la solution particulière associée à 1 est $-r^2/(2N)$.

Soient

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{2^{\frac{1}{N}}}{n}, \quad c_n = \frac{3^{\frac{1}{N}}}{n},$$
$$d_n = \frac{4^{\frac{1}{N}}}{n}, \quad e_n = \frac{5^{\frac{1}{N}}}{n}, \quad f_n = \frac{6^{\frac{1}{N}}}{n},$$

si bien que

$${f_n}^N - {e_n}^N = {e_n}^N - {d_n}^N = {d_n}^N - {c_n}^N = {c_n}^N - {b_n}^N = {b_n}^N - {a_n}^N = \frac{1}{n^N}.$$

Et soient $h_n = n^N$ et g_n tels que

$$g_n = \begin{cases} h_n & \text{sur} \quad 0 \leq r \leq a_n, \\ 0 & \text{sur} \quad a_n \leq r \leq c_n, \\ -h_n & \text{sur} \quad c_n \leq r \leq e_n, \\ h_n & \text{sur} \quad e_n \leq r \leq f_n. \end{cases}$$

ainsi, $g_n \in L^\infty(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, $\int_\Omega g_n = 0$, $\int_\Omega |g_n| = 6\, D_N$ (si $D_N = |B_1|$) et le support de g_n est inclus dans $B_{6^{1/N}/n}(\mathbf{R}^N)$ donc pour tout φ continu

$$\int_\Omega g_n \varphi \approx \varphi(0) \int_\Omega g_n = 0.$$

Ainsi $g_n \to 0$ dans $M(\overline{\Omega})$ faible $*$.

Etudions la solution u_n correspondante : u_n admet deux « maxima locaux » en 0 et d_n, et de plus (C_N notera une constante positive quelconque qui pourra varier d'une égalité à l'autre)

- en f_n, $u_n(f_n) = 0$ et $u_n'(f_n) = 0$
- en 0 et d_n, $u_n'(r) = 0$
- entre f_n et e_n et entre a_0 et 0, u_n est de la forme suivante

$$u_n = \frac{h_n}{2N} r^2 + \frac{A}{r^{N-2}} + B,$$

  entre e_n et c_n

$$u_n = -\frac{h_n}{2N} r^2 + \frac{A}{r^{N-2}} + B,$$

  entre c_n et a_n

$$u_n = \frac{A}{r^{N-2}} + B.$$

- en e_n, $u(e_n) = n^N/N[-(1/2 + 6/5(N-2))e_n^2 + (1/2 + 1/(N-2))f_n^2]$ qui est négatif par convexité de x^2 et est de l'ordre de $-C_N n^{N-2}$
- en d_n, $u(d_n) = n^N/N(1/2 + 1/(N-2))(f_n^2 - 2e_n^2 + d_n^2)$ qui est négatif par convexité de x^2 et est de l'ordre de $-C_N n^{N-2}$
- en c_n, $u(c_n) = n^N/N[(1/2+1/(N-2))(f_n^2 - 2e_n^2 + c_n^2) + 1/3(N-2)c_n^2]$ qui est négatif pour N assez grand et, en particulier, pour $N = 4$ et est de l'ordre de $-C_N n^{N-2}$

- en b_n, $u(b_n) = n^N/N[(1/2 + 1/(N-2))(f_n^2 - 2e_n^2 + c_n^2) + 1/2(N-2)b_n^2]$ qui est positif pour N assez grand et, en particulier, pour $N = 4$ et est de l'ordre de $C_N n^{N-2}$
- en a_n, $u(a_n) = n^N/N[(1/2+1/(N-2))(f_n^2 - 2e_n^2 + c_n^2) + 1/(N-2)a_n^2]$ qui est positif pour N assez grand et, en particulier, pour $N = 4$ et est de l'ordre de $C_N n^{N-2}$
- en 0, $u(0) = n^N/N[(1/2+1/(N-2))(f_n^2 - 2e_n^2 + c_n^2) + (1/(N-2)+1)a_n^2]$ qui est positif pour N assez grand et, en particulier, pour $N = 4$ et est de l'ordre de $C_N n^{N-2}$
- pour N assez grand u s'annule donc en i_n entre b_n et c_n, dans cette zone $u_n'(r) = -1/(Nr^{N-1})$ donc $u_n' \approx -C_N n^{N-1}$ aussi $|u_n| \leq k$ entre $i_n - k/C_N n^{N-1}$ et $i_n + k/C_N n^{N-1}$

donc

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2 \geq C_N \int_{i_n - k/Cn^{N-1}}^{i_n + k/Cn^{N-1}} (Cn^{N-1})^2 r^{N-1} dr \approx C n^{2(N-1)} i_n^N k/n^{N-2} \approx C > 0$$

donc $\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \to \infty$, et donc $T_k(u_n)$ ne converge pas fortement dans $H_0^1(\Omega)$. Bien-sûr le support de u_n est inclus dans $B_{6^{1/N}/n}(\mathbf{R}^N)$ donc $u_n \to 0$ presque partout.

Ceci est relié à l'unicité des SOLA (c'est-à-dire des limites de (u_n), la suite définie au début de ce chapitre), en effet pour $g \in L^1(\Omega)$ la méthode employée pour montrer l'unicité consiste à choisir comme fonction test $T_k(u_n)$ ce qui conduit à

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla T_k(u_n) = \int_\Omega g_n\, T_k(u_n)$$

puis à faire tendre $n \to \infty$ d'où

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u)|^2 = 0$$

dès que

$$\int_\Omega g_n T_k(u_n) \to 0$$

ce qui est bien le cas par convergence dominée si $g_n \to 0$ dans $L^1(\Omega)$. Ceci montre notamment que

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_n)|^2 \to 0$$

dans le cas $g \in L^1(\Omega)$.

Effectivement dans l'exemple que nous venons de construire on peut montrer que $\int_\Omega g_n T_k(u_n)$ ne tend pas vers 0 (ici g_n converge seulement dans $M(\overline{\Omega})$ faible $*$, aussi le théorème de convergence dominée ne permet pas de conclure) :

$$\begin{aligned}\int_\Omega g_n T_k(u_n) &= \int_0^{i_n} g_n T_k(u_n) + \int_{i_n}^{f_n} g_n T_k(u_n) \\ &= h_n \left[\int_0^{a_n} T_k(u_n) - \int_{c_n}^{e_n} T_k(u_n) + \int_{e_n}^{f_n} T_k(u_n) \right]\end{aligned}$$

mais, entre c_n et e_n, $u \leq -k$ car u est de l'ordre de $-C_N n^{N-2}$ et entre 0 et a_n, $u \geq k$ car u est de l'ordre de $C_N n^{N-2}$ donc $T_k(u_n) = -k$ entre c_n et e_n, et $T_k(u_n) = k$ entre a_n et 0 aussi

$$\int_\Omega g_n\, T_k(u_n) = h_n \left[\int_0^{a_n} k + k \int_{c_n}^{e_n} k + \int_{e_n}^{f_n} T_k(u_n) \right]$$

or $h_n \int_{c_n}^{e_n} 1 = 2\, C_N$ et $0 \geq h_n \int_{e_n}^{f_n} T_k(u_n) \geq -k\, C_N$ donc

$$\int_\Omega g_n\, T_k(u_n) \geq 3\, k\, C_N - k\, C_N = 2\, k\, C_N$$

qui ne tend effectivement pas vers 0 quand $n \to \infty$.

13. Une généralisation des notions de SOLA et de solutions entropiques et renormalisées

Ce chapitre est une partie d'un article en préparation écrit en collaboration avec G. Dal Maso, F. Murat et L. Orsina [22].

On considère le problème elliptique suivant

$$(13.0.1) \qquad \begin{aligned} -\operatorname{div}(a(x,\nabla u)) &= \mu \text{ dans } \Omega \\ u &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où $\mu \in M(\overline{\Omega}) = (C(\overline{\Omega}))'$, espace de mesures, Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^N$ $(N \geq 2)$ et a une fonction de Carathéodory satisfaisant des conditions de coercitivité, de monotonie et de croissance du type de celles de Leray-Lions, définissant un opérateur sur $W_0^{1,p}(\Omega)$.

L'existence de solutions étant connue [11, 12], on s'intéresse à leur unicité et lorsque $\mu \in L^1(\Omega)$, plusieurs approches ont été utilisées : les SOLA [23], les solutions entropiques [4] et les solutions renormalisées [36, 39]. Nous proposons ici de nouvelles définitions, équivalentes, généralisant ces trois approches lorsque $\mu \in M(\overline{\Omega})$.

Le plan de ce chapitre est le suivant : dans la première partie nous donnons les hypothèses sur $a(x,\xi)$, les quatre définitions d'une solution renormalisée, et nous énonçons le résultat d'existence d'une solution renormalisée. Dans la deuxième partie, nous décomposons la mesure μ en $\mu = \mu_0 + \lambda$, où μ_0 ne charge pas les ensembles de p-capacité nulle (ce qui équivaut à $\mu \in L^1(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)$, voir la troisième partie et [14]), et où λ est concentrée sur E un sous ensemble de Ω de p-capacité nulle. Puis nous prenons (μ_ε) et (λ_ε) des suites d'approximations régulières (en un sens que nous précisions) de μ_0 et λ, et nous résolvons (13.0.1) avec pour second membre $\mu_\varepsilon + \lambda_\varepsilon$, nous obtenons alors une suite (u_ε) de solutions approchées. Dans les troisièmes et quatrièmes parties, nous étudions le comportement des tronqués des u_ε, respectivement dans un voisinage de E et « loin de » E. La cinquième partie est consacrée à la démonstration des résultats principaux de ce chapitre, c'est-à-dire la convergence forte dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ des tronqués des u_ε, et le fait que toute limite de (u_ε) est une solution renormalisée de (13.0.1). Enfin dans la dernière partie nous montrons l'équivalence des quatre définitions.

13.1 Assumptions and statement of results

13.1.1 Assumptions

Let Ω be a bounded, open subset of $\mathbf{R}^N$, $N \geq 2$; no smoothness is assumed on $\partial\Omega$. Let p and p' be real numbers, with $1 < p \leq N$, and $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Let $a : \Omega \times \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ be a Carathéodory function (that is, $a(\cdot, \xi)$ is measurable on Ω for every ξ in $\mathbf{R}^N$, and $a(x, \cdot)$ is continuous on $\mathbf{R}^N$ for almost every x in Ω) which satisfies the following hypotheses :

$$a(x, \xi) \cdot \xi \geq \alpha |\xi|^p , \tag{13.1.2}$$

for almost every x in Ω and for every ξ in $\mathbf{R}^N$, where $\alpha > 0$ is given ;

$$|a(x, \xi)| \leq \beta \, [b(x) + |\xi|]^{p-1} , \tag{13.1.3}$$

for almost every x in Ω and for every ξ in $\mathbf{R}^N$, where $\beta > 0$ is given, and b is a non negative function in $L^p(\Omega)$;

$$(a(x, \xi) - a(x, \xi')) \cdot (\xi - \xi') > 0 , \tag{13.1.4}$$

for almost every x in Ω and for every ξ, ξ' in $\mathbf{R}^N$, $\xi \neq \xi'$. Observe that (13.1.2), and the continuity of a with respect to ξ, imply

$$a(x, 0) = 0 \quad \text{for almost every } x \text{ in } \Omega. \tag{13.1.5}$$

Thanks to hypotheses (13.1.2), (13.1.3) and (13.1.4), $u \mapsto -\mathrm{div}\,(a(x, \nabla u))$ is a coercive, continuous, bounded and monotone operator from $W_0^{1,p}(\Omega)$ with values in its dual space $W^{-1,p'}(\Omega)$; moreover, for every μ in $W^{-1,p'}(\Omega)$ there exists at least a solution v of the following problem

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(a(x, \nabla v)) = \mu & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

in the sense that

$$\begin{cases} v \in W_0^{1,p}(\Omega) , \\ \displaystyle\int_\Omega a(x, \nabla v) \cdot \nabla \varphi \, dx = \langle \mu, \varphi \rangle , \qquad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases} \tag{13.1.6}$$

(see for example [33] and [34]). Here and in the following, we will denote by $\langle \cdot, \cdot \rangle$ the duality between $W^{-1,p'}(\Omega)$ and $W_0^{1,p}(\Omega)$. Furthermore, thanks to (13.1.4), such a solution is unique.

We define $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$ as the set of measures with bounded total variation. If $p > N$, then $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$ is contained in $W^{-1,p'}(\Omega)$, so that both existence and uniqueness of solutions for (13.0.1) follow from the result quoted above. This explains the restriction $p \leq N$ that we have imposed.

In Section 3, Propositions 13.2.4 and 13.2.5, we will recall a result of [14] that states that every measure μ in $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$ can be decomposed as follows :

$$\mu = \mu_0 + \lambda^+ - \lambda^- = f - \operatorname{div}(g) + \lambda^+ - \lambda^- , \tag{13.1.7}$$

where μ_0 is a measure in $\mathcal{M}_0(\Omega)$, which is the set of measures of $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$ that do not charge the subsets of Ω of zero p-capacity (see Section 3 for the definition of p-capacity), and so can be decomposed as $f - \operatorname{div}(g)$, with f in $L^1(\Omega)$ and g in $(L^{p'}(\Omega))^N$ (see Proposition 13.2.5), while λ^+ and λ^- are two non negative measures in $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$ which are concentrated on two subsets E^+ and E^-, respectively, of zero p-capacity.

We define $T_k(s) = \max(-k, \min(k, s))$ for s in $\mathbf{R}$, and for k a positive real number (see (13.1.26) in Subsection 13.1.5).

Definition 13.1.1 Let u be a measurable function defined on Ω which is almost everywhere finite. Suppose that, for every $k > 0$, $T_k(u)$ belongs to $W_0^{1,p}(\Omega)$. Then it has been proved in [4] and [36] that there exists a unique measurable function $v : \Omega \to \mathbf{R}^N$ such that

$$\nabla T_k(u) = v\, \chi_{\{|u| \le k\}} \qquad \text{almost everywhere in } \Omega, \text{ for every } k > 0.$$

We will *define* ∇u, the gradient of u, as this function v, and use this definition throughout the paper. We explicitly remark that this gradient is not the gradient in the usual distributional sense, since it is possible that u does not belong to $L^1(\Omega)$, even though this coincides with the usual distributional gradient if the function u belongs to $W_0^{1,1}(\Omega)$; see also Example 13.1.4, below.

13.1.2 Definition of renormalized solutions

We are now in a position to define the notion of renormalized solution. Other equivalent definitions will be given in Section 13.1.3.

Definition 13.1.2 Assume that a satisfies (13.1.2)–(13.1.4), and let μ be a measure in $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$, which is decomposed as $\mu_0 + \lambda^+ - \lambda^-$ as in (13.1.7). A measurable function u is a *renormalized solution* of problem (13.0.1) if the following holds :

(a) the function u is almost everywhere finite, and is such that $T_k(u)$ belongs to $W_0^{1,p}(\Omega)$ for every $k > 0$;

(b) ∇u, defined in Definition 13.1.1 is such that

$$|\nabla u|^{p-1} \text{ belongs to } L^q(\Omega), \text{ for every } q < \tfrac{N}{N-1}\,; \tag{13.1.8}$$

(c) for every function w in $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ such that there exists $k > 0$ and $w^{+\infty}$ and $w^{-\infty}$ in $W^{1,r}(\Omega)$, with $r > N$, such that

$$\begin{cases} w = w^{+\infty} & \operatorname{cap}_p\text{-quasi everywhere on the set } \{u > k\}, \\ w = w^{-\infty} & \operatorname{cap}_p\text{-quasi everywhere on the set } \{u < -k\}, \end{cases} \tag{13.1.9}$$

we have

$$\int_\Omega a(x, \nabla u) \cdot \nabla w \, dx = \int_\Omega w \, d\mu_0 + \int_\Omega w^{+\infty} \, d\lambda^+ - \int_\Omega w^{-\infty} \, d\lambda^- . \tag{13.1.10}$$

Remark 13.1.3 Every term in (13.1.10) has a meaning. Indeed, the integral on the left hand side can be splitted as

$$\int_{\{u<-k\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla w \, dx + \int_{\{|u| \le k\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla w \, dx + \int_{\{u>k\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla w \, dx ,$$

where all three terms are well defined : actually, since $|\nabla u|^{p-1}$ belongs to $L^q(\Omega)$ for every $q < \frac{N}{N-1}$, hypothesis (13.1.3) implies that $a(x, \nabla u)$ belongs to $(L^q(\Omega))^N$, for every $q < \frac{N}{N-1}$; on the other hand

$$\left| \int_{\{u<-k\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla w \, dx \right| = \left| \int_{\{u<-k\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla w^{-\infty} \, dx \right| < +\infty ,$$

since $w^{-\infty}$ belongs to $W^{1,r}(\Omega)$ with $r > N$ and $a(x, \nabla u)$ belongs to $(L^q(\Omega))^N$ for every $q < \frac{N}{N-1} = N'$; the same thing is true for the term

$$\int_{\{u>k\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla w \, dx .$$

Finally, for the middle term we have, since $a(x, 0) = 0$ (see (13.1.5)),

$$\left| \int_{\{|u| \le k\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla w \, dx \right| = \left| \int_\Omega a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla w \, dx \right| < +\infty ,$$

since $T_k(u)$ belongs to $W_0^{1,p}(\Omega)$, which implies by (13.1.3) that $a(x, \nabla T_k(u))$ belongs to $(L^{p'}(\Omega))^N$, while w belongs to $W_0^{1,p}(\Omega)$.

As for the right hand side, the term

$$\int_\Omega w^{+\infty} \, d\lambda^+ - \int_\Omega w^{-\infty} \, d\lambda^-$$

is obviously well defined, since both $w^{+\infty}$ and $w^{-\infty}$ are continuous and bounded on Ω, while the term

$$\int_\Omega w \, d\mu_0$$

is well defined since w belongs to $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ and so to $L^\infty(\Omega, d\mu_0)$ (see Proposition 13.2.3), and therefore to $L^1(\Omega, d\mu_0)$ since μ_0 belongs to $\mathcal{M}_0(\Omega)$.

Example 13.1.4 Observe that we did not assume that the function u belongs to some space $L^r(\Omega)$, but only that u is Lebesgue measurable. Indeed it is possible that the function u does not belong to $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$: this is the case in the following example.

Let $\Omega = B_1(0) = \{x \in \mathbf{R}^N : |x| < 1\}$, and let ω_N be the $(N-1)$-dimensional measure of $\partial\Omega$. Consider the function defined by

$$\begin{cases} u(x) = \dfrac{1}{\gamma}\,(|x|^{-\gamma} - 1) & \text{with } \gamma = \frac{N-p}{p-1} \text{ if } 1 < p < N, \\ u(x) = -\log(|x|) & \text{with } \gamma = 0 \text{ if } p = N. \end{cases} \tag{13.1.11}$$

Note that u belongs to $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ if and only if $\gamma < N$, i.e., if $p > \frac{2N}{N+1}$.

Let us show that u is a renormalized solution of the equation

$$\begin{cases} -\text{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u) = \omega_N\,\delta_0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{13.1.12}$$

where δ_0 is the Dirac mass concentrated at the origin. Indeed, $T_k(u)$ belongs to $W_0^{1,p}(\Omega)$ (and is actually Lipschitz continuous and zero on the boundary of Ω), and, defining ∇u as in Definition 13.1.1, we have

$$\nabla u = -\frac{x}{|x|^{\gamma+2}} \text{ for every } 1 < p \leq N,$$

which implies that $|\nabla u|^{p-1} = |x|^{1-N}$ belongs to $L^q(\Omega)$ for every $q < \frac{N}{N-1}$. Thus, (i) is satisfied.

For what concerns (c), consider a function w in $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ which belongs to C^1 in a neighbourhood of the origin (so to meet the requirements of Definition 13.1.2). Using the fact that $\frac{x\cdot\nabla w}{|x|^N}$ belongs to $L^1(\Omega)$ (see Remark 13.1.3), integrating by parts on $B_1(0)\backslash B_\varepsilon(0)$, using the fact that $\text{div}\,(\frac{x}{|x|^N}) = 0$ in the sense of distributions on $\mathbf{R}^N\backslash\{0\}$, and finally using the continuity of w at the origin, we have

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\cdot\nabla w\,dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{B_1(0)\backslash B_\varepsilon(0)} \frac{x\cdot\nabla w}{|x|^N}\,dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} w\frac{x}{|x|^N}\cdot\frac{x}{|x|}\,d\sigma \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon^{N-1}}\int_{\partial B_\varepsilon(0)} w\,d\sigma = \omega_N\,w(0) \\ &= \omega_N\int_\Omega w^{+\infty}\,d\delta_0\,. \end{aligned}$$

In this example u does not belong to $L^1(\Omega)$ if $p \leq \frac{2N}{N+1}$, and ∇u is not the distributional gradient of u.

Remark 13.1.5 Note that a renormalized solution u, which is *a priori* defined only almost everywhere in Ω, is actually defined cap_p-quasi everywhere (that is to say, except on a set of zero p-capacity), since $T_k(u)$ belongs to $W_0^{1,p}(\Omega)$ for every $k > 0$, and since the functions of $W_0^{1,p}(\Omega)$ admit a representative which is defined cap_p-quasi everywhere (see Section 3).

Remark 13.1.6 Since the choice of test functions in (c) of Definition 13.1.2 is rather complicated, one may wonder whether the class of admissible test functions is not empty. This is indeed the case, since for example any function in $C^\infty_c(\Omega)$ is admissible. Thus, if u is a renormalized solution of (13.0.1) in the sense of Definition 13.1.2, and if $p > 2 - \frac{1}{N}$, then it is also a solution in the sense of distributions.

There are more admissible functions, built after u, such as $T_k(u)$ (choosing $w^{+\infty} \equiv k$ and $w^{-\infty} \equiv -k$).

If φ belongs to $W^{1,p}_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, then it is possible to choose in (13.1.10) the function $w = T_k(u - \varphi)$; indeed, this function belongs to $W^{1,p}_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, and we can choose $w^{+\infty} \equiv k$ and $w^{-\infty} \equiv -k$, on the sets $\{u > k + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\}$ and $\{u < -k - \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\}$ respectively. Thus, a renormalized solution of (13.0.1) turns out to be an entropy solution of (13.0.1) in the sense defined in [4]. Hence, if the measure μ does not charge the sets of zero p-capacity, there exists at most one renormalized solution of (13.0.1), due to the uniqueness result of [14]. Note however that the definition of entropy solution with datum a Dirac mass given in [14], Remark 3.4, did not imply that an entropy solution is a distributional solutions. In contrast, we have seen that a renormalized solution as defined in Definition 13.1.2 is also a distributional solution, which rules out the counterexample to uniqueness given in [14], Remark 3.4.

13.1.3 Other definitions

Besides Definition 13.1.2, other definitions of renormalized solutions can be given. We give here three different formulations of renormalized solution, which will turn out to be equivalent to Definition 13.1.2 (see Theorem 13.6.1, Section 7).

Definition 13.1.7 Assume that a satisfies (13.1.2)–(13.1.4), and let μ be a measure in $\mathcal{M}_\mathrm{b}(\Omega)$, which is decomposed as $\mu_0 + \lambda^+ - \lambda^-$. A measurable function u is a renormalized solution of (13.0.1) if u satisfies (a) of Definition 13.1.2, and if the following holds :

(d) For every φ in $C^0(\overline{\Omega})$ we have

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_{\{n \le u < 2n\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla u \, \varphi \, dx = \int_\Omega \varphi \, d\lambda^+ \,, \tag{13.1.13}$$

and

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_{\{-2n < u \le -n\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla u \, \varphi \, dx = \int_\Omega \varphi \, d\lambda^- \,. \tag{13.1.14}$$

(e) For every h in $W^{1,\infty}(\mathbf{R})$ with compact support in $\mathbf{R}$, and for every φ in $W^{1,p}_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, we have

$$\int_\Omega a(x, \nabla u) \cdot \nabla u \, h'(u) \, \varphi \, dx + \int_\Omega a(x, \nabla u) \cdot \nabla \varphi \, h(u) \, dx = \int_\Omega h(u) \, \varphi \, d\mu_0 \,. \tag{13.1.15}$$

Remark 13.1.8 Observe that every term in (13.1.15) has a meaning : indeed, in the right hand side $h(u)\,\varphi$ belongs to $W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, and is hence in $L^\infty(\Omega, d\mu_0)$ by Proposition 13.2.3. On the other hand, since $\operatorname{supp}(h)\subseteq[-M,M]$ for some $M>0$, the left hand side as to be understood as

$$\int_\Omega a(x,\nabla T_M(u))\cdot\nabla T_M(u)\,h'(u)\,\varphi\,dx+\int_\Omega a(x,\nabla T_M(u))\cdot\nabla\varphi\,h(u)\,dx\,,$$

where both terms are finite by (13.1.3) since both φ and $T_M(u)$ belong to $W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$.

Remark 13.1.9 Definition 13.1.7 is similar to the definition of renormalized solution given in [36] or [39] if μ belongs to $L^1(\Omega)+W^{-1,p'}(\Omega)$ (that is to say, after the result of [14] cited in Proposition 13.2.4 below, to $\mathcal{M}_0(\Omega)$). Indeed in these papers, the definition of renormalized solution included (e) as well as

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_{\{n\le|u|<2n\}}a(x,\nabla u)\cdot\nabla u\,dx=0\,, \tag{13.1.16}$$

which coincides with (13.1.13) and (13.1.14) in the case $\lambda^+=\lambda^-=0$ and $\varphi\equiv1$. Here (13.1.13) and (13.1.14) replace (13.1.16), and specify the behaviour of the energy of u on the set where u is very large.

Conditions (13.1.13) and (13.1.14) can be removed if we change the class of admissible test functions.

Definition 13.1.10 Assume that a satisfies (13.1.2)–(13.1.4), and let μ be a measure in $\mathcal{M}_\mathrm{b}(\Omega)$, which is decomposed as $\mu_0+\lambda^+-\lambda^-$. A measurable function u is a renormalized solution of (13.0.1) if u satisfies (a) and (b) of Definition 13.1.2, and if the following holds :

(f) for every h in $W^{1,\infty}(\mathbf{R})$ such that h' has compact support in $\mathbf{R}$, and for every φ in $W_0^{1,r}(\Omega)$, with $r>N$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla u\,h'(u)\,\varphi\,dx+\int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi\,h(u)\,dx\\=\int_\Omega h(u)\,\varphi\,d\mu_0+h^{+\infty}\int_\Omega\varphi\,d\lambda^+-h^{-\infty}\int_\Omega\varphi\,d\lambda^-\,.\end{aligned} \tag{13.1.17}$$

Here $h^{+\infty}$ and $h^{-\infty}$ are the limits of $h(s)$ at $+\infty$ and $-\infty$ respectively (which exist, since h is constant for $|s|$ large enough).

Remark 13.1.11 As in (13.1.15), every term in (13.1.17) is well defined : this is clear for the right hand side since $h(u)\,\varphi$ belongs to $L^\infty(\Omega,d\mu_0)$ (see Proposition 13.2.3), and thus to $L^1(\Omega,d\mu_0)$. Since $\operatorname{supp}(h')\subseteq[-M_1,M_1]$, for some M_1, the left hand side has to be understood as

$$\int_\Omega a(x,\nabla T_{M_1}(u))\cdot\nabla T_{M_1}(u)\,h'(u)\,\varphi\,dx+\int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi\,h(u)\,dx\,,$$

where both terms are finite : the first one by (13.1.3) since $T_{M_1}(u)$ belongs to $W_0^{1,p}(\Omega)$, and the second one since $a(x,\nabla u)$ belongs to $(L^q(\Omega))^N$ for every $q<\frac{N}{N-1}$ due to the hypotheses on $|\nabla u|^{p-1}$ and to (13.1.3).

Remark 13.1.12 The conditions (13.1.13) and (13.1.14) that were required to hold in Definition 13.1.7 are now "embedded" in the formulation (13.1.17) : see Step 3 of the proof of Theorem 13.1.16 in Section 6, where these conditions will be obtained from (13.1.17).

Remark 13.1.13 We remark that if the function h in both Definition 13.1.7 and Definition 13.1.10 is such that $h(0)=0$, then the test functions φ can be respectively chosen in $W^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ and in $W^{1,r}(\Omega)$, with $r>N$.

Definition 13.1.14 Assume that a satisfies (13.1.2)–(13.1.4), and let μ be a measure in $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$, which is decomposed as $\mu_0+\lambda^+-\lambda^-$. A measurable function u is a renormalized solution of (13.0.1) if u satisfies (a) and (b) of Definition 13.1.2, and if the following holds :

(g) For every $k>0$ there exist two non negative measures in $\mathcal{M}_0(\Omega)$, λ_k^+ and λ_k^-, such that

$$\begin{cases} \operatorname{supp}(\lambda_k^+)\subseteq\{k-\delta\le u\le k+\delta\}\,, \\ \operatorname{supp}(\lambda_k^-)\subseteq\{-k-\delta\le u\le -k+\delta\}\,, \end{cases} \tag{13.1.18}$$

for every $\delta>0$, and

$$\lambda_k^+\to\lambda^+\,,\quad \lambda_k^-\to\lambda^- \text{ in the weak$*$ topology of measures.}$$

(h) For every $k>0$,

$$\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u))\cdot\nabla\varphi\,dx=\int_{\{|u|\le k\}}\varphi\,d\mu_0+\int_\Omega\varphi\,d\lambda_k^+-\int_\Omega\varphi\,d\lambda_k^-\,, \tag{13.1.19}$$

for every φ in $W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$.

As usual, every term in (13.1.19) is well defined due to the regularity of $T_k(u)$ and φ, and since measures in $\mathcal{M}_0(\Omega)$ are in $W^{-1,p'}(\Omega)+L^1(\Omega)$ (see Proposition 13.2.5).

Remark 13.1.15 Some comments on these new definitions are in order. Definition 13.1.7 and 13.1.10 state (we refer explicitly to Definition 13.1.10) that the renormalized solution u is in some sense equal to $+\infty$ on the sets charged by λ^+, and to $-\infty$ on the sets charged by λ^- ; this is clearly expressed by the presence of the two terms $h^{+\infty}$ and $h^{-\infty}$ in (13.1.17). Thus, the presence of a measure which is concentrated on a set of zero p-capacity leads to an unbounded solution that we can suppose to be unbounded "in a stronger way" than the solutions corresponding to measures in $\mathcal{M}_0(\Omega)$: this fact is very clear if one considers solutions corresponding to a Dirac mass and to a function in $L^1(\Omega)$.

Definition 13.1.14 says something about the equation solved by $T_k(u)$. Indeed, (13.1.19) can be reformulated (in the sense of distributions, that is, choosing φ in $C_c^\infty(\Omega)$) as follows :

$$-\operatorname{div}(a(x,\nabla T_k(u)))=\mu_0\llcorner\{|u|\le k\}+\lambda_k^+-\lambda_k^-\,.$$

This formulation explains also the required conditions (13.1.18) and the convergence of λ_k^+ and λ_k^-. Observe that a renormalized solution in the sense of Definition 13.1.14 is a solution obtained by approximation (since the sequence $\mu_0 \llcorner \{|u| \leq k\} + \lambda_k^+ - \lambda_k^-$ converges to $\mu = \mu_0 + \lambda^+ - \lambda^-$ in the weak$*$ topology of measures) with the property that the truncates are strongly convergent (it is indeed easy to see that $T_h(T_k(u))$ converges strongly to $T_h(u)$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ as k tends to infinity).

The equivalence of the four definitions will be proved in Section 6.

13.1.4 Existence and strong convergence of truncates

Theorem 13.1.16 *Assume that a satisfies (13.1.2)–(13.1.4), and let a μ be a measure in $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$. Then there exists at least a renormalized solution of (13.0.1) in the sense of Definition 13.1.2.*

We will obtain the existence result by an approximation process : let μ be a measure in $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$, and let it be decomposed as in (13.1.7) (see also Section 13.2) :

$$\mu = \mu_0 + \lambda^+ - \lambda^- = f - \mathrm{div}\,(g) + \lambda^+ - \lambda^-\,,$$

with f in $L^1(\Omega)$, g in $(L^{p'}(\Omega))^N$, λ^+ and λ^- non negative measures concentrated on E^+ and E^-, respectively, with $\mathrm{cap}_p(E^+,\Omega) = \mathrm{cap}_p(E^-,\Omega) = 0$ and $E^+ \cap E^- = \emptyset$ (see Section 3). We will approximate the measure μ by a sequence μ_ε defined as

$$\mu_\varepsilon = f_\varepsilon - \mathrm{div}\,(g_\varepsilon) + (\lambda^+)_\varepsilon - (\lambda^-)_\varepsilon\,,$$

where ε belongs to a sequence of positive numbers that converges to zero, and

$$\left\{\begin{array}{l} f_\varepsilon \text{ is a sequence of } C_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega) \text{ functions} \\ \text{that converges to } f \text{ weakly in } L^1(\Omega)\,; \end{array}\right. \tag{13.1.20}$$

$$\left\{\begin{array}{l} g_\varepsilon \text{ is a sequence of } (C_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega))^N \text{ functions} \\ \text{that converges to } g \text{ strongly in } (L^{p'}(\Omega))^N\,; \end{array}\right. \tag{13.1.21}$$

$$\left\{\begin{array}{c} (\lambda^+)_\varepsilon \text{ is a sequence of non negative } C_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega) \text{ functions} \\ \text{that converges tightly to } \lambda^+\,; \end{array}\right. \tag{13.1.22}$$

$$\left\{\begin{array}{c} (\lambda^-)_\varepsilon \text{ is a sequence of non negative } C_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega) \text{ functions} \\ \text{that converges tightly to } \lambda^- \end{array}\right. \tag{13.1.23}$$

(see Definition 13.2.6 for the definition of tight convergence of measures).

Once we have defined the approximation for μ, let u_ε be the unique solution in $W_0^{1,p}(\Omega)$ of the following problem

$$\left\{\begin{array}{ll} -\mathrm{div}\,(a(x,\nabla u_\varepsilon)) = f_\varepsilon - \mathrm{div}\,(g_\varepsilon) + (\lambda^+)_\varepsilon - (\lambda^-)_\varepsilon & \text{in } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{13.1.24}$$

in the sense specified by (13.1.6). We then have the following result, which implies Theorem 13.1.16.

Theorem 13.1.17 *Suppose that a satisfies hypotheses (13.1.2)–(13.1.4), and let u_ε be the solution of (13.1.24), where f_ε, g_ε, $(\lambda^+)_\varepsilon$ and $(\lambda^-)_\varepsilon$ are sequences of functions that satisfy (13.1.20)–(13.1.23). Then there exists a subsequence of u_ε, still denoted by u_ε, that converges to a renormalized solution u of (13.0.1) in the sense of Definition 13.1.2.*

Remark 13.1.18 We explicitly remark that we require that the two sequences $(\lambda^+)_\varepsilon$ and $(\lambda^-)_\varepsilon$ are sequences of non negative functions. If we do not make this requirement, the result of Theorem 13.1.17 (as well as that of Theorem 13.1.20) may not hold, see examples 13.5.2 and 13.5.3 in Section 13.5.

Remark 13.1.19 A measure in $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$ is not the not most general possible datum for (13.0.1). Indeed, there exist elements in $W^{-1,p'}(\Omega)$ which are not measures. This implies that a more general datum is of the kind

$$\mu - \mathrm{div}\,(F)\,,$$

with μ in $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$ and F in $(L^{p'}(\Omega))^N$. However, the new term $-\mathrm{div}\,(F)$ does not give any problem in the proof of the results, since it can be treated as the term $-\mathrm{div}\,(g_\varepsilon)$. Thus, we will restrict ourselves to the case of a datum μ belonging to $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$, the case of a datum $\mu - \mathrm{div}\,(F)$ being analogous.

Let us just explicitly state that every of the present paper holds if μ in $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$ is replaced by

$$\mu - \mathrm{div}\,(F) \quad \text{with } \mu \text{ in } \mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega) \text{ and } F \text{ in } (L^{p'}(\Omega))^N.$$

The main tool of the proof of Theorem 13.1.16 will be the following strong convergence result for the truncates of u_ε, which is interesting on its own, and specifies the sense in which u_ε converges to u.

Theorem 13.1.20 *Suppose that a satisfies hypotheses (13.1.2)–(13.1.4), and let u_ε be the solution of (13.1.24), where f_ε, g_ε, $(\lambda^+)_\varepsilon$ and $(\lambda^-)_\varepsilon$ are sequences of functions that satisfy (13.1.20)–(13.1.23). Then there exists a subsequence of u_ε, still denoted by u_ε, and a measurable function u such that $T_k(u)$ belongs to $W_0^{1,p}(\Omega)$ for every $k > 0$, such that*

$$T_k(u_\varepsilon) \to T_k(u) \quad \textit{strongly in } W_0^{1,p}(\Omega), \textit{ for every } k > 0.$$

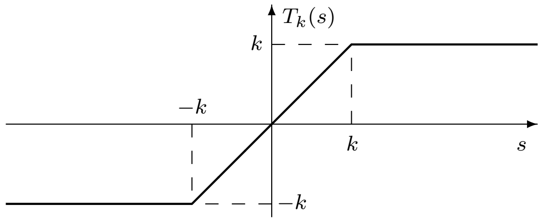
13.1.5 Notation and preliminary results

This subsection contains some notation, the definition of some of the "objects" that we will use in the proof of the results, and some already known results on the sequence u_ε of solutions of (13.1.24).

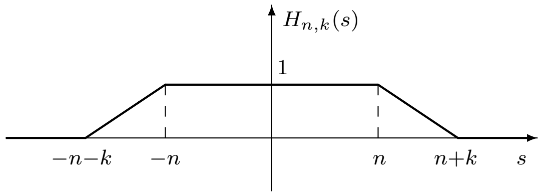
We will use the following functions of one real variable, which may depend on one or more non negative real parameters such as k and n :

$$s^+ = \max(s, 0)\,, \qquad s^- = \max(-s, 0)\,. \tag{13.1.25}$$

$$T_k(s) = \max(-k, \min(k, s))\,. \tag{13.1.26}$$

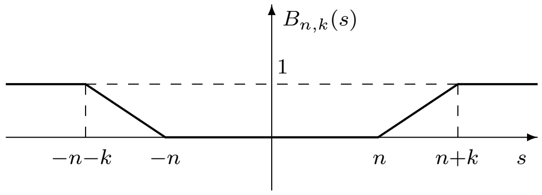


$$H_{n,k}(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } s < -n-k, \\ \dfrac{x+n+k}{k} & \text{if } -n-k \leq s < -n, \\ 1 & \text{if } |s| \leq n, \\ \dfrac{n+k-x}{k} & \text{if } n < s \leq n+k, \\ 0 & \text{if } s > n+k. \end{cases} \tag{13.1.27}$$

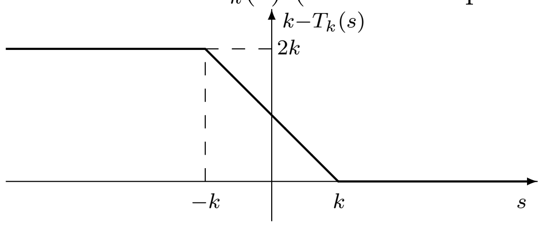


$$h_n(s) = H_{n,n}(s)\,.$$

$$B_{n,k}(s) = 1 - H_{n,k}(s)\,. \tag{13.1.28}$$



We will also use the function $k - T_k(s)$ (and its companion $k + T_k(s)$) :



In the whole present paper we will denote by c a generic constant, which can vary from line to line, but which depends on N, p, Ω, α, β and b (which appear in Subsection 2.1), and never on another parameter (such as ε, δ, η, n).

Moreover, if η, δ and ε are positive real numbers, and n belongs to $\mathbf{N}$, we will denote by $\omega(\eta, \delta, n, \varepsilon)$ any quantity such that

$$\lim_{\eta \to 0^+} \lim_{\delta \to 0^+} \lim_{n \to +\infty} \lim_{\varepsilon \to 0^+} |\omega(\eta, \delta, n, \varepsilon)| = 0\,.$$

If the order in which the limits are taken will be different, we will change the order of appearance of the symbols, from the last limit to be taken, to the first : for example, $\omega(\eta, n, \delta, \varepsilon)$ is any quantity whose absolute value converges to zero after taking the limits on ε, δ, n and η successively. If the quantity we consider does not depend on one among η, δ, n and ε, we will omit the dependence from the corresponding variable : as an example, $\omega(\eta, \varepsilon)$ is a quantity such that

$$\lim_{\eta\to 0^+} \lim_{\varepsilon\to 0^+} |\omega(\eta,\varepsilon)| = 0\,.$$

Finally, we will denote (for example) by $\omega_{\eta,\delta}(n,\varepsilon)$ a quantity that depends on η, δ, n, ε and is such that

$$\lim_{n\to +\infty} \lim_{\varepsilon\to 0^+} |\omega_{\eta,\delta}(n,\varepsilon)| = 0\,,$$

independently of the values of η and δ. As an example,

$$\eta + \delta + \frac{1}{n} + \varepsilon = \omega(\eta,\delta,n,\varepsilon)\,, \qquad n\,\varepsilon = \omega_n(\varepsilon)\,.$$

We recall the following well-known result, whose proof is based on Egorov theorem.

Lemma 13.1.21 *Let Ω be a bounded, open subset of $\mathbf{R}^N$; let ρ_ε be a sequence of $L^1(\Omega)$ functions that converges to ρ weakly in $L^1(\Omega)$, and let σ_ε be a sequence of functions in $L^\infty(\Omega)$ that is bounded in $L^\infty(\Omega)$ and converges to σ almost everywhere in Ω. Then*

$$\int_\Omega \rho_\varepsilon\, \sigma_\varepsilon\, dx = \int_\Omega \rho\, \sigma\, dx + \omega(\varepsilon)\,.$$

Let now $\mu_\varepsilon = f_\varepsilon - \operatorname{div}(g_\varepsilon) + (\lambda^+)_\varepsilon - (\lambda^-)_\varepsilon$ be such that f_ε, g_ε, $(\lambda^+)_\varepsilon$ and $(\lambda^-)_\varepsilon$ satisfy hypotheses (13.1.20)–(13.1.23), and let u_ε be the solution of (13.1.24) in the sense (13.1.6).

Then the sequence u_ε has the following properties : there exists a positive constant c, independent on k, n and ε, such that, for every $k>0$, for every $n\geq 0$, and for every $\varepsilon>0$, we have

$$\frac{1}{k}\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u_\varepsilon))\cdot\nabla T_k(u_\varepsilon)\,dx \leq c\,, \tag{13.1.29}$$

$$\frac{1}{k}\int_{\{n\leq u_\varepsilon < n+k\}} a(x,\nabla T_k(u_\varepsilon))\cdot\nabla T_k(u_\varepsilon)\,dx \leq c\,, \tag{13.1.30}$$

$$\frac{1}{k}\int_{\{-n-k < u_\varepsilon\leq -n\}} a(x,\nabla T_k(u_\varepsilon))\cdot\nabla T_k(u_\varepsilon)\,dx \leq c\,. \tag{13.1.31}$$

From (13.1.29) it follows, by a result in [4] (see also [36]), that

$$|\nabla u_\varepsilon|^{p-1} \text{ is bounded in } L^q(\Omega), \text{ for every } q<\tfrac{N}{N-1}. \tag{13.1.32}$$

This implies, again by a result in [4] (see also [36]), that there exists a subsequence of u_ε, still denoted by u_ε, and a measurable function u such that u_ε converges almost everywhere to u, and $T_k(u_\varepsilon)$ converges weakly in $W_0^{1,p}(\Omega)$ to $T_k(u)$ for every $k>0$; moreover, u is almost everywhere finite, and there exists a positive constant c, independent on k and n, such that

$$\frac{1}{k}\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u))\cdot\nabla T_k(u)\,dx \le c \qquad \forall k>0\,,$$

$$\frac{1}{k}\int_{\{n\le u<n+k\}} a(x,\nabla T_k(u))\cdot\nabla T_k(u)\,dx \le c \qquad \forall k>0,\ \forall n\ge 0\,, \tag{13.1.33}$$

$$\frac{1}{k}\int_{\{-n-k<u\le -n\}} a(x,\nabla T_k(u))\cdot\nabla T_k(u)\,dx \le c \qquad \forall k>0,\ \forall n\ge 0\,, \tag{13.1.34}$$

$$|\nabla u|^{p-1} \text{ belongs to } L^q(\Omega), \text{ for every } q<\tfrac{N}{N-1}.$$

Observe that, in this latter case, ∇u is the "approximate gradient" of u, and not (in general) its distributional gradient (in (13.1.33) and (13.1.34) it is the distributional gradient of $T_{n+k}(u)$). Furthermore, by a result of [12],

$$\nabla u_\varepsilon \to \nabla u \qquad \text{almost everywhere in } \Omega.$$

Thus, by (13.1.3), and by the boundedness of $|\nabla u_\varepsilon|^{p-1}$ in $L^q(\Omega)$, for every $q<\frac{N}{N-1}$, it follows that

$$a(x,\nabla u_\varepsilon)\to a(x,\nabla u) \qquad \text{strongly in } (L^q(\Omega))^N, \text{ for every } q<\tfrac{N}{N-1}. \tag{13.1.35}$$

13.2 Approximation of measures

In this Section, we give some results about bounded measures on Ω, and define a fairly general (and suitable for our purposes) way to approximate a measure in $\mathcal{M}_{\rm b}(\Omega)$.

Before giving the results, we recall the definition of p-capacity.

Definition 13.2.1 Let K be a compact subset of Ω. The p-capacity of K with respect to Ω is defined as :

$$\mathrm{cap}_p(K,\Omega)=\inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx : u\in C_{\rm c}^\infty(\Omega),\ u\ge \chi_K\right\},$$

where χ_K is the characteristic function of K ; we will use the convention that $\inf\emptyset = +\infty$. The p-capacity of any open subset A of Ω is then defined by :

$$\mathrm{cap}_p(A,\Omega)=\sup\left\{\mathrm{cap}_p(K,\Omega),\ K \text{ compact},\ K\subset A\right\},$$

and the p-capacity of any Borelian set $B\subset\Omega$ by

$$\mathrm{cap}_p(B,\Omega)=\inf\left\{\mathrm{cap}_p(A,\Omega),\ A \text{ open},\ B\subset A\right\}.$$

We remark that, once the p-capacity has been defined as before, then, for every Borelian subset of Ω,

$$\operatorname{cap}_p(B,\Omega) = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right\},$$

where the infimum is taken over all functions u in $W_0^{1,p}(\Omega)$ such that $u = 1$ cap_p-quasi everywhere on B, and $u \geq 0$ cap_p-quasi everywhere on Ω. In the preceding assertion we have taken for u its cap_p-quasi continuous representative.

Definition 13.2.2 We define $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$ as the set of measures on Ω with bounded total variation.

We define $\mathcal{M}_0(\Omega)$ as the set of measures in $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$ which are absolutely continuous with respect to the p-capacity, that is, μ belongs to $\mathcal{M}_0(\Omega)$ if and only if $\mu(B) = 0$ for every Borelian set B such that $\operatorname{cap}_p(B,\Omega) = 0$.

Proposition 13.2.3 *Let μ_0 be a measure in $\mathcal{M}_0(\Omega)$, and let v be a function in $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Then v belongs to $L^\infty(\Omega,\mu_0)$.*

Proof. Since v belongs to $W_0^{1,p}(\Omega)$, then v has a cap_p-quasi continuous representative, which we continue to denote by v. This representative is defined up to a set of zero p-capacity, so that it is defined μ_0-almost everywhere. Furthermore, since there exists a non negative constant k such that $|v| \leq k$ almost everywhere on Ω, we have that $|v| \leq k$ cap_p-quasi everywhere on Ω, and thus μ_0-almost everywhere on Ω. Thus, v belongs to $L^\infty(\Omega,\mu_0)$. ∎

We recall that if μ is a measure in $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$, and E is a borelian subset of Ω, then the measure $\mu \llcorner E$ is defined by $\mu \llcorner E(B) = \mu(E \cap B)$, for every Borelian subset B of Ω.

We begin with the following decomposition result.

Proposition 13.2.4 *Let μ be a measure in $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$. Then there exists a unique pair (μ_0,λ) of measures in $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$ such that*

$$\mu = \mu_0 + \lambda\,,$$

with μ_0 in $\mathcal{M}_0(\Omega)$, and $\lambda = \mu \llcorner E$, where E is a borelian subset of Ω with $\operatorname{cap}_p(E,\Omega) = 0$.

Proof. See [27], Lemma 2.1. ∎

If λ is the measure given by the preceding proposition, we decompose it, by Hahn theorem, as $\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$, where both λ^+ and λ^- are non negative measures in $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$. Therefore, there exist two subsets of Ω, E^+ and E^-, such that

$$E^+ \cap E^- = \emptyset\,, \qquad E^+ \cup E^- = E\,,$$

and

$$\lambda^+ = \lambda \llcorner E^+\,, \qquad \lambda^- = \lambda \llcorner E^-\,.$$

Thus, we have

$$\mathrm{cap}_p(E^+,\Omega) = \mathrm{cap}_p(E^-,\Omega) = 0\,.$$

Let now δ be a fixed positive number. Due to the regularity of the measures λ^+ and λ^-, there exist two *compact* subsets of Ω, K_δ^+ and K_δ^-, such that

$$K_\delta^+ \subset E^+\,, \qquad K_\delta^- \subset E^-\,,$$

$$\lambda^+(\Omega\backslash K_\delta^+) = \lambda^+(E^+\backslash K_\delta^+) \le \delta\,, \quad \lambda^-(\Omega\backslash K_\delta^-) = \lambda^-(E^-\backslash K_\delta^-) \le \delta\,. \tag{13.2.36}$$

Moreover, since $K_\delta^+ \cap K_\delta^- = \emptyset$ (because $E^+ \cap E^- = \emptyset$), there exist two *open* subsets of Ω, U_δ^+ and U_δ^-, such that

$$K_\delta^+ \subset U_\delta^+\,, \qquad K_\delta^- \subset U_\delta^-\,, \qquad U_\delta^+ \cap U_\delta^- = \emptyset\,.$$

Let us explicitly remark that it may happen that $U_\delta^+ \cap E^- \neq \emptyset$, and/or $U_\delta^- \cap E^+ \neq \emptyset$. Finally, since $\mathrm{cap}_p(E^+,\Omega) = 0$, and $\mathrm{cap}_p(E^-,\Omega) = 0$, we have

$$\mathrm{cap}_p(K_\delta^+,\Omega) = 0\,, \qquad \mathrm{cap}_p(K_\delta^-,\Omega) = 0\,,$$

which implies (see for example [30], Lemma 2.9),

$$\mathrm{cap}_p(K_\delta^+,U_\delta^+) = 0\,, \qquad \mathrm{cap}_p(K_\delta^-,U_\delta^-) = 0\,.$$

Thus, there exist two functions ψ_δ^+ and ψ_δ^-, and two open sets A_δ^+ and A_δ^-, with the following properties :

$$K_\delta^+ \subset A_\delta^+\,, \qquad K_\delta^- \subset A_\delta^-\,, \tag{13.2.37}$$

$$\psi_\delta^+ \in C_{\mathrm{c}}^\infty(U_\delta^+)\,, \qquad \psi_\delta^- \in C_{\mathrm{c}}^\infty(U_\delta^-)\,, \tag{13.2.38}$$

$$0 \le \psi_\delta^+ \le 1\,, \qquad 0 \le \psi_\delta^- \le 1\,, \tag{13.2.39}$$

$$\psi_\delta^+ \equiv 1 \quad \text{on } A_\delta^+, \qquad \psi_\delta^- \equiv 1 \quad \text{on } A_\delta^-, \tag{13.2.40}$$

$$\int_{U_\delta^+} |\nabla \psi_\delta^+|^p\,dx \le \delta\,, \qquad \int_{U_\delta^-} |\nabla \psi_\delta^-|^p\,dx \le \delta\,. \tag{13.2.41}$$

›From now on, we will consider ψ_δ^+ and ψ_δ^- as functions in $C_{\mathrm{c}}^\infty(\Omega)$, setting $\psi_\delta^+ \equiv 0$ and $\psi_\delta^- \equiv 0$ on, respectively, $\Omega\backslash U_\delta^+$ and $\Omega\backslash U_\delta^-$.

In order to deal with μ_0, we recall the following decomposition result.

Proposition 13.2.5 *Let μ_0 be a measure in $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$. Then μ_0 belongs to $\mathcal{M}_0(\Omega)$ if and only if it belongs to $L^1(\Omega)+W^{-1,p'}(\Omega)$. Thus, if μ_0 belongs to $\mathcal{M}_0(\Omega)$, there exist f in $L^1(\Omega)$, and g in $(L^{p'}(\Omega))^N$, such that*

$$\mu_0 = f - \mathrm{div}\,(g)\,, \tag{13.2.42}$$

in the sense of distributions ; moreover one has that

$$\int_\Omega v\,d\mu_0 = \int_\Omega f\,v\,dx - \langle g, v\rangle \qquad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)\,.$$

Proof. See [14], Theorem 2.1. ■

Note that the decomposition (13.2.42) is not unique (see [14]).

Definition 13.2.6 Let μ_ε be a sequence of measures in $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$. We say that μ_ε converges tightly to a measure μ in $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$ if for every φ in $C^0(\overline{\Omega})$ we have

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\Omega \varphi\, d\mu_\varepsilon = \int_\Omega \varphi\, d\mu\,.$$

Let now μ be a measure in $\mathcal{M}_{\mathrm{b}}(\Omega)$. Thanks to propositions 13.2.4 and 13.2.5, we can decompose it as

$$\mu = \mu_0 + \lambda^+ - \lambda^- = f - \mathrm{div}\,(g) + \lambda^+ - \lambda^-\,.$$

As already said in Subsection 13.1.4, we will choose the following approximation of μ :

$$\mu_\varepsilon = f_\varepsilon - \mathrm{div}\,(g_\varepsilon) + (\lambda^+)_\varepsilon - (\lambda^-)_\varepsilon\,,$$

where ε belongs to a sequence of positive numbers that converges to zero, and f_ε, g_ε, $(\lambda^+)_\varepsilon$ and $(\lambda^-)_\varepsilon$ satisfy (13.1.20)–(13.1.23).

Remark 13.2.7 Such an approximation exists, as it is easily seen by approximating separately by convolution f, g, λ^+ and λ^-.

As a consequence of the hypotheses (13.1.20)–(13.1.23) made on the approximations which we consider, we have, for every $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} 0 \le \int_\Omega \psi_\delta^-\,(\lambda^+)_\varepsilon\,dx &= \int_\Omega \psi_\delta^-\,d\lambda^+ + \omega_\delta(\varepsilon) = \int_{U_\delta^-} \psi_\delta^-\,d\lambda^+ + \omega_\delta(\varepsilon) \\ &\le \lambda^+(U_\delta^-) + \omega_\delta(\varepsilon) \le \lambda^+(\Omega\backslash U_\delta^+) + \omega_\delta(\varepsilon) \\ &\le \lambda^+(\Omega\backslash K_\delta^+) + \omega_\delta(\varepsilon)\,, \end{aligned}$$

and so, recalling (13.2.36),

$$\int_\Omega \psi_\delta^-\,(\lambda^+)_\varepsilon\,dx = \omega(\delta,\varepsilon)\,, \qquad \int_\Omega \psi_\delta^-\,d\lambda^+ = \omega(\delta)\,, \tag{13.2.43}$$

In an analogous way, using again (13.2.36), we have

$$\int_\Omega \psi_\delta^+\,(\lambda^-)_\varepsilon\,dx = \omega(\delta,\varepsilon)\,, \qquad \int_\Omega \psi_\delta^+\,d\lambda^- = \omega(\delta)\,. \tag{13.2.44}$$

Let now δ and η be two fixed positive real numbers; since $1 - \psi_\delta^+\,\psi_\eta^+$ belongs to $C^\infty(\Omega)$, and is identically zero on $K_\delta^+ \cap K_\eta^+$, with $0 \le 1 - \psi_\delta^+\,\psi_\eta^+ \le 1$, we have, using the tight convergence of $(\lambda^+)_\varepsilon$ to λ^+,

$$
\begin{aligned}
0 \le \int_\Omega (1-\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+)\,(\lambda^+)_\varepsilon\,dx &= \int_\Omega (1-\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+)\,d\lambda^+ + \omega(\varepsilon) \\
&= \int_{\Omega\setminus(K_\delta^+\cap K_\eta^+)} (1-\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+)\,d\lambda^+ + \omega(\varepsilon) \\
&\le \lambda^+(\Omega\setminus(K_\delta^+\cap K_\eta^+)) + \omega(\varepsilon) \\
&\le \lambda^+(\Omega\setminus K_\delta^+)) + \lambda^+(\Omega\setminus K_\eta^+)) + \omega(\varepsilon) \\
&\le \delta + \eta + \omega(\varepsilon)\,,
\end{aligned}
$$

so that

$$
\int_\Omega (1-\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+)\,(\lambda^+)_\varepsilon\,dx = \omega(\eta,\delta,\varepsilon)\,. \tag{13.2.45}
$$

Reasoning in the same way, we get

$$
\int_\Omega (1-\psi_\delta^-\,\psi_\eta^-)\,(\lambda^-)_\varepsilon\,dx = \omega(\eta,\delta,\varepsilon)\,. \tag{13.2.46}
$$

13.3 Near E

In this Section we study the behaviour of the approximate solutions u_ε near the set E where the measure λ is concentrated; here the meaning of "near E" will be specified through the functions ψ_δ^+ and ψ_δ^- (see the previous Section for the definition of λ, E, ψ_δ^+ and ψ_δ^-). We prove that, in some sense, the sequence u_ε of solutions of (13.1.24) tends to $+\infty$ on a neighbourhood of E^+, and to $-\infty$ on a neighbourhood of E^-; this will reflect on the behaviour of the gradients of $T_k(u_\varepsilon)$.

We recall here, for the convenience of the reader, that u_ε is the unique solution in $W_0^{1,p}(\Omega)$ of

$$
\begin{cases}
-\mathrm{div}\,(a(x,\nabla u_\varepsilon)) = f_\varepsilon - \mathrm{div}\,(g_\varepsilon) + (\lambda^+)_\varepsilon - (\lambda^-)_\varepsilon & \text{in } \Omega, \\
u_\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega,
\end{cases} \tag{13.3.47}
$$

in the sense (13.1.6). and that f_ε, g_ε, $(\lambda^+)_\varepsilon$ and $(\lambda^-)_\varepsilon$ satisfy (13.1.20)–(13.1.23). We will also suppose that we have already extracted a subsequence, still denoted by u_ε, such that (13.1.29)–(13.1.35) hold true.

Our first result is the following.

Lemma 13.3.1 *Let f_ε, g_ε, $(\lambda^+)_\varepsilon$ and $(\lambda^-)_\varepsilon$ be sequences of functions satisfying (13.1.20)–(13.1.23). Let u_ε be the solution of (13.3.47), and suppose to have extracted form u_ε a subsequence, still denoted by u_ε, such that (13.1.29)–(13.1.35) hold. Let η be a positive real number, and let φ_+ and φ_- be two non negative functions in $W^{1,\infty}(\Omega)$ such that*

$$
0 \le \int_\Omega \varphi_-\,d\lambda^+ \le \eta\,, \qquad 0 \le \int_\Omega \varphi_+\,d\lambda^- \le \eta\,. \tag{13.3.48}
$$

We then have

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{\{n\le u_\varepsilon<2n\}} a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,\varphi_-\,dx \le \omega_\eta(n,\varepsilon)+\eta\,, \\ \displaystyle\int_{\{u_\varepsilon>2n\}} \varphi_-\,(\lambda^-)_\varepsilon\,dx \le \omega_\eta(n,\varepsilon)+\eta\,, \end{cases} \tag{13.3.49}$$

and

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{\{-2n<u_\varepsilon\le -n\}} a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,\varphi_+\,dx \le \omega_\eta(n,\varepsilon)+\eta\,, \\ \displaystyle\int_{\{u_\varepsilon<-2n\}} \varphi_+\,(\lambda^+)_\varepsilon\,dx \le \omega_\eta(n,\varepsilon)+\eta\,. \end{cases} \tag{13.3.50}$$

Remark 13.3.2 We are going to comment on the results of the previous lemma. We will discuss only (13.3.49), since the same comments can be made for (13.3.50).

The first inequality of (13.3.49) says, in some sense, that the energy of u_ε on the set $\{n \le u_\varepsilon < 2n\}$, once divided by n, vanishes as ε tends to zero, and then n tends to infinity, on the set where λ^+ is not concentrated. In contrast, note that

$$\frac{1}{n}\int_{\{n\le u_\varepsilon<2n\}} a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,dx\,,$$

is bounded with respect to both n and ε (see (13.1.30) with $k = n$ and use the coercivity (13.1.2)), but does not converge to zero as ε tends to zero and then n tends to infinity (see (13.5.108), in Section 13.5).

The second part of (13.3.49) describes a similar fact, for what concerns $(\lambda^-)_\varepsilon$: even if we use a test function which is concentrated where $(\lambda^-)_\varepsilon$ is concentrated (indeed, no hypotheses are required on the behaviour of φ_- with respect to λ^-), the fact that we restrict our attention to the set where u_ε is larger than $2n$ yields a quantity that converges to zero.

Proof of Lemma 13.3.1. Let $\beta_n^+(s) = B_{n,n}(s^+)$, where $B_{n,n}$ is defined in (13.1.28) ; if we consider the sequence $\beta_n^+(u_\varepsilon)$, we then have

$$\int_\Omega |\nabla\beta_n^+(u_\varepsilon)|^p\,dx = \frac{1}{n^p}\int_{\{n\le u_\varepsilon<2n\}} |\nabla u_\varepsilon|^p\,dx \le \frac{c}{n^{p-1}}\,, \tag{13.3.51}$$

by (13.1.30) and the coercivity (13.1.2).

Fix now n and let ε tend to zero. Since $\beta_n^+(0) = 0$, the sequence $\beta_n^+(u_\varepsilon)$ is bounded thus in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Furthermore, since u_ε converges to u almost everywhere, and since $\beta_n^+(s)$ is continuous and bounded by 1, we have

$$\beta_n^+(u_\varepsilon) \to \beta_n^+(u) \quad \text{almost everywhere and weakly}* \text{ in } L^\infty(\Omega). \tag{13.3.52}$$

This fact, together with (13.3.51), implies

$$\beta_n^+(u_\varepsilon) \to \beta_n^+(u) \quad \text{weakly in } W_0^{1,p}(\Omega). \tag{13.3.53}$$

Using weak lower semicontinuity in (13.3.51), we have

$$\int_\Omega |\nabla \beta_n^+(u)|^p\,dx = \frac{1}{n}\int_{\{n\le u<2n\}} |\nabla u|^p\,dx \le \frac{c}{n^{p-1}}\,. \tag{13.3.54}$$

Since $\beta_n^+(0) = 0$, and since $\beta_n^+(s)$ is bounded by 1, (13.3.54) implies that

$$\beta_n^+(u) \to 0 \quad \text{almost everywhere and weakly}\ast \text{ in } L^\infty(\Omega), \tag{13.3.55}$$

and that

$$\beta_n^+(u) \to 0 \quad \text{weakly in } W_0^{1,p}(\Omega). \tag{13.3.56}$$

We now choose $\beta_n^+(u_\varepsilon)\,\varphi_-$ as test function in (13.3.47) (this choice is admissible since the function belongs to $W_0^{1,p}(\Omega)$). We obtain

$$\frac{1}{n}\int_{\{n\le u_\varepsilon<2n\}} a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,\varphi_-\,dx \tag{A}$$

$$+\int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla\varphi_-\,\beta_n^+(u_\varepsilon)\,dx \tag{B}$$

$$=\int_\Omega f_\varepsilon\,\beta_n^+(u_\varepsilon)\,\varphi_-\,dx \tag{C}$$

$$-\langle \operatorname{div}(g_\varepsilon), \beta_n^+(u_\varepsilon)\,\varphi_-\rangle \tag{D}$$

$$+\int_\Omega \beta_n^+(u_\varepsilon)\,\varphi_-\,(\lambda^+)_\varepsilon\,dx \tag{E}$$

$$-\int_\Omega \beta_n^+(u_\varepsilon)\,\varphi_-\,(\lambda^-)_\varepsilon\,dx\,. \tag{F}$$

Recalling that $a(x,\nabla u_\varepsilon)$ converges to $a(x,\nabla u)$ strongly in $(L^q(\Omega))^N$ for every $q<\frac{N}{N-1}$ by (13.1.35), that φ_- belongs to $W^{1,\infty}(\Omega)$, that (13.3.52) holds, and using (13.3.55), we obtain

$$(\mathrm{B}) = \int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi_-\,\beta_n^+(u)\,dx + \omega_n(\varepsilon) = \omega(n,\varepsilon)\,. \tag{13.3.57}$$

Moreover, using Lemma 13.1.21, (13.3.52), the weak $L^1(\Omega)$ convergence of f_ε to f, and (13.3.55), we have

$$(\mathrm{C}) = \int_\Omega f\,\beta_n^+(u)\,\varphi_-\,dx + \omega_n(\varepsilon) = \omega(n,\varepsilon)\,. \tag{13.3.58}$$

Furthermore,

$$(\mathrm{D}) = -\langle \operatorname{div}(g), \beta_n^+(u)\,\varphi_-\rangle + \omega_n(\varepsilon) = \omega(n,\varepsilon)\,, \tag{13.3.59}$$

due to the strong convergence (13.1.21) of $-\operatorname{div}(g_\varepsilon)$ to $-\operatorname{div}(g)$ in $W^{-1,p'}(\Omega)$ and to (13.3.53) (for the first limit), and to (13.3.56) (for the second). Finally, since $\beta_n^+(u_\varepsilon)$ is non negative, and φ_- is continuous,

$$(\mathrm{E}) \le \int_\Omega \varphi_-\,(\lambda^+)_\varepsilon\,dx = \int_\Omega \varphi_-\,d\lambda^+ + \omega(\varepsilon) \le \eta + \omega(\varepsilon)\,, \tag{13.3.60}$$

where we have used (13.3.48) in the last passage. Thus, observing that

$$-(\mathrm{F}) \geq \int_{\{u_\varepsilon > 2n\}} \varphi_- \, (\lambda^-)_\varepsilon \, dx \,, \tag{13.3.61}$$

we obtain, putting together (13.3.57)–(13.3.61),

$$\frac{1}{n} \int_{\{n \leq u_\varepsilon < 2n\}} a(x, \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla u_\varepsilon \, \varphi_- \, dx + \int_{\{u_\varepsilon > 2n\}} \varphi_- \, (\lambda^-)_\varepsilon \, dx \leq \omega(n, \varepsilon) + \eta \,,$$

which is (13.3.49) since both terms are non negative.

Estimate (13.3.50) can be obtained exactly in the same way, using $\beta_n^-(s) = B_{n,n}(s^-)$, and φ_+ as test functions, as well as the second part of (13.3.48). ∎

Lemma 13.3.3 *Let k be a positive real number. Let f_ε, g_ε, $(\lambda^+)_\varepsilon$ and $(\lambda^-)_\varepsilon$ be sequences of functions satisfying (13.1.20)–(13.1.23). Let u_ε be the solution of (13.3.47), and suppose to have extracted form u_ε a subsequence, still denoted by u_ε, such that (13.1.29)–(13.1.35) hold. Let ψ_δ^+ and ψ_δ^-, as well as ψ_η^+ and ψ_η^-, be functions which satisfy (13.2.38)–(13.2.41). Then the following holds*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega a(x, \nabla T_k(u_\varepsilon)) \cdot \nabla T_k(u_\varepsilon) \, \psi_\delta^+ \, \psi_\eta^+ \, dx = \omega(\eta, \delta, \varepsilon) \,, \\ \displaystyle\int_{\{-n \leq u_\varepsilon \leq k\}} (k - T_k(u_\varepsilon)) \, \psi_\delta^+ \, \psi_\eta^+ \, (\lambda^+)_\varepsilon \, dx = \omega(\eta, n, \delta, \varepsilon) \,. \end{cases} \tag{13.3.62}$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega a(x, \nabla T_k(u_\varepsilon)) \cdot \nabla T_k(u_\varepsilon) \, \psi_\delta^- \, \psi_\eta^- \, dx = \omega(\eta, \delta, \varepsilon) \,, \\ \displaystyle\int_{\{-k \leq u_\varepsilon \leq n\}} (k + T_k(u_\varepsilon)) \, \psi_\delta^- \, \psi_\eta^- \, (\lambda^-)_\varepsilon \, dx = \omega(\eta, n, \delta, \varepsilon) \,. \end{cases} \tag{13.3.63}$$

Remark 13.3.4 As in Remark 13.3.2, some comments are in order. The first result in (13.3.62) can be seen as a result giving some properties of $T_k(u_\varepsilon)$ and $T_k(u)$ near the set E^+. Indeed, using the almost everywhere convergence of $a(x, \nabla T_k(u_\varepsilon)) \cdot \nabla T_k(u_\varepsilon)$ to $a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u)$ and Fatou lemma (since, by the coercivity condition (13.1.2), $a(x, \nabla T_k(u_\varepsilon)) \cdot \nabla T_k(u_\varepsilon)$ is non negative), we obtain

$$\int_\Omega a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \, \psi_\delta^+ \, \psi_\eta^+ \, dx = \omega(\eta, \delta) \,,$$

so that, since $\psi_\delta^+ \, \psi_\eta^+ \equiv 1$ on $A_\delta^+ \cap A_\eta^+$, we have

$$\int_{A_\delta^+ \cap A_\eta^+} a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \, dx = \omega(\eta, \delta) \,,$$

for every $k > 0$. This means that u is very large near the set E^+, so that $T_k(u)$ is equal to k, and thus its gradient is zero near E^+.

The second inequality of (13.3.62) states the same fact in terms of λ^+ : the set where u is smaller than k, has little (and, actually, zero) measure with respect to λ^+. Since k is arbitrary, this means, *grosso modo*, that u is λ^+ almost everywhere positively infinite on E^+.

The same remarks can be made on (13.3.63).

Proof of Lemma 13.3.3. Let $k>0$ be fixed, and let n in $\mathbf{N}$ be such that $n>k$. Let $h_n(s)=H_{n,n}(s)$, where $H_{n,n}$ is defined in (13.1.27). Reasoning as in the proof of Lemma 13.3.1 (that is, using again (13.1.30)), and observing that $h_n(u_\varepsilon)$ is bounded by 1, we get that for n fixed

$$h_n(u_\varepsilon)\to h_n(u) \quad \text{almost everywhere and weakly}* \text{ in } L^\infty(\Omega), \tag{13.3.64}$$

$$h_n(u_\varepsilon)\to h_n(u) \quad \text{weakly in } W^{1,p}(\Omega). \tag{13.3.65}$$

We choose as test function in (13.3.47)

$$(k-T_k(u_\varepsilon))\,h_n(u_\varepsilon)\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+\,,$$

which is admissible since it belongs to $W_0^{1,p}(\Omega)$. We obtain

$$
\begin{aligned}
&-\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u_\varepsilon))\cdot\nabla T_k(u_\varepsilon)\,h_n(u_\varepsilon)\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+\,dx && \text{(A)}\\
&\quad+\int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,h_n'(u_\varepsilon)(k-T_k(u_\varepsilon))\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+\,dx && \text{(B)}\\
&\quad+\int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla\psi_\delta^+\,h_n(u_\varepsilon)(k-T_k(u_\varepsilon))\,\psi_\eta^+\,dx && \text{(C)}\\
&\quad+\int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla\psi_\eta^+\,h_n(u_\varepsilon)(k-T_k(u_\varepsilon))\,\psi_\delta^+\,dx && \text{(D)}\\
&=\int_\Omega f_\varepsilon\,(k-T_k(u_\varepsilon))\,h_n(u_\varepsilon)\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+\,dx && \text{(E)}\\
&\quad-\langle \operatorname{div}(g_\varepsilon),(k-T_k(u_\varepsilon))\,h_n(u_\varepsilon)\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+\rangle && \text{(F)}\\
&\quad+\int_\Omega (k-T_k(u_\varepsilon))\,h_n(u_\varepsilon)\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+\,(\lambda^+)_\varepsilon\,dx && \text{(G)}\\
&\quad-\int_\Omega (k-T_k(u_\varepsilon))\,h_n(u_\varepsilon)\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+\,(\lambda^-)_\varepsilon\,dx\,. && \text{(H)}
\end{aligned}
$$

Since n is larger than k, then $k-T_k(u_\varepsilon)=2k$ on the set $\{-2n<u_\varepsilon\le -n\}$, and $k-T_k(u_\varepsilon)=0$ on the set $\{n\le u_\varepsilon<2n\}$, we have

$$
\begin{aligned}
\text{(B)} &= \frac{1}{n}\int_{\{-2n<u_\varepsilon\le -n\}} a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,(k-T_k(u_\varepsilon))\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+\,dx\\
&\quad-\frac{1}{n}\int_{\{n\le u_\varepsilon<2n\}} a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,(k-T_k(u_\varepsilon))\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+\,dx\,.\\
&= \frac{2k}{n}\int_{\{-2n<u_\varepsilon\le -n\}} a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+\,dx\,,
\end{aligned}
$$

and so, since the integrand functions are non negative, and $\psi_\delta^+\le 1$, we have

$$\text{(B)}\le\frac{2k}{n}\int_{\{-2n<u_\varepsilon\le -n\}} a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,\psi_\eta^+\,dx\,.$$

Thus, by (13.3.50), which we can apply since $\varphi_+=\psi_\eta^+$ is such that (13.3.48) holds thanks to (13.2.44),

$$\text{(B)}=\omega(\eta,n,\varepsilon)\,. \tag{13.3.66}$$

Furthermore, since for k fixed $k-T_k(u_\varepsilon)$ converges to $k-T_k(u)$ in the weak$*$ topology of $L^\infty(\Omega)$, and since (13.3.64) holds, we have, since $\operatorname{supp}(h_n)=[-2n,2n]$,

$$(\mathrm{C}) = \int_\Omega a(x,\nabla T_{2n}(u))\cdot\nabla\psi_\delta^+\, h_n(u)(k-T_k(u))\,\psi_\eta^+\,dx + \omega_{\eta,n,\delta}(\varepsilon) = \omega_{\eta,n}(\delta,\varepsilon)\,, \tag{13.3.67}$$

where the last statement is due to the fact that ψ_δ^+ converges strongly to zero in $W_0^{1,p}(\Omega)$ (see (13.2.41)), that $a(x,\nabla T_{2n}(u))\,h_n(u)$ belongs to $(L^{p'}(\Omega))^N$, while $(k-T_k(u))\,\psi_\eta^+$ belongs to $L^\infty(\Omega)$. Similarly, we have

$$(\mathrm{D}) = \int_\Omega a(x,\nabla T_{2n}(u))\cdot\nabla\psi_\eta^+\, h_n(u)(k-T_k(u))\,\psi_\delta^+\,dx + \omega_{\eta,n,\delta}(\varepsilon) = \omega_{\eta,n}(\delta,\varepsilon)\,. \tag{13.3.68}$$

As for the right hand side, we have, by Lemma 13.1.21,

$$(\mathrm{E}) = \int_\Omega f\,(k-T_k(u))\,h_n(u)\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+\,dx + \omega_{\eta,n,\delta}(\varepsilon) = \omega_{\eta,n}(\delta,\varepsilon)\,, \tag{13.3.69}$$

since f_ε converges weakly to f in $L^1(\Omega)$, since (13.3.64) holds, and since $k-T_k(u_\varepsilon)$ converges to $k-T_k(u)$ weakly$*$ in $L^\infty(\Omega)$ and almost everywhere ; the second limit is performed using again the fact that ψ_δ^+ converges to zero in the weak$*$ topology of $L^\infty(\Omega)$, while the term $f\,(k-T_k(u))\,h_n(u)\,\psi_\eta^+$ belongs to $L^1(\Omega)$.

We then have

$$(\mathrm{F}) = -\langle \operatorname{div}(g), (k-T_k(u))\,h_n(u)\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+\rangle + \omega_{\eta,n,\delta}(\varepsilon)\,,$$

since $-\operatorname{div}(g_\varepsilon)$ converges to $-\operatorname{div}(g)$ strongly in $W^{-1,p'}(\Omega)$, while, as ε tends to zero, the sequence $(k-T_k(u_\varepsilon))\,h_n(u_\varepsilon)\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+$ converges to $(k-T_k(u))\,h_n(u)\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+$ weakly in $W_0^{1,p}(\Omega)$ (this easily follows from the weak convergence of $T_k(u_\varepsilon)$ to $T_k(u)$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ and from (13.3.64) and (13.3.65)). Thus, since $(k-T_k(u))\,h_n(u)\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+$ converges strongly to zero in $W_0^{1,p}(\Omega)$ as δ tends to zero (this is due to (13.2.41)), we have

$$(\mathrm{F}) = \omega_{\eta,n}(\delta,\varepsilon)\,. \tag{13.3.70}$$

Finally, thanks to (13.2.44),

$$-\,(\mathrm{H}) \le 2k\int_\Omega \psi_\eta^+\,(\lambda^-)_\varepsilon\,dx = 2k\int_\Omega \psi_\eta^+\,d\lambda^- + \omega_\eta(\varepsilon) \le 2k\eta + \omega_\eta(\varepsilon) = \omega(\eta,\varepsilon)\,. \tag{13.3.71}$$

Putting together (13.3.66)–(13.3.71), we have

$$-(\mathrm{A}) + (\mathrm{G}) = \omega(\eta,n,\delta,\varepsilon)\,. \tag{13.3.72}$$

Since $n > k$ we have

$$-(\mathrm{A}) = \int_\Omega a(x,\nabla T_k(u_\varepsilon))\cdot\nabla T_k(u_\varepsilon)\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+\,dx\,,$$

and

$$(\mathrm{G}) \geq \int_{\{-n \leq u_\varepsilon \leq k\}} (k - T_k(u_\varepsilon))\, \psi_\delta^+\, \psi_\eta^+\, (\lambda^+)_\varepsilon\, dx\,,$$

(13.3.72) implies (13.3.62).

The estimate (13.3.63) is obtained in the same way, choosing as test function

$$(k + T_k(u_\varepsilon))\, h_n(u_\varepsilon)\, \psi_\delta^-\, \psi_\eta^-\,,$$

and using the corresponding properties of ψ_δ^-, ψ_η^-, $(\lambda^+)_\varepsilon$ and $(\lambda^-)_\varepsilon$. ∎

13.4 Far from E

This section will be devoted to the proof of the following result.

Lemma 13.4.1 *Let k be a positive real number. Let f_ε, g_ε, $(\lambda^+)_\varepsilon$ and $(\lambda^-)_\varepsilon$ be sequences of functions satisfying (13.1.20)–(13.1.23). Let u_ε be the solution of (13.3.47), and suppose to have extracted form u_ε a subsequence, still denoted by u_ε, such that (13.1.29)–(13.1.35) hold. Let ψ_δ^+ and ψ_δ^-, as well as ψ_η^+ and ψ_η^-, be functions which satisfy (13.2.38)–(13.2.41), and define, for $\delta > 0$ and $\eta > 0$*

$$\Phi_{\delta,\eta} = \psi_\delta^+\, \psi_\eta^+ + \psi_\delta^-\, \psi_\eta^-\,. \tag{13.4.73}$$

Then we have the following

$$\left| \int_\Omega a(x, \nabla T_k(u_\varepsilon)) \cdot \nabla T_k(u_\varepsilon)\, (1 - \Phi_{\delta,\eta})\, dx \right. \\ \left. - \int_\Omega a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u)\, (1 - \Phi_{\delta,\eta})\, dx \right| = \omega(\eta, \delta, \varepsilon)\,. \tag{13.4.74}$$

Remark 13.4.2 The meaning of (13.4.74) is, roughly speaking, that $a(x, \nabla T_k(u_\varepsilon)) \cdot \nabla T_k(u_\varepsilon)$ strongly converges to $a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u)$ in $L^1(\Omega)$ if we stay away from E.

We split the proof into various lemmas. We begin with the following result.

Lemma 13.4.3 *Under the hypotheses of Lemma 13.4.1 we have*

$$\left| \int_\Omega a(x, \nabla T_k(u_\varepsilon)) \cdot \nabla T_k(u_\varepsilon)\, (1 - \Phi_{\delta,\eta})\, dx \right. \\ - \int_\Omega a(x, \nabla u) \cdot \nabla \Phi_{\delta,\eta}\, T_k(u)\, dx \\ - \int_\Omega f\, (1 - \Phi_{\delta,\eta})\, T_k(u)\, dx \\ \left. + \langle \mathrm{div}\,(g), (1 - \Phi_{\delta,\eta})\, T_k(u) \rangle \right| = \omega(\eta, \delta, \varepsilon)\,. \tag{13.4.75}$$

Proof. We choose $(1-\Phi_{\delta,\eta})\,T_k(u_\varepsilon)$ as test function in (13.3.47) (this can be done since this function belongs to $W_0^{1,p}(\Omega))$; we get

$$\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u_\varepsilon))\cdot\nabla T_k(u_\varepsilon)\,(1-\Phi_{\delta,\eta})\,dx \tag{A}$$

$$-\int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla\Phi_{\delta,\eta}\,T_k(u_\varepsilon)\,dx \tag{B}$$

$$=\int_\Omega f_\varepsilon\,(1-\Phi_{\delta,\eta})\,T_k(u_\varepsilon)\,dx \tag{C}$$

$$-\langle \operatorname{div}(g_\varepsilon),(1-\Phi_{\delta,\eta})\,T_k(u_\varepsilon)\rangle \tag{D}$$

$$+\int_\Omega (1-\Phi_{\delta,\eta})\,T_k(u_\varepsilon)\,(\lambda^+)_\varepsilon\,dx \tag{E}$$

$$-\int_\Omega (1-\Phi_{\delta,\eta})\,T_k(u_\varepsilon)\,(\lambda^-)_\varepsilon\,dx\,. \tag{F}$$

Since $\Phi_{\delta,\eta}$ belongs to $C_c^\infty(\Omega)$, since $a(x,\nabla u_\varepsilon)$ converges to $a(x,\nabla u)$ strongly in $(L^q(\Omega))^N$ for every $q<\frac{N}{N-1}$ by (13.1.35), and since $T_k(u_\varepsilon)$ converges weakly$*$ in $L^\infty(\Omega)$ and almost everywhere to $T_k(u)$, we have

$$\text{(B)}=\int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla\Phi_{\delta,\eta}\,T_k(u)\,dx+\omega_{\eta,\delta}(\varepsilon)\,. \tag{13.4.76}$$

Since for η and δ fixed, $(1-\Phi_{\delta,\eta})\,T_k(u_\varepsilon)$ converges to $(1-\Phi_{\delta,\eta})\,T_k(u)$ weakly$*$ in $L^\infty(\Omega)$ and almost everywhere in Ω, while f_ε converges weakly to f in $L^1(\Omega)$, we get, by Lemma 13.1.21,

$$\text{(C)}=\int_\Omega f\,(1-\Phi_{\delta,\eta})\,T_k(u)\,dx+\omega_{\eta,\delta}(\varepsilon)\,. \tag{13.4.77}$$

Since for η and δ fixed, $(1-\Phi_{\delta,\eta})\,T_k(u_\varepsilon)$ converges to $(1-\Phi_{\delta,\eta})\,T_k(u)$ weakly in $W_0^{1,p}(\Omega)$, and since $-\operatorname{div}(g_\varepsilon)$ converges to $-\operatorname{div}(g)$ strongly in $W^{-1,p'}(\Omega)$, we obtain

$$\text{(D)}=-\langle \operatorname{div}(g),(1-\Phi_{\delta,\eta})\,T_k(u)\rangle+\omega_{\eta,\delta}(\varepsilon)\,. \tag{13.4.78}$$

For (E), we have, using the tight convergence of $(\lambda^+)_\varepsilon$ to λ^+, the definition (13.4.73) of $\Phi_{\delta,\eta}$, and (13.2.45) and (13.2.43),

$$\begin{aligned}
|\text{(E)}| &\le k\int_\Omega (1-\Phi_{\delta,\eta})\,(\lambda^+)_\varepsilon\,dx = k\int_\Omega(1-\Phi_{\delta,\eta})\,d\lambda^+ +\omega_{\eta,\delta}(\varepsilon)\\
&\le k\int_\Omega (1-\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+)\,d\lambda^+ + k\int_\Omega \psi_\delta^-\,\psi_\eta^-\,d\lambda^+ +\omega_{\eta,\delta}(\varepsilon)\\
&\le k\int_\Omega (1-\psi_\eta^+)\,d\lambda^+ + k\int_\Omega \psi_\eta^-\,d\lambda^+ +\omega_\eta(\delta,\varepsilon)\\
&= \omega(\eta,\delta,\varepsilon)\,.
\end{aligned} \tag{13.4.79}$$

In the same way, using (13.2.46) and (13.2.44), we obtain

$$|\text{(F)}|=\omega(\eta,\delta,\varepsilon)\,. \tag{13.4.80}$$

Putting together (13.4.76)–(13.4.80), we obtain (13.4.75). ∎

Lemma 13.4.4 *Under the hypotheses of Lemma 13.4.1, we have*

$$\frac{1}{n}\int_{\{n\leq|u_\varepsilon|<2n\}} a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,(1-\Phi_{\delta,\eta})\,dx=\omega(\eta,\delta,n,\varepsilon)\,. \tag{13.4.81}$$

Proof. We split the left hand side of (13.4.81) into the sum of four terms :

$$\frac{1}{n}\int_{\{n\leq u_\varepsilon<2n\}} a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,(1-\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+)\,dx\,,$$

$$-\frac{1}{n}\int_{\{n\leq u_\varepsilon<2n\}} a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,\psi_\delta^-\,\psi_\eta^-\,dx\,,$$

$$\frac{1}{n}\int_{\{-2n<u_\varepsilon\leq -n\}} a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,(1-\psi_\delta^-\,\psi_\eta^-)\,dx\,,$$

and

$$-\frac{1}{n}\int_{\{-2n<u_\varepsilon\leq 2n\}} a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+\,dx\,.$$

For every term above we can apply the result of Lemma 13.3.1. Indeed, if we define $\varphi_-=1-\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+$, we have, by (13.2.45),

$$\int_\Omega \varphi_-\,d\lambda^+\leq\delta+\eta\,,$$

and so φ_- satisfies (13.3.48) ; this implies, by (13.3.49), that

$$\frac{1}{n}\int_{\{n\leq u_\varepsilon<2n\}} a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,(1-\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+)\,dx\leq\omega_{\eta,\delta}(n,\varepsilon)+\delta+\eta=\omega(\eta,\delta,n,\varepsilon)\,.$$

The same thing clearly holds if we define $\varphi_+=1-\psi_\delta^-\,\psi_\eta^-$ and use (13.2.46), so that we get

$$\frac{1}{n}\int_{\{-2n<u_\varepsilon\leq -n\}} a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,(1-\psi_\delta^-\,\psi_\eta^-)\,dx\leq\omega\eta,\delta(n,\varepsilon)+\delta+\eta=\omega(\eta,\delta,n,\varepsilon)\,.$$

Moreover, if we set $\varphi_-=\psi_\delta^-\,\psi_\eta^-$, we have

$$\int_\Omega \varphi^-\,d\lambda^+\leq\int_\Omega \psi_\eta^-\,d\lambda^+\leq\eta\,,$$

by (13.2.43) ; this implies, again by Lemma 13.3.1, that

$$\frac{1}{n}\int_{\{n\leq u_\varepsilon<2n\}} a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,\psi_\delta^-\,\psi_\eta^-\,dx\leq\omega_{\eta,\delta}(n,\varepsilon)+\eta=\omega(\eta,\delta,n,\varepsilon)\,.$$

The same technique, with $\varphi_+=\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+$, yields

$$\frac{1}{n}\int_{\{-2n<u_\varepsilon\leq 2n\}} a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+\,dx\leq\omega_{\eta,\delta}(n,\varepsilon)=\omega(\eta,\delta,n,\varepsilon)\,.$$

Putting together the estimates we have obtained on the four terms, we get (13.4.81). ∎

Lemma 13.4.5 *Under the hypotheses of Lemma 13.4.1, we have*

$$\begin{aligned}\Big| \int_\Omega & a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u)\,(1-\Phi_{\delta,\eta})\,dx \\ & - \int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot \nabla\Phi_{\delta,\eta}\,T_k(u)\,dx \\ & - \int_\Omega f\,(1-\Phi_{\delta,\eta})\,T_k(u)\,dx \\ & + \langle \mathrm{div}\,(g), (1-\Phi_{\delta,\eta})\,T_k(u)\rangle \Big| = \omega(\eta,\delta)\,.\end{aligned} \tag{13.4.82}$$

Proof. Let $k>0$ be fixed, let $n \in \mathbf{N}$ be such that $n>k$, and define $h_n(s) = H_{n,n}(s)$ as in the proof of Lemma 13.3.3 ; we thus have that $h_n(u_\varepsilon)$ satisfies (13.3.64) and (13.3.65). Moreover, using the definition of h_n and (13.3.64) and (13.3.65) with $k=n$, we have

$$h_n(u) \to 1 \quad \text{almost everywhere and weakly}* \text{ in } L^\infty(\Omega), \tag{13.4.83}$$

$$h_n(u) \to 1 \quad \text{weakly in } W^{1,p}(\Omega). \tag{13.4.84}$$

We choose as test function in (13.3.47)

$$T_k(u)(1-\Phi_{\delta,\eta})\,h_n(u_\varepsilon)\,,$$

which belongs to $W_0^{1,p}(\Omega)$. We obtain

$$\begin{aligned}\int_\Omega & a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla T_k(u)\,(1-\Phi_{\delta,\eta})\,h_n(u_\varepsilon)\,dx && \text{(A)}\\ & - \int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla\Phi_{\delta,\eta}\,T_k(u)\,h_n(u_\varepsilon)\,dx && \text{(B)}\\ & + \int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,T_k(u)\,(1-\Phi_{\delta,\eta})\,h_n'(u_\varepsilon)\,dx && \text{(C)}\\ = \int_\Omega & f_\varepsilon\,T_k(u)\,(1-\Phi_{\delta,\eta})\,h_n(u_\varepsilon)\,dx && \text{(D)}\\ & - \langle \mathrm{div}\,(g_\varepsilon), T_k(u)\,(1-\Phi_{\delta,\eta})\,h_n(u_\varepsilon)\rangle && \text{(E)}\\ & + \int_\Omega T_k(u)\,(1-\Phi_{\delta,\eta})\,h_n(u_\varepsilon)\,(\lambda^+)_\varepsilon\,dx && \text{(F)}\\ & - \int_\Omega T_k(u)\,(1-\Phi_{\delta,\eta})\,h_n(u_\varepsilon)\,(\lambda^-)_\varepsilon\,dx\,. && \text{(G)}\end{aligned}$$

Since $a(x,\nabla u_\varepsilon)\,h_n(u_\varepsilon) = a(x,\nabla T_{2n}(u_\varepsilon))\,h_n(u_\varepsilon)$, the sequence $a(x,\nabla u_\varepsilon)\,h_n(u_\varepsilon)$ converges to $a(x,\nabla T_{2n}(u))\,h_n(u)$ weakly in $(L^{p'}(\Omega))^N$ as ε tends to zero. Thus, we have, since $n>k$,

$$\begin{aligned}\text{(A)} &= \int_\Omega a(x,\nabla T_{2n}(u))\cdot\nabla T_k(u)\,(1-\Phi_{\delta,\eta})\,h_n(u)\,dx + \omega_{\eta,\delta,n}(\varepsilon)\\ &= \int_\Omega a(x,\nabla T_k(u))\cdot\nabla T_k(u)\,(1-\Phi_{\delta,\eta})\,dx + \omega_{\eta,\delta}(n,\varepsilon)\,.\end{aligned} \tag{13.4.85}$$

Moreover, we have

$$\begin{aligned}
\text{(B)} &= -\int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla\Phi_{\delta,\eta}\,T_k(u)\,h_n(u)\,dx+\omega_{\eta,\delta,n}(\varepsilon)\\
&= -\int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla\Phi_{\delta,\eta}\,T_k(u)\,dx+\omega_{\eta,\delta}(n,\varepsilon)\,,
\end{aligned}\tag{13.4.86}$$

where the first statement holds since $a(x,\nabla u_\varepsilon)$ converges strongly to $a(x,\nabla u)$ in $(L^q(\Omega))^N$, for every $q<\frac{N}{N-1}$, $\Phi_{\delta,\eta}$ belongs to $C_c^\infty(\Omega)$, and $h_n(u_\varepsilon)$ satisfies (13.3.64) ; the second one is due to (13.4.83). Furthermore, by the result of Lemma 13.4.4,

$$|(\mathrm{C})|\le\frac{k}{n}\int_{\{n\le|u_\varepsilon|<2n\}}a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,(1-\Phi_{\delta,\eta})\,dx=\omega(\eta,\delta,n,\varepsilon)\,,\tag{13.4.87}$$

As for the right hand side, we have

$$\begin{aligned}
\text{(D)} &= \int_\Omega f\,T_k(u)\,(1-\Phi_{\delta,\eta})\,h_n(u)\,dx+\omega_{\eta,\delta,n}(\varepsilon)\\
&= \int_\Omega f\,T_k(u)\,(1-\Phi_{\delta,\eta})\,dx+\omega_{\eta,\delta}(n,\varepsilon)\,,
\end{aligned}\tag{13.4.88}$$

by (13.3.64), and by the weak convergence of f_ε to f weakly in $L^1(\Omega)$ (we have applied again Lemma 13.1.21) ; the second statement is due to (13.4.83). Moreover,

$$\begin{aligned}
\text{(E)} &= -\langle\operatorname{div}(g),T_k(u)\,(1-\Phi_{\delta,\eta})\,h_n(u)\rangle+\omega_{\eta,\delta,n}(\varepsilon)\\
&= -\langle\operatorname{div}(g),T_k(u)\,(1-\Phi_{\delta,\eta})\rangle+\omega_{\eta,\delta}(n,\varepsilon)\,,
\end{aligned}\tag{13.4.89}$$

where the first statement holds since $-\operatorname{div}(g_\varepsilon)$ converges to $-\operatorname{div}(g)$ strongly in $W^{-1,p'}(\Omega)$, while $h_n(u_\varepsilon)$ satisfies (13.3.65), while the second one is due to the fact that $h_n(u)$ satisfies (13.4.84). The two remaining terms are estimated as follows using (13.2.45) and (13.2.43) :

$$|(\mathrm{F})|\le k\int_\Omega(1-\Phi_{\delta,\eta})\,(\lambda^+)_\varepsilon\,dx\le\omega(\eta,\delta,\varepsilon)\,.\tag{13.4.90}$$

Analogously, we get

$$|(\mathrm{G})|\le\omega(\eta,\delta,\varepsilon)\,.\tag{13.4.91}$$

Putting together (13.4.85)–(13.4.91), we have proved (13.4.82), since the right hand isde of (13.4.82) does not depend on ε. ■

Proof of Lemma 13.4.1. It is enough to put together the estimates (13.4.75) and (13.4.82) in order to obtain (13.4.74). ■

13.5 Proof of the results

13.5.1 Proof of the strong convergence

We begin this section with the proof of Theorem 13.1.20.

Proof of Theorem 13.1.20. Let η and δ be fixed positive real numbers, and let $\Phi_{\delta,\eta} = 1 - \psi_\delta^+ \psi_\eta^+ - \psi_\delta^- \psi_\eta^-$. Let u_ε be the sequence of solutions of (13.3.47), and suppose to have extracted from it a subsequence, still denoted by u_ε, such that (13.1.29)–(13.1.35) hold. We have

$$\int_\Omega [a(x, \nabla T_k(u_\varepsilon)) \cdot \nabla T_k(u_\varepsilon) - a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u)]\, dx \tag{A}$$

$$= \int_\Omega [a(x, \nabla T_k(u_\varepsilon)) \cdot \nabla T_k(u_\varepsilon) - a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u)]\, (1 - \Phi_{\delta,\eta})\, dx \tag{B}$$

$$+ \int_\Omega a(x, \nabla T_k(u_\varepsilon)) \cdot \nabla T_k(u_\varepsilon)\, (\psi_\delta^+ \psi_\eta^+ + \psi_\delta^- \psi_\eta^-)\, dx \tag{C}$$

$$- \int_\Omega a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u)\, (\psi_\delta^+ \psi_\eta^+ + \psi_\delta^- \psi_\eta^-)\, dx\,. \tag{D}$$

Thanks to (13.4.74), proved in Lemma 13.4.1, we have

$$|(\mathrm{B})| = \omega(\eta, \delta, \varepsilon)\,. \tag{13.5.92}$$

Thanks to (13.3.62) and (13.3.63) (proved in Lemma 13.3.3), we have

$$(\mathrm{C}) = \omega(\eta, \delta, \varepsilon)\,, \tag{13.5.93}$$

while, being $a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u)$ in $L^1(\Omega)$, and since $\psi_\delta^+ \psi_\eta^+ + \psi_\delta^- \psi_\eta^-$ converges to zero in the weak$*$ topology of $L^\infty(\Omega)$, we have

$$-(\mathrm{D}) = \omega(\eta, \delta)\,. \tag{13.5.94}$$

Thus, by (13.5.92)–(13.5.94), we have

$$|(\mathrm{A})| = \omega(\eta, \delta, \varepsilon)\,,$$

which implies

$$\int_\Omega a(x, \nabla T_k(u_\varepsilon)) \cdot \nabla T_k(u_\varepsilon)\, dx = \int_\Omega a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u)\, dx + \omega(\varepsilon)\,. \tag{13.5.95}$$

Since $a(x, \nabla T_k(u_\varepsilon)) \cdot \nabla T_k(u_\varepsilon)$ is a sequence of non negative functions that converges almost everywhere to $a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u)$, (13.5.95) implies that

$$a(x, \nabla T_k(u_\varepsilon)) \cdot \nabla T_k(u_\varepsilon) \to a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \qquad \text{strongly in } L^1(\Omega).$$

But then, by (13.1.2), we have

$$\alpha\, |\nabla T_k(u_\varepsilon)|^p \le a(x, \nabla T_k(u_\varepsilon)) \cdot \nabla T_k(u_\varepsilon)\,,$$

so that, since $\nabla T_k(u_\varepsilon)$ converges almost everywhere, a generalized version of the Lebesgue theorem yields that $\nabla T_k(u_\varepsilon)$ is strongly compact in $(L^p(\Omega))^N$; since its almost everywhere limit is $\nabla T_k(u)$, we obtain that

$$\nabla T_k(u_\varepsilon) \to \nabla T_k(u_\varepsilon) \qquad \text{strongly in } (L^p(\Omega))^N,$$

and this concludes the proof. ■

13.5.2 Importance of sign restriction on $(\lambda^+)_\varepsilon$ and $(\lambda^-)_\varepsilon$

Remark 13.5.1 We want to remark that if the sequences $(\lambda^+)_\varepsilon$ and $(\lambda^-)_\varepsilon$ are not made of non negative functions, the result may not be true. This is the case of the following two examples.

Example 13.5.2 In [20] (see also [17], where this example has been quoted in relation with strong convergence of truncations) it is considered a sequence u_ε of functions in $H_0^1(\Omega)$ that solve the following problem

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = \mu_\varepsilon - \lambda_\varepsilon & \text{in } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where μ_ε and λ_ε are two sequences of non negative elements in $H^{-1}(\Omega)$, which both converge to the Lebesgue measure on Ω, the first in the weak$*$ topology of measures, and the second weakly in $H^{-1}(\Omega)$ (we are thus outside our framework, since we require the term in $H^{-1}(\Omega)$ to be strongly convergent). Since $0 \le u_\varepsilon \le 1$, and since u_ε does not converge strongly in $H_0^1(\Omega)$, we thus have that $T_1(u_\varepsilon)$ does not converge strongly in $H_0^1(\Omega)$, and so the result of Theorem 13.1.20 does not hold.

One may think that the result fails since we are approximating a measure which is not concentrated on a set of zero capacity, but this is not true, as the following example shows.

Example 13.5.3 Let $N = 4$, and let $\Omega = B_1(0) = \{x \in \mathbf{R}^4 : |x| < 1\}$; consider the sequence u_ε of solutions of

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = (\lambda^+)_\varepsilon - (\lambda^-)_\varepsilon & \text{in } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

where

$$(\lambda^+)_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^4}\left(\chi_{B_\varepsilon(0)} + \chi_{B_{\sqrt[4]{6}\,\varepsilon}(0)\setminus B_{\sqrt[4]{5}\,\varepsilon}(0)}\right), \qquad (\lambda^-)_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^4}\chi_{B_{\sqrt[4]{5}\,\varepsilon}(0)\setminus B_{\sqrt[4]{3}\,\varepsilon}(0)}\,.$$

It is easily seen that both $(\lambda^+)_\varepsilon$ and $(\lambda^-)_\varepsilon$ converge in the weak$*$ topology of measures to the Dirac's delta (times a constant) concentrated in the origin. Since the solution u_ε is radial, it can be explicitly calculated; it is then easy to see that $u_\varepsilon \equiv 0$ on $B_1(0)\setminus B_{\sqrt[4]{6}\,\varepsilon}(0)$, so that u_ε converges to zero almost everywhere in Ω. Furthermore, since $(\lambda^+)_\varepsilon + (\lambda^-)_\varepsilon$ is bounded in $L^1(\Omega)$, then u_ε is bounded in $W_0^{1,q}(\Omega)$, for every $q < \frac{4}{3}$ (see [12]). This implies (by Rellich theorem) that u_ε is strongly convergent in $L^1(\Omega)$ (for example). Since its almost everywhere limit is zero, then u_ε converges strongly to zero in $L^1(\Omega)$. Let us study the behaviour of $T_k(u_\varepsilon)$. Using again the explicit form of u_ε, it is easy to see that, for $\rho = |x|$ between $\sqrt[4]{2}\,\varepsilon$ and $\sqrt[4]{3}\,\varepsilon$, we have

$$u_\varepsilon(\rho) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{c}{\varepsilon^2} - 1\right),$$

where c is a positive constant, independent on ε, such that $u_\varepsilon(\sqrt[4]{2}\,\varepsilon)$ is positive (and actually diverges to $+\infty$ as ε tends to zero), while $u_\varepsilon(\sqrt[4]{3}\,\varepsilon)$ is negative (and actually diverges to $-\infty$ as ε tends to zero). Thus, if k is fixed, and ε is small enough, the set $\{|u_\varepsilon| \leq k\}$ contains a subset $(\rho_\varepsilon^+, \rho_\varepsilon^-)$ of $(\sqrt[4]{2}\,\varepsilon, \sqrt[4]{3}\,\varepsilon)$, where

$$\frac{1}{(\rho_\varepsilon^+)^2} = \frac{c}{\varepsilon^2} + 8k + 1\,, \qquad \frac{1}{(\rho_\varepsilon^+)^2} = \frac{c}{\varepsilon^2} - 8k + 1\,.$$

Thus, if ω_4 is the three-dimensional measure of $\partial\Omega$,

$$\int_\Omega |\nabla T_k(u_\varepsilon)|^2\,dx \geq \omega_4 \int_{\rho_\varepsilon^+}^{\rho_\varepsilon^-} |u_\varepsilon'(\rho)|^2\,\rho^3\,d\rho = \frac{\omega_4}{32}\left(\frac{1}{(\rho_\varepsilon^+)^2} - \frac{1}{(\rho_\varepsilon^-)^2}\right) = \frac{\omega_4\,k}{2}\,,$$

so that $T_k(u_\varepsilon)$ does not converge to $T_k(u) = 0$ strongly in $H_0^1(\Omega)$. Hence, the result of Theorem 13.1.20 does not hold. We remark that we have (again by explicit calculations) that

$$\frac{1}{n}\int_{\{n\leq u_\varepsilon\,<\,2n\}} |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx = 1 + \omega(n,\varepsilon) = \frac{1}{n}\int_{\{-2n\,<\,u_\varepsilon\leq -n\}} |\nabla u_\varepsilon|^2\,dx\,.$$

13.5.3 Proof of existence of renormalized solutions

We give now the proof of Theorem 13.1.16. The proof will be splitted in four steps. We begin by proving that the function u which is the limit of the subsequence of u_ε given by Theorem 13.1.20 satisfies (13.1.15), and then that it is a renormalized solution in the sense of Definition 13.1.10. The third step is the proof that the limit function u satisfies (13.1.13) and (13.1.14), so that, together with Step 1, we have that u is a renormalized solution of (13.0.1) in the sense of Definition 13.1.7 ; we finally prove that u is a renormalized solution in the sense of Definition 13.1.2.

Step 1 : obtaining (13.1.15). Let h be a function in $W^{1,\infty}(\mathbf{R})$ such that h has compact support in $\mathbf{R}$, and let φ be a function in $W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. We consider the sequence of functions $h(u_\varepsilon)$. If $\mathrm{supp}\,(h) \subseteq [-M, M]$, we have

$$|\nabla h(u_\varepsilon)|^p = |\nabla u_\varepsilon|^p\,|h'(u_\varepsilon)|^p \leq c\,|\nabla T_M(u_\varepsilon)|^p\,.$$

Since $T_M(u_\varepsilon)$ is strongly convergent in $(L^p(\Omega))^N$ by the result of Theorem 13.1.20, and since $\nabla h(u_\varepsilon)$ is almost everywhere convergent to $\nabla h(u)$ (due to the continuity of h and the almost everywhere convergence of u_ε and ∇u_ε to u and ∇u respectively), we have that $\nabla h(u_\varepsilon)$ is strongly convergent to $\nabla h(u)$ in $(L^p(\Omega))^N$ by a generalized version of the Lebesgue theorem. Moreover, since h is bounded, we also have that $h(u_\varepsilon)$ is bounded in $L^r(\Omega)$ for every r ; since it is almost everywhere convergent, we have that it is strongly convergent to $h(u)$ in $L^p(\Omega)$. Thus, $h(u_\varepsilon)$ converges to $h(u)$ strongly in $W^{1,p}(\Omega)$. Furthermore, the boundedness of h, and the almost everywhere convergence of $h(u_\varepsilon)$, imply that $h(u_\varepsilon)$ converges to $h(u)$ in the weak$*$ topology of $L^\infty(\Omega)$.

We now choose $h(u_\varepsilon)\,\varphi$ as test function in (13.3.47). We obtain

$$\int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla h(u_\varepsilon)\,\varphi\,dx \tag{A}$$

$$+\int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla\varphi\,h(u_\varepsilon)\,dx \tag{B}$$

$$=\int_\Omega f_\varepsilon\,h(u_\varepsilon)\,\varphi\,dx \tag{C}$$

$$-\,\langle \mathrm{div}\,(g_\varepsilon), h(u_\varepsilon)\,\varphi\rangle \tag{D}$$

$$+\int_\Omega (\lambda^+)_\varepsilon\,h(u_\varepsilon)\,\varphi\,dx \tag{E}$$

$$-\int_\Omega (\lambda^-)_\varepsilon\,h(u_\varepsilon)\,\varphi\,dx\,. \tag{F}$$

We have, since $\mathrm{supp}\,(h)\subseteq[-M,M]$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}) &= \int_\Omega a(x,\nabla T_M(u_\varepsilon))\cdot\nabla h(u_\varepsilon)\,\varphi\,dx\\ &= \int_\Omega a(x,\nabla T_M(u))\cdot\nabla h(u)\,\varphi\,dx+\omega(\varepsilon)\\ &= \int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla u\,h'(u)\,\varphi\,dx+\omega(\varepsilon)\,,\end{aligned} \tag{13.5.96}$$

since we have the strong convergence of $\nabla h(u_\varepsilon)$ and $\nabla T_M(u_\varepsilon)$ in $(L^p(\Omega))^N$, and since φ belongs to $L^\infty(\Omega)$. Furthermore

$$(\mathrm{B}) = \int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi\,h(u)\,dx+\omega(\varepsilon)\,, \tag{13.5.97}$$

since $a(x,\nabla u_\varepsilon)\,h(u_\varepsilon) = a(x,\nabla T_M(u_\varepsilon))\,h(u_\varepsilon)$, and so it is strongly convergent in $(L^{p'}(\Omega))^N$ to $a(x,\nabla u)\,h(u)$ as ε tends to zero ; the result then follows since φ belongs to $W_0^{1,p}(\Omega)$. As for the right hand side, we have

$$(\mathrm{C}) = \int_\Omega f\,h(u)\,\varphi\,dx+\omega(\varepsilon)\,, \tag{13.5.98}$$

since f_ε converges weakly in $L^1(\Omega)$ to f, while $h(u_\varepsilon)$ converges to $h(u)$ weakly$*$ in $L^\infty(\Omega)$ and almost everywhere, and φ is in $L^\infty(\Omega)$ (as usual, this is due to Lemma 13.1.21). We then have

$$(\mathrm{D}) = -\langle \mathrm{div}\,(g), h(u)\,\varphi\rangle+\omega(\varepsilon)\,, \tag{13.5.99}$$

since $-\mathrm{div}\,(g_\varepsilon)$ converges strongly to $-\mathrm{div}\,(g)$ in $W^{-1,p}(\Omega)$, while $h(u_\varepsilon)\,\varphi$ converges strongly to $h(u)\,\varphi$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ as ε tends to zero. It remains to deal with the two latter terms. Since φ belongs to $L^\infty(\Omega)$, we have

$$\begin{aligned}|(\mathrm{E})| &\le \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega (\lambda^+)_\varepsilon\,|h(u_\varepsilon)|\,dx\\ &= \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|h\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\int_{\{|u_\varepsilon|\le M\}}(\lambda^+)_\varepsilon\,(1-\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+)\,dx\\ &\quad+\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{\{|u_\varepsilon|\le M\}}(\lambda^+)_\varepsilon\,|h(u_\varepsilon)|\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+\,dx\,.\end{aligned}$$

For the first term, we have

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|h\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\int_{\{|u_\varepsilon|\le M\}}(\lambda^+)_\varepsilon\,(1-\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+)\,dx\\ \le \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|h\|_{L^\infty(\mathbf{R})}\int_\Omega(\lambda^+)_\varepsilon\,(1-\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+)\,dx=\omega(\eta,\delta,\varepsilon)\,,\end{aligned}\tag{13.5.100}$$

by (13.2.45). For the second term, we begin remarking that if h belongs to $W^{1,\infty}(\mathbf{R})$, and has compact support in $\mathbf{R}$, then there exists a positive real number M_1 such that

$$|h(t)|\le M_1-T_{M_1}(t)\qquad\forall t\in\mathbf{R}\,.$$

Thus

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{\{|u_\varepsilon|\le M\}}(\lambda^+)_\varepsilon\,|h(u_\varepsilon)|\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+\,dx\\ \le \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\int_{\{|u_\varepsilon|\le M\}}(\lambda^+)_\varepsilon\,(M_1-T_{M_1}(u_\varepsilon))\,\psi_\delta^+\,\psi_\eta^+\,dx=\omega(\eta,\delta,\varepsilon)\,,\end{aligned}\tag{13.5.101}$$

by the second of (13.3.62) (choosing n greater than M). Thus, by (13.5.100) and (13.5.101), we have

$$|(\mathrm{E})|=\omega(\eta,\delta,\varepsilon)\,.\tag{13.5.102}$$

In the same way,

$$|(\mathrm{F})|=\omega(\eta,\delta,\varepsilon)\,.\tag{13.5.103}$$

Putting together (13.5.96)–(13.5.103), we obtain that u is such that

$$\int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla(h(u)\,\varphi)\,dx=\int_\Omega f\,h(u)\,\varphi\,dx-\langle\mathrm{div}\,(g),h(u)\,\varphi\rangle\,.$$

for every h in $W^{1,\infty}(\mathbf{R})$ with compact support in $\mathbf{R}$, and for every φ in $W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, and this is exactly (13.1.15) if we represent μ_0 as $f-\mathrm{div}\,(g)$.

Step 2 : obtaining (13.1.17). Let h be a function in $W^{1,\infty}(\mathbf{R})$ such that h' has compact support in $\mathbf{R}$, and let φ be a function in $W_0^{1,r}(\Omega)$ for $r>N$. Define $h^{+\infty}$ the limit of $h(s)$ at $+\infty$, and $h^{-\infty}$ the limit of h at $-\infty$. Reasoning as in Step 1, it is easy to see that the sequence $h(u_\varepsilon)$ is strongly convergent to $h(u)$ in $W^{1,p}(\Omega)$, and that it converges to the same function in the weak$*$ topology of $L^\infty(\Omega)$ and almost everywhere.

If we choose $h(u_\varepsilon)\,\varphi$ as test function in (13.3.47), we obtain

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla u_\varepsilon\,h'(u_\varepsilon)\,\varphi\,dx &&\text{(A)}\\ &\quad+\int_\Omega a(x,\nabla u_\varepsilon)\cdot\nabla\varphi\,h(u_\varepsilon)\,dx &&\text{(B)}\\ &=\int_\Omega f_\varepsilon\,h(u_\varepsilon)\,\varphi\,dx &&\text{(C)}\\ &\quad-\langle\mathrm{div}\,(g_\varepsilon),h(u_\varepsilon)\,\varphi\rangle &&\text{(D)}\\ &\quad+\int_\Omega(\lambda^+)_\varepsilon\,h(u_\varepsilon)\,\varphi\,dx &&\text{(E)}\\ &\quad-\int_\Omega(\lambda^-)_\varepsilon\,h(u_\varepsilon)\,\varphi\,dx\,, &&\text{(F)}\end{aligned}$$

and every term, but (B), (E) and (F), can be treated exactly as in Step 1. We have

$$(\mathrm{B}) = \int_\Omega a(x, \nabla u) \cdot \nabla\varphi\, h(u)\, dx + \omega(\varepsilon)\,,$$

Since $a(x, \nabla u_\varepsilon)$ converges strongly to $a(x, \nabla u)$ in $(L^q(\Omega))^N$, for every $q < \frac{N}{N-1}$ by (13.1.35), since φ is in $W_0^{1,r}(\Omega)$ for $r > N$, and since $h(u_\varepsilon)$ is weakly$*$ convergent in $L^\infty(\Omega)$ to $h(u)$. As for the other terms, we have

$$(\mathrm{E}) = \int_\Omega (\lambda^+)_\varepsilon\, h^{+\infty}\, \varphi\, dx + \int_\Omega (\lambda^+)_\varepsilon\, (h(u_\varepsilon) - h^{+\infty})\, \varphi\, dx\,.$$

Since $(\lambda^+)_\varepsilon$ is weakly$*$ convergent in the sense of measures to λ^+, and φ is continuous, the first term of the above identity converges to

$$h^{+\infty} \int_\Omega \varphi\, d\lambda^+\,. \tag{13.5.104}$$

As for the second term, we observe that $h(u_\varepsilon) - h^{+\infty}$ is zero on the set $u_\varepsilon > M_2$, where M_2 is such that $\operatorname{supp}(h') \subseteq [-M_2, M_2]$, and so

$$\begin{aligned}
&\left| \int_\Omega (\lambda^+)_\varepsilon\, (h(u_\varepsilon) - h^{+\infty})\, \varphi\, dx \right| \\
&\qquad \le \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\{u_\varepsilon \le M_2\}} (\lambda^+)_\varepsilon\, |h(u_\varepsilon) - h^{+\infty}|\, dx \\
&\qquad \le 2\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\, \|h\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \int_{\{u_\varepsilon \le M_2\}} (\lambda^+)_\varepsilon\, (1 - \psi_\delta^+\, \psi_\eta^+)\, dx \\
&\qquad\quad + \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\{u_\varepsilon \le M_2\}} (\lambda^+)_\varepsilon\, |h(u_\varepsilon) - h^{+\infty}|\, \psi_\delta^+\, \psi_\eta^+\, dx\,.
\end{aligned} \tag{13.5.105}$$

As in Step 1, the first term of the right hand side is such that

$$2\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\, \|h\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \int_{\{u_\varepsilon \le M_2\}} (\lambda^+)_\varepsilon\, (1 - \psi_\delta^+\, \psi_\eta^+)\, dx = \omega(\eta, \delta, \varepsilon)\,, \tag{13.5.106}$$

thanks to (13.2.45). Moreover, since there exists a positive real number M_3 such that

$$|h(u_\varepsilon) - h^{+\infty}| \le M_3 - T_{M_3}(t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}\,,$$

the second term in the right hand side of (13.5.105) can be estimated as follows (we forget the term $\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}$ since it is a constant) :

$$
\begin{aligned}
\int_{\{u_\varepsilon \le M_2\}} & (\lambda^+)_\varepsilon \, |h(u_\varepsilon) - h^{+\infty}| \, \psi_\delta^+ \, \psi_\eta^+ \, dx \\
&\le \int_{\{u_\varepsilon \le M_2\}} (\lambda^+)_\varepsilon \, (M_3 - T_{M_3}(u_\varepsilon)) \, \psi_\delta^+ \, \psi_\eta^+ \, dx \\
&= \int_{\{-n \le u_\varepsilon \le M_2\}} (\lambda^+)_\varepsilon \, (M_3 - T_{M_3}(u_\varepsilon)) \, \psi_\delta^+ \, \psi_\eta^+ \, dx \\
&\quad + \int_{\{u_\varepsilon < -n\}} (\lambda^+)_\varepsilon \, (M_3 - T_{M_3}(u_\varepsilon)) \, \psi_\delta^+ \, \psi_\eta^+ \, dx \\
&\le \int_{\{-n \le u_\varepsilon \le M_2\}} (\lambda^+)_\varepsilon \, (M_3 - T_{M_3}(u_\varepsilon)) \, \psi_\eta^+ \, dx \\
&\quad + 2M_3 \int_{\{u_\varepsilon < -n\}} (\lambda^+)_\varepsilon \, \psi_\eta^+ \, dx \\
&= \omega(\eta, n, \varepsilon) \, .
\end{aligned}
\tag{13.5.107}
$$

To obtain the result, we have used (13.3.50) (to deal with the integral on the set $\{u_\varepsilon < -n\}$), and (13.3.62) (to deal with the integral on the set $\{-n \le u_\varepsilon \le M_2\}$). Using (13.5.106) and (13.5.107) in (13.5.105), we get

$$
\left| \int_\Omega (\lambda^+)_\varepsilon \, (h(u_\varepsilon) - h^{+\infty}) \, \varphi \, dx \right| = \omega(\varepsilon) \, .
$$

This, together with (13.5.104), yields

$$
(\mathrm{E}) = h^{+\infty} \int_\Omega \varphi \, d\lambda^+ + \omega(\varepsilon) \, .
$$

Reasoning in the same way, we get

$$
(\mathrm{F}) = -h^{-\infty} \int_\Omega \varphi \, d\lambda^- + \omega(\varepsilon) \, .
$$

Putting together all the results, we obtain

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega a(x, \nabla u) \cdot \nabla (h(u) \, \varphi) \, dx \;\; = \;\; & \int_\Omega f \, h(u) \, \varphi \, dx - \langle \mathrm{div}\,(g), h(u) \, \varphi \rangle \\
& + h^{+\infty} \int_\Omega \varphi \, d\lambda^+ - h^{-\infty} \int_\Omega \varphi \, d\lambda^- \, .
\end{aligned}
$$

for every h in $W^{1,\infty}(\mathbf{R})$ such that h' has compact support in $\mathbf{R}$, and for every φ in $W_0^{1,r}(\Omega)$ for $r > N$, which is exactly (13.1.17) if we identify, as usual, μ_0 with $f - \mathrm{div}\,(g)$.

Step 3 : obtaining (13.1.13) and (13.1.14). We will prove a more general version of both (13.1.13) and (13.1.14). Let α_n and β_n be sequences of positive real numbers such that

$$
\lim_{n \to +\infty} \beta_n = +\infty \, , \qquad \beta_n > \alpha_n \quad \forall n \in \mathbf{N} \, .
$$

Let φ be a function in $C^1(\overline{\Omega})$. Then

$$\frac{1}{\beta_n-\alpha_n}\int_{\{\alpha_n\le u<\beta_n\}} a(x,\nabla u)\cdot\nabla u\,\varphi\,dx=\int_\Omega\varphi\,d\lambda^+ +\omega(n)\,. \tag{13.5.108}$$

To prove this fact, we choose $B_{\alpha_n,\beta_n-\alpha_n}(u^+)\,\varphi$ as test function in (13.1.17), where $B_{\alpha_n,\beta_n-\alpha_n}$ is as in (13.1.28). Such a function is an admissible test function in (13.1.17) since the support of the derivative of $B_{\alpha_n,\beta_n-\alpha_n}(s^+)$ is $[\alpha_n,\beta_n]$, and $B_{\alpha_n,\beta_n+\alpha_n}(0)=0$.

We obtain

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi\,B_{\alpha_n,\beta_n-\alpha_n}(u^+)\,dx && \text{(A)}\\
&\qquad+\frac{1}{\beta_n-\alpha_n}\int_{\{\alpha_n\le u<\beta_n\}} a(x,\nabla u)\cdot\nabla u\,\varphi\,dx && \text{(B)}\\
&=\int_\Omega f\,\varphi\,B_{\alpha_n,\beta_n-\alpha_n}(u^+)\,dx && \text{(C)}\\
&\qquad-\langle\operatorname{div}(g),\varphi\,B_{\alpha_n,\beta_n-\alpha_n}(u^+)\rangle && \text{(D)}\\
&\qquad+\int_\Omega\varphi\,d\lambda^+\,. && \text{(E)}
\end{aligned}$$

It is clear that (13.5.108) will follow from the above identity if we prove that

$$|(\mathrm{A})|+|(\mathrm{C})|+|(\mathrm{D})|=\omega(n)\,.$$

This is true, since $B_{\alpha_n,\beta_n-\alpha_n}(u^+)$ converges to zero in the weak$*$ topology of $L^\infty(\Omega)$ (and this takes into account $|(\mathrm{A})|$ and $|(\mathrm{C})|$), and in the weak topology of $W_0^{1,p}(\Omega)$, since it is bounded in $W_0^{1,p}(\Omega)$ and converges almost everywhere to zero as n tends to infinity (and this gives the result for $|(\mathrm{D})|$).

Repeating the same steps as before, we have

$$\frac{1}{\beta_n-\alpha_n}\int_{\{-\beta_n<u\le-\alpha_n\}} a(x,\nabla u)\cdot\nabla u\,\varphi\,dx=\int_\Omega\varphi\,d\lambda^- +\omega(n)\,. \tag{13.5.109}$$

Observe that since

$$\frac{1}{\beta_n-\alpha_n}a(x,\nabla u)\cdot\nabla u\,\chi_{\{\alpha_n\le u<\beta_n\}}$$

is bounded in $L^1(\Omega)$, (13.5.108) holds true for every function φ in $C^0(\overline{\Omega})$, and this implies that

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\beta_n-\alpha_n}a(x,\nabla u)\cdot\nabla u\,\chi_{\{\alpha_n\le u<\alpha_n+\beta_n\}}\to\lambda^+\\ \qquad\text{in the weak$*$ topology of measure.}\end{cases} \tag{13.5.110}$$

Analogously,

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\beta_n-\alpha_n}a(x,\nabla u)\cdot\nabla u\,\chi_{\{-\beta_n<u\le-\alpha_n\}}\to\lambda^-\\ \qquad\text{in the weak$*$ topology of measure.}\end{cases} \tag{13.5.111}$$

Step 4 : obtaining (13.1.10). Let w be a function in $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ such that there exists $k > 0$ and $w^{+\infty}$ and $w^{-\infty}$ in $W1, r(\Omega)$ for $r > N$ such that

$$\begin{cases} w = w^{+\infty} \quad \text{cap}_p\text{-quasi everywhere on the set } \{u > k\}, \\ w = w^{-\infty} \quad \text{cap}_p\text{-quasi everywhere on the set } \{u < -k\}. \end{cases} \tag{13.5.112}$$

We choose as test function in (13.1.15) $H_{n,1}(u)\, w$, where $H_{n,1}(s)$ has been defined in (13.1.27). We remark that this choice is possible since $H_{n,1}(s)$ belongs to $W^{1,\infty}(\mathbf{R})$ and has compact support in $\mathbf{R}$. We obtain :

$$\int_\Omega a(x, \nabla u) \cdot \nabla w \, H_{n,1}(u)\, dx \tag{A}$$

$$+ \int_{\{-n-1 < u \le -n\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla u \, w \, dx \tag{B}$$

$$- \int_{\{n \le u < n+1\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla u \, w \, dx \tag{C}$$

$$= \int_\Omega f \, w \, H_{n,1}(u)\, dx \tag{D}$$

$$- \langle \text{div}\,(g), w \, H_{n,1}(u) \rangle \,. \tag{E}$$

Since $H_{n,1}(u)$ converges to 1 weakly in $W^{1,p}(\Omega)$ and weakly$*$ in $L^\infty(\Omega)$ as n tends to infinity, we have

$$\text{(A)} = \int_\Omega a(x, \nabla u) \cdot \nabla w \, dx + \omega(n)\,, \tag{13.5.113}$$

and

$$\text{(D)} + \text{(E)} = \int_\Omega f \, w \, dx - \langle \text{div}\,(g), w \rangle + \omega(n)\,. \tag{13.5.114}$$

On the other hand we have, if $n > k$ (and this is not a restriction since n will tend to infinity),

$$\text{(B)} = \int_{\{-n-1 < u \le -n\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla u \, w^{-\infty}\, dx\,,$$

and

$$\text{(C)} = -\int_{\{n \le u < n+1\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla u \, w^{+\infty}\, dx\,.$$

Hence, using (13.5.108) and (13.5.109) with $\alpha_n = n$ and $\beta_n = n+1$ for every n in $\mathbf{N}$,

$$\text{(B)} = \int_\Omega w^{-\infty}\, d\lambda^- + \omega(n) \qquad \text{(C)} = -\int_\Omega w^{+\infty}\, d\lambda^+ + \omega(n)\,. \tag{13.5.115}$$

By (13.5.113), (13.5.114) and (13.5.115), we thus have

$$\int_\Omega a(x, \nabla u) \cdot \nabla w \, dx = \int_\Omega f \, w \, dx - \langle \text{div}\,(g), w \rangle + \int_\Omega w^{+\infty}\, d\lambda^+ - \int_\Omega w^{-\infty}\, d\lambda^-\,,$$

that is, (13.1.10) holds true once we identify μ_0 with $f - \text{div}\,(g)$. This concludes Step 4 and the proof of the theorem. ■

13.6 Equivalence between definitions

We begin proving the following theorem.

Theorem 13.6.1 *The following statements are equivalent.*

(i) u is a renormalized solution of (13.0.1) in the sense of Definition 13.1.2 ;

(ii) u is a renormalized solution of (13.0.1) in the sense of Definition 13.1.7 ;

(iii) u is a renormalized solution of (13.0.1) in the sense of Definition 13.1.10 ;

(iv) u is a renormalized solution of (13.0.1) in the sense of Definition 13.1.14.

Proof. We will prove the following facts :

$$\text{(i)} \Longrightarrow \text{(ii)} \Longrightarrow \text{(iii)} \Longrightarrow \text{(iv)} \Longrightarrow \text{(i)}\,.$$

(i) implies (ii). If u satisfies (i), and h and φ are as in Definition 13.1.7, then it is possible to choose $w = h(u)\,\varphi$ as test function in (13.1.10), setting $w^{+\infty} = w^{-\infty} = 0$ and $k = M$, where M is such that $\operatorname{supp}(h) \subseteq [-M, M]$. We thus obtain (13.1.15). In order to prove that (13.1.13) holds true, we choose $w = B_{n,n}(u^+)\,\varphi$, where $B_{n,n}$ is as in (13.1.28), and φ belongs to $W^{1,r}(\Omega)$ for $r > N$. We obtain, since $w^{+\infty} = 1$ and $w^{-\infty} = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\int_{\{n\le u<2n\}} a(x,\nabla u)\cdot\nabla u\,\varphi\,dx + \int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi\,B_{n,n}(u^+)\,dx \\ = \int_\Omega B_{n,n}(u^+)\,\varphi\,d\mu_0 + \int_\Omega \varphi\,d\lambda^+\,.\end{aligned}$$

Since $B_{n,n}(s^+)$ decreases to zero in $\mathbf{R}$, it is easy to see that

$$\int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi\,B_{n,n}(u^+)\,dx = \omega(n)\,,$$

and that

$$\int_\Omega B_{n,n}(u^+)\,\varphi\,d\mu_0 = \omega(n)\,,$$

so that

$$\frac{1}{n}\int_{\{n\le u<2n\}} a(x,\nabla u)\cdot\nabla u\,\varphi\,dx = \int_\Omega \varphi\,d\lambda^+ + \omega(n)\,,$$

which is exactly (13.1.13). Analogous calculations yield (13.1.14).

(ii) implies (iii). If h is as in Definition 13.1.10, let M be such that $\mathrm{supp}\,(h') \subseteq [-M, M]$. Let n be greater than M, and define the following function

$$h_n(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } s < -2n, \\ h^{-\infty}\,\dfrac{s+2n}{n} & \text{if } -2n \le s < -n, \\ h(s) & \text{if } |s| \le n, \\ h^{+\infty}\,\dfrac{2n-s}{n} & \text{if } n < s \le 2n, \\ 0 & \text{if } s > 2n. \end{cases}$$

Choosing $h_n(u)\,\varphi$ as test function in (13.1.15), with φ in $C^1_{\mathrm{c}}(\Omega)$, we get

$$\int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla h_n(u)\,\varphi\,dx + \int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi\,h_n(u)\,dx = \int_\Omega h_n(u)\,\varphi\,d\mu_0\,.$$

Since $h_n(s)$ converges to $h(s)$ as n tends to infinity, is is easy to prove that

$$\int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi\,h_n(u)\,dx = \int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi\,h(u)\,dx + \omega(n)\,,$$

and that

$$\int_\Omega h_n(u)\,\varphi\,d\mu_0 = \int_\Omega h(u)\,\varphi\,d\mu_0 + \omega(n)\,.$$

On the other hand, we have

$$\begin{aligned} \int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla h_n(u)\,\varphi\,dx &= \int_{\{|u|\le n\}} a(x,\nabla u)\cdot\nabla h(u)\,\varphi\,dx \\ &\quad - \frac{h^{+\infty}}{n}\int_{\{n\le u<2n\}} a(x,\nabla u)\cdot\nabla u\,\varphi\,dx \\ &\quad + \frac{h^{-\infty}}{n}\int_{\{-2n<u\le -n\}} a(x,\nabla u)\cdot\nabla u\,\varphi\,dx \\ &= \int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla h(u)\,\varphi\,dx \\ &\quad - h^{+\infty}\int_\Omega \varphi\,d\lambda^+ + h^{-\infty}\int_\Omega \varphi\,d\lambda^- + \omega(n)\,. \end{aligned}$$

Putting together the results, we have that (13.1.17) holds true.

(iii) implies (iv). Fix $\delta > 0$, and choose $h(u) = H_{k-\delta,2\delta}(u)$ (the definition of $H_{k-\delta,2\delta}$ has been given in (13.1.27)) and φ in $W^{1,r}_0(\Omega)$ for $r > N$ in (13.1.17). We get

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2\delta}\int_{\{k-\delta\le u<k+\delta\}} a(x,\nabla u)\cdot\nabla u\,\varphi\,dx && \text{(A)} \\ &+\frac{1}{2\delta}\int_{\{-k-\delta\le u<-k+\delta\}} a(x,\nabla u)\cdot\nabla u\,\varphi\,dx && \text{(B)} \\ &+\int_\Omega a(x,\nabla u)\cdot\nabla\varphi\,H_{k-\delta,2\delta}(u)\,dx && \text{(C)} \\ &=\int_\Omega \varphi\,H_{k-\delta,2\delta}(u)\,d\mu_0\,. && \text{(D)} \end{aligned}$$

Since $H_{k-\delta,2\delta}(u)$ converges to $\chi_{\{|u|\leq k\}}$ in the weak$*$ topology of $L^\infty(\Omega)$ as δ tends to zero, and since $a(x,\nabla u)\, H_{k-\delta,2\delta}(u) = a(x,\nabla T_{k+\delta}(u))\, H_{k-\delta,2\delta}(u)$ belongs to $(L^{p'}(\Omega))^N$, we thus have

$$(\mathrm{C}) = \int_\Omega a(x,\nabla T_k(u))\cdot\nabla\varphi\,dx + \omega(\delta)\,. \tag{13.6.116}$$

Reasoning in the same way, we have

$$(\mathrm{D}) = \int_\Omega \varphi\,\chi_{\{|u|\leq k\}}\,d\mu_0 + \omega(\delta)\,. \tag{13.6.117}$$

Choosing $h(u) = B_{k-\delta,2\delta}(u^+)$ and $\varphi\equiv 1$ as test function in (13.1.17), we get

$$\frac{1}{2\delta}\int_{\{k-\delta\leq u<k+\delta\}} a(x,\nabla u)\cdot\nabla u\,dx = \int_\Omega B_{k-\delta,2\delta}(u^+)\,d\mu_0 + \lambda^+(\Omega)\,,$$

so that, since $B_{k-\delta,2\delta}(u^+)$ is bounded by 1 μ_0-almost everywhere,

$$\frac{1}{2\delta}\int_{\{k-\delta\leq u<k+\delta\}} a(x,\nabla u)\cdot\nabla u\,dx \leq c\,.$$

This implies that the sequence

$$\rho^+_{\delta,k} = \frac{1}{2\delta}\,a(x,\nabla u)\cdot\nabla u\,\chi_{\{k-\delta\leq u<k+\delta\}}$$

is bounded in $L^1(\Omega)$. Hence, up to subsequences, it converges in the weak$*$ topology of measures to a measure λ^+_k as δ tends to zero. Thus, since φ is continuous, we have

$$(\mathrm{A}) = -\int_\Omega \varphi\,d\lambda^+_k + \omega(\delta)\,.$$

Reasoning as before, we have that

$$\rho^-_{\delta,k} = \frac{1}{2\delta}\,a(x,\nabla u)\cdot\nabla u\,\chi_{\{-k-\delta\leq u<-k+\delta\}}$$

is bounded in $L^1(\Omega)$. We define λ^-_k its limit (up to a subsequence) in the weak$*$ topology of measures. Thus

$$(\mathrm{B}) = \int_\Omega \varphi\,d\lambda^-_k + \omega(\delta)\,.$$

Putting together the latter two identities, (13.6.116) and (13.6.117), we have, for every φ in $W^{1,r}_0(\Omega)$ for $r>N$,

$$\int_\Omega \varphi\,d\lambda^+_k - \int_\Omega \varphi\,d\lambda^-_k = \int_\Omega a(x,\nabla T_k(u))\cdot\nabla\varphi\,dx - \int_\Omega \varphi\,\chi_{\{|u|\leq k\}}\,d\mu_0\,, \tag{13.6.118}$$

which coincides with (13.1.19) if we restrict the class of test functions to $W^{1,r}_0(\Omega)$ for $r>N$. In order to prove that λ^+_k and λ^-_k satisfy all the required properties, we begin observing that since $\rho^+_{\delta,k}$ and $\rho^-_{\delta,k}$ are sequences of non negative functions, then both λ^+_k and λ^-_k are non negative measures. Furthermore, due to the fact that (for example) the support of $\rho^+_{\delta,k}$ is contained in the set $\{k-\eta \le u < k+\eta\}$ if $\eta > \delta$, then the support of λ^+_k is contained in $\{k-\eta \le u < k+\eta\}$ for every $\eta > 0$, and so (13.1.18) holds true. Furthermore, (13.6.118) implies that

$$\lambda^+_k - \lambda^-_k = -\mathrm{div}\,(a(x,\nabla T_k(u)) + \mu_0 \llcorner \{|u| \le k\}\,,$$

so that (by the regularity of $T_k(u)$ and μ_0), we have that $\lambda^+_k - \lambda^-_k$ belongs to $W^{-1,p'}(\Omega) + L^1(\Omega)$, that is, it belongs to $\mathcal{M}_0(\Omega)$ (see Proposition 13.2.5). This implies that we can extend the set of admissible test functions from $C^1_c(\Omega)$ to $W^{1,p}_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Let now K be a compact subset of Ω with zero p-capacity. Then there exists a sequence φ_δ of $C^\infty_c(\Omega)$ functions such that $0 \le \varphi_\delta \le 1$ on Ω, $\varphi_\delta \equiv 1$ on K, and φ_δ converges to zero strongly in $W^{1,p}_0(\Omega)$, almost everywhere and $*$-weakly in $L^\infty(\Omega)$. We fix $h < k$ and choose $T_h(u^+)\,\varphi_\delta$ as test function in (13.6.118). We obtain, recalling the support properties of λ^+_k and λ^-_k,

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u))\cdot\nabla T_h(u^+)\,\varphi_\delta\,dx &+ \int_\Omega a(x,\nabla T_k(u))\cdot\nabla\varphi_\delta\,T_h(u^+)\,dx \\ &= \int_\Omega \varphi_\delta\,T_h(u^+)\,\chi_{\{|u|\le k\}}\,d\mu_0 + h\int_\Omega \varphi_\delta\,d\lambda^+_k\,.\end{aligned}$$

Since λ^+_k and φ_δ are positive, we have, recalling that $\varphi_\delta \equiv 1$ on K,

$$0 \le \lambda^+_k(K) \le \int_\Omega \varphi_\delta\,d\lambda^+_k\,.$$

On the other hand, by the convergence properties of φ_δ, we have

$$\begin{aligned}\int_\Omega a(x,\nabla T_k(u))\cdot\nabla T_h(u^+)\,\varphi_\delta\,dx &+ \int_\Omega a(x,\nabla T_k(u))\cdot\nabla\varphi_\delta\,T_h(u^+)\,dx \\ &- \int_\Omega \varphi_\delta\,T_h(u^+)\,\chi_{\{|u|\le k\}}\,d\mu_0 = \omega(\delta)\,,\end{aligned}$$

so that $\lambda^+_k(K) = 0$ for every subset K of zero p-capacity. This implies that λ^+_k is zero on every borelian set of zero p-capacity ; hence, in view of Proposition 13.2.5, it belongs to $\mathcal{M}_0(\Omega)$. The same calculations (taking $T_h(u^-)\,\varphi_\delta$ as test function) yield the same result for λ^-_k.

Observe that λ^+_k and λ^-_k do not depend on the subsequence extracted from $\rho^+_{\delta,k}$ and $\rho^-_{\delta,k}$ respectively, so that the whole sequences are convergent in the weak$*$ topology of measures.

To prove the weak$*$ convergence of λ^+_k to λ^+, we fix $k > 0$, and choose $B_{k,k}(u^+)\,\varphi$ in (13.1.19) written for $2k+1$, with φ in $W^{1,r}_0(\Omega)$ for $r > N$. We obtain

$$\int_\Omega B_{k,k}(u^+)\varphi\,d\lambda^+_{2k+1} \tag{A}$$

$$-\int_\Omega B_{k,k}(u^+)\varphi\,d\lambda^-_{2k+1} \tag{B}$$

$$= \frac{1}{k} \int_{\{k \leq u < 2k\}} a(x, \nabla T_{2k+1}(u)) \cdot \nabla u \, \varphi \, dx \tag{C}$$

$$+ \int_{\Omega} a(x, \nabla T_{2k+1}(u)) \cdot \nabla \varphi \, B_{k,k}(u^+) \, dx \tag{D}$$

$$- \int_{\Omega} \varphi \, B_{k,k}(u^+) \, \chi_{\{|u| \leq k\}} \, d\mu_0 \, . \tag{E}$$

Since $\operatorname{supp}(\lambda_{2k+1}^+) \subseteq \{2k \leq u \leq 2k+2\}$ (for example), and since on this set $B_{k,k}(u) \equiv 1$, we have

$$(\mathrm{A}) = \int_{\Omega} \varphi \, d\lambda_{2k+1}^+ \, . \tag{13.6.119}$$

On the other hand, since $\operatorname{supp}(\lambda_{2k+1}^-) \subseteq \{-2k-2 \leq u \leq -2k\}$, and since on this set $B_{k,k}(u^+) \equiv 0$, we have

$$(\mathrm{B}) = 0 \, . \tag{13.6.120}$$

Since $B_{k,k}(u^+)$ converges to 0 as k tends to infinity, both almost everywhere and in the weak$*$ topology of $L^\infty(\Omega)$, and since $a(x, \nabla T_k(u))$ converges to $a(x, \nabla u)$ strongly in $(L^q(\Omega))^N$ for every $q < \frac{N}{N-1}$, we have, being φ in $W_0^{1,r}(\Omega)$ for $r > N$,

$$(\mathrm{D}) = \omega(k) \, . \tag{13.6.121}$$

The same ideas imply that

$$(\mathrm{E}) = \omega(k) \, . \tag{13.6.122}$$

Finally, we have, by (13.1.13),

$$(\mathrm{C}) = \frac{1}{k} \int_{\{k \leq u < 2k\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla u \, \varphi \, dx = \int_{\Omega} \varphi \, d\lambda^+ + \omega(k) \, .$$

Putting together this latter fact and (13.6.119)–(13.6.122), we thus have

$$\int_{\Omega} \varphi \, d\lambda_{2k+1}^+ = \int_{\Omega} \varphi \, d\lambda^+ + \omega(k) \, ,$$

for every φ in $W_0^{1,r}(\Omega)$ for $r > N$. It is clear that we can extend this identity to every function in $C_c^0(\Omega)$, so that we have proved that λ_k^+ converges to λ^+ in the weak$*$ topology of measures.

Reasoning in the same way, we can prove that λ_k^- converges to λ^-.

(iv) implies (i). We choose w (satisfying the hypotheses of Definition 13.1.2) as test function in (13.1.19). We have

$$\int_{\Omega} a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla w \, dx = \int_{\Omega} w \, d\mu_0 + \int_{\Omega} w \, d\lambda_k^+ - \int_{\Omega} w \, d\lambda_k^- \, ,$$

for every $k > 0$. If $w = w^{+\infty}$ on the set $\{u > \eta\}$ and $w = w^{-\infty}$ on the set $\{u < -\eta\}$, we have, for every $k > \eta$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla w \, dx \;\; = \;\; & \int_{\{|u| \leq \eta\}} a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla w \, dx \\ & + \int_{\{u > \eta\}} a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla w^{+\infty} \, dx \\ & + \int_{\{u < -\eta\}} a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla w^{-\infty} \, dx \, . \end{aligned}$$

Passing to the limit on k, which is possible on every term due to the regularity of u and w, we have

$$\int_\Omega a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla w \, dx = \int_\Omega a(x, \nabla u) \cdot \nabla w \, dx + \omega(k) \, .$$

The second term is fixed, and thus gives no problem ; as for the third (the fourth being identical), if $k > \eta$ we have, recalling the support property of λ_k^+,

$$\int_\Omega w \, d\lambda_k^+ = \int_\Omega w^{+\infty} \, d\lambda_k^+ = \int_\Omega w^{+\infty} \, d\lambda^+ + \omega(k) \, ,$$

since $w^{+\infty}$ is continuous. Putting together the four terms, we obtain (13.1.10).

■

Remark 13.6.2 As a consequence of Theorem 13.1.16, there exists at least a renormalized solution of (13.0.1), and, by Theorem 13.6.1, this solution is a solution according any one of the four possible definition. In particular, since it is solution in the sense of Definition 13.1.14, is a solution obtained by approximation.

Bibliographie

[1] R. Adams, *Sobolev spaces*, vol. 65, Academic Press, 1975.

[2] F. Andreu, J. M. Mazón, S. Segura de León, J. Toledo, *Existence and uniqueness for a degenerate parabolic equation with L^1-data*, Prépublication.

[3] F. Andreu, J. M. Mazón, S. Segura de León, J. Toledo, *Quasi-linear elliptic and parabolic equations in L^1 with nonlinear boundary conditions*, à paraître à Advances in Math. Sc. and Appl.

[4] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J.L. Vazquez, *An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. **22** (1995), 241–273.

[5] Ph. Bénilan, H. Brezis, M.G. Crandall, *A semilinear equation in L^1*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. **2** (1975), 523–555.

[6] A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North Holland, 1978.

[7] D. Blanchard, *Truncations and monotonicity methods for parabolic equations*, Nonlinear Analysis, TMA **21** (1993), 725–743.

[8] D. Blanchard, F. Murat, *Renormalized solutions of non linear parabolic problems with L^1 data : Existence and uniqueness*, soumis.

[9] L. Boccardo, *Homogenization and continuous dependence for dirichlet problems in L^1*, à paraître aux Proceedings of Pisa Conference, 1995.

[10] L. Boccardo, A. Dall'Aglio, T. Gallouët, L. Orsina, *Regularity results for nonlinear parabolic equations*, à paraître à J. Funct. Anal.

[11] L. Boccardo, T. Gallouët, *Nonlinear elliptic and parabolic equations involving mesure data*, J. Funct. Anal. **87** (1989), 149–169.

[12] L. Boccardo, T. Gallouët, *Nonlinear elliptic equations with right hand side measures*, Comm. P.D.E. **17** (1992), 641–655.

[13] L. Boccardo, T. Gallouët, F. Murat, *Unicité de la solution de certaines équations non linéaires*, C. R. Acad. Sci. Paris Série I **315** (1992), 1159–1164.

[14] L. Boccardo, T. Gallouët, L. Orsina, *Existence and uniqueness of entropy solutions for non linear elliptic equations with measure data*, Ann. Inst. Henri Poincaré **13** (1996), 539–551.

[15] L. Boccardo, T. Gallouët, J.L. Vazquez, *Nonlinear equations in* $\mathbf{R}^N$ *without growth restrictions on the data*, J. Diff. Eqns. **105** (1993), 334–363.

[16] L. Boccardo, D. Giachetti, J.I. Diaz, F. Murat, *Existence and regularity of renormalized solutions for some elliptic problems involving derivatives of nonlinear terms*, J. Diff. Eq. **106** (1993), 215–237.

[17] L. Boccardo, F. Murat, *Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations*, Nonlinear Anal. **19** (1992), 581–597.

[18] L. Boccardo, F. Murat, *A property of nonlinear elliptic equations with the source term a measure*, Potential Analysis **3** (1994), 257–263.

[19] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, 1993.

[20] D. Cioranescu, F. Murat, *Un terme étrange venu d'ailleurs I & II*, Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France Seminar, Vol. II & III, H. Brezis and J.-L. Lions editors, Research Notes in Math. 60 & 70, Pitman, 1982, 98–138 & 154–178.

[21] J. Conway, *A course in functional analysis*, Springer, 1985.

[22] D. Dal Maso, F. Murat, L. Orsina, A. Prignet, *Renormalized solutions with right hand side measure*, en préparation.

[23] A. Dall'Aglio, *Approximated solutions of equations with* L^1 *data. Application to the* H*-convergence of quasi-linear parabolic equations*, Ann. Mat. Pura Appl. **170** (1996), 207–240.

[24] A. Dall'Aglio, L. Orsina, *Existence results for some nonlinear parabolic equations with nonregular data*, J. Diff. Int. Eq. **5** (1992), 1335–1354.

[25] T. Del Vecchio, *Nonlinear elliptic equations with measure data*, Potential Analysis **4** (1995), 185–204.

[26] P. Fabrie, T. Gallouët, *Modelling wells in porous media flows*, en préparation.

[27] M. Fukushima, K. Sato, S. Taniguchi, *On the closable part of pre-dirichlet forms and the fine support of the underlying measures*, Osaka J. Math. **28** (1991), 517–535.

[28] G. Gagneux, M. Madaune-Tort, *Analyse mathématique de modèles non linéaires de l'ingeniérie pétrolière*, Mathématiques et Applications, vol. 22, Springer, 1996.

[29] T. Gallouët, R. Herbin, *Existence of a solution to a coupled elliptic system*, Appl. Math. Letters **7** (1994), 49–55.

[30] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, O. Martio, *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*, Oxford University Press, 1993.

[31] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Mathématiques et applications, vol. 13, Springer-Verlag, 1993.

[32] P.D. Lax, A.N. Milgram, *Parabolic equations*, Contributions to the theory of partial differential equations (L. Bers, S. Bochner, F. John, eds.), Annals of mathematics studies, vol. 33, Princeton University Press, 1954, 167–190.

[33] J. Leray, J.-L. Lions, *Quelques résultats de Višik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder*, Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 97–107.

[34] J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod et Gauthier-Villars, 1969.

[35] J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, 1968.

[36] P.-L. Lions, F. Murat, *Sur les solutions renormalisées d'équations elliptiques non linéaires*, en préparation.

[37] N.G. Meyers, *An L^p-estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. **17** (1963), 189–206.

[38] F. Murat, *Communication personelle.*

[39] F. Murat, *Soluciones renormalizadas de EDP elipticas no lineales*, Prépublication du laboratoire d'Analyse numérique de l'université Paris VI, France, 1993.

[40] L. Orsina, *Solvability of linear and semilinear eigenvalue problems with L^1 data*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **90** (1993), 207–238.

[41] A. Prignet, *Conditions aux limites non homogènes pour des problèmes elliptiques avec second membre mesure*, à paraître à Ann. Fac. Sciences de Toulouse.

[42] A. Prignet, *Continuité par rapport à l'opérateur des solutions entropiques de problèmes elliptiques à seconds membres L^1*, en préparation.

[43] A. Prignet, *Remarks on existence and uniqueness of solutions of elliptic problems with right-hand side measures*, Rendiconti di Matematica **15** (1995), 321–337.

[44] A. Prignet, *Existence and uniqueness of "entropy" solutions of parabolic problems with L^1 data*, Nonlin. Anal. TMA **28** (1997), 1943–1954.

[45] W. Rudin, *Real and complex analysis*, MacGraw-Hill, 1966.

[46] J. Serrin, *Pathological solutions of elliptic differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Cl. Sci. (1964), 385–387.

[47] J. Simon, *Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$*, Ann. Matematica Pura Applicata (1987), 65–96.

[48] G. Stampacchia, *Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **15** (1965), 189–258.

[49] J.L. Vazquez, *Entropy solutions and the uniqueness problem for nonlinear second-order elliptic equations*, Nonlinear partial differential equations (A. Ben Kirane, J.P. Gossez, eds.), vol. 343, Addison-Wesley Longman, 1996, 179–203.

[50] W. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate texts in mathematics, vol. 120, Springer-Verlag, 1989.