Mercredi 15 novembre 2000

Question de cours. Donner la définition de $P \Rightarrow Q$ à l'aide des connecteurs logiques $\wedge, \vee$ et $\neg$. Donner la table de vérité de $P \Rightarrow Q$.

Exercice 1. Pour tout $n \geq 1$, on note S_n la somme des carrés des n premiers nombres impairs

$$S_n = 1 + 3^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \sum_{j=1}^{n} (2j-1)^2.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$

$$S_n = \frac{n\,(2n-1)\,(2n+1)}{3}.$$

Exercice 2. Pour tout sous ensemble A de E, on note A^c le complémentaire de A dans E. Si A et B sont deux sous ensembles de E, on note $A - B = A \cap B^c$.

1 - Donner la fonction indicatrice de $A - B$ en fonction des fonctions indicatrices de A et de B.

2 - En utilisant les fonctions indicatrices, montrer que, si A, B et C sont des sous ensembles de E

$$A \cap (A - B)^c \cap (A - C)^c = A \cap B \cap C.$$

Exercice 3. On dit qu'une fonction f est uniformément continue sur $[0,1]$ si

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \eta > 0, \quad \forall\, x,\, y \,\in\, [0,1], \quad (\,|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\,)\,.$$

Donner, à l'aide des quantificateurs, la définition de "f n'est pas uniformément continue sur $[0,1]$".

Mardi 6 novembre 2001

Question de cours. Donner la définition de $P \Rightarrow Q$ à l'aide des connecteurs logiques $\wedge, \vee$ et $\neg$. Donner la table de vérité de $P \Rightarrow Q$ et celle de $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Exercice 1. Pour tout $n \geq 1$, on rappelle que

$$C_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$

$$C_{2n}^{n} \leq 4^{n}.$$

Exercice 2. Pour tout sous ensemble A de E, on note A^c le complémentaire de A dans E. Si A et B sont deux sous ensembles de E, on note $A - B = A \cap B^c$.

1 - Donner la fonction indicatrice de $A - B$ en fonction des fonctions indicatrices de A et de B.

2 - En utilisant les fonctions indicatrices, montrer que, si A, B et C sont des sous ensembles de E

$$A \cap (A - B)^c \cap (A - C)^c = A \cap B \cap C.$$

Exercice 3. On dit qu'une fonction f est dérivable en 0 si

$$\exists l \in \mathbb{R}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x, \in \mathbb{R}, \quad \Big(|x| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(0) - l\,x| \leq \varepsilon\,|x| \Big).$$

Donner, à l'aide des quantificateurs, la définition de "f n'est pas dérivable en 0".

Mardi 18 Décembre 2001

Question de cours. Énoncer le "petit Théorème de Fermat".

Exercice 1. Résoudre

$$\begin{cases} 3x - 2y \equiv 3 & [6] \\ 2x - y \equiv 4 & [3] \end{cases}$$

Exercice 2. Déterminer l'exposant de 5 dans la décomposition en facteurs premiers de 200.

Exercice 3. On considère le nombre

$$N = 21^{357} + 23^{573} + 25^{735}$$

Est ce que N est un multiple de 3 ? un multiple de 5 ? un multiple de 7 ?

ARITHMÉTIQUE ET GROUPES
Université Paris XII
UFR de Sciences

Année 2005-2006
MIAS 1
Logique et Nombres

Examen du 24 Janvier 2000
Durée : 2 heures

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 : Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{2\times 3^n} - 1$ est divisible par 3^{n+1}.

Exercice 2 : Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$ on note $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$.

1 - Montrer que, pour tout $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, on a

$$(B - C \subset A \quad \text{et} \quad C - D \subset A) \quad \Longrightarrow \quad B - D \subset A$$

2 - Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que la relation $\mathcal{R}_A$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$B \,\mathcal{R}_A\, C \quad \Longleftrightarrow \quad B \triangle C \subset A,$$

est une relation d'équivalence.

3 - Pour tout $B \in \mathcal{P}(E)$, préciser la classe de B modulo $\mathcal{R}_A$.

Exercice 3 : Si x et y sont deux entiers, on note $x \wedge y$ le pgcd de x et de y.

1 - Décomposer 576240 en facteurs premiers.

2 - Déterminer une solution du système

$$\begin{cases} x \wedge y &= 14 \\ x4 - y4 &= 576240 \end{cases}$$

dans $\mathbb{N}^2$.

Exercice 4 : On veut résoudre, dans $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$, l'équation $\dot{x}^2 - \dot{1} = \cdot 0$.

1 - Montrer que $x \in \mathbb{Z}$ vérifie $x2 - 1 \equiv 0 \quad [35]$ si et seulement si ($x2 - 1 \equiv \cdot 0 \quad [5]$ et $x2 - 1 \equiv 0 \quad [7]$).

2 - Déterminer l'ensemble des solutions de $x2 - 1 \equiv 0 \quad [5]$ ainsi que l'ensemble des solutions de $x2 - 1 \equiv 0 \quad [7]$.

3 - Déterminer $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $7a + 5b = 1$.

4 - Déterminer l'ensemble des solutions de $\dot{x}^2 - \dot{1} = 0$ dans $\mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$.

DEUG MIAS I — Année 2000-2001

Logique et Nombres

Lundi 22 Janvier 2001

Durée : 2 heures

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $0 \leq k \leq n$, on note

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Montrer par récurrence que

$$C_{2n}^n \leq 4^n \qquad \text{et que} \qquad C_{3n}^{2n} \leq \left(\frac{27}{4}\right)^n.$$

Exercice 2. Trouver toutes les solutions $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ du système

$$\begin{cases} 4x - 3y \equiv 2 & [6] \\ 2x + y \equiv 1 & [5] \end{cases}$$

Exercice 3. 1 - Calculer le reste de la division euclidienne de 17^{17} par 4.

2 - En utilisant la question 1, déterminer le reste de la division euclidienne de

$$23^{17^{17}} \qquad \text{et de} \qquad 17^{17^{17}}$$

par 10.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1 - On suppose que $n = p\,q$ où $p \geq 2$, $q \geq 2$ et $p \neq q$. Déterminer $(n-1)!$ modulo n.

2 - On suppose que $n = p^2$ où $p \geq 2$. Déterminer $(n-1)!$ modulo n.

3 - On suppose que n est un nombre premier. Déterminer $(n-1)!$ modulo n.

DEUG MIAS I | Année 2001-2002

Logique et Nombres

Lundi 21 janvier 2002

Durée : 2 heures

Les documents et les calculatrices sont interdits.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère une fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que "la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ est uniformément de Cauchy sur $\mathbb{R}$" si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \quad \text{et} \quad m \geq N) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R} \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon)$$

Donner, à l'aide des quantificateurs logiques, la définition de la proposition "la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ n'est pas uniformément de Cauchy sur $\mathbb{R}$".

Exercice 2. Déterminer l'exposant de 5 dans la décomposition en facteurs premiers de $100\,!$ et de $1\,000\,!$.

Exercice 3. Trouver toutes les solutions $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ du système

$$\begin{cases} x - y \equiv 2 & [3] \\ 5x - 3y \equiv 7 & [9] \end{cases}$$

Exercice 4. 1 - Soit N un entier non nul. On note r le reste de la division euclidienne de N par 6. Déterminer, en fonction de r, le reste de la division euclidienne de N^N par 6.

2 - Déterminer le reste de la division euclidienne de 16^{16} par 6. En déduire le reste de la division euclidienne de $17^{16^{16}}$ par 7.

Exercice 5. Soit n un entier non nul. On note $\phi(n)$ le nombre d'entiers positifs, inférieurs ou égaux à n, qui sont premiers avec n. On remarquera que 1 est toujours premier avec n.

1 - Déterminer $\phi(n)$ pour $n = 2, \ldots, 10$.

2 - On suppose que p est un nombre premier. Déterminer $\phi(p)$ en fonction de p.

3 - On suppose que p est un nombre premier. Déterminer $\phi(p^2)$ en fonction de p.

4 - On suppose que p et q sont deux nombres premiers distincts. Déterminer $\phi(p\,q)$ en fonction de $\phi(p)$ et de $\phi(q)$.

ARITHMÉTIQUE ET GROUPES
Université Paris XII
UFR de Sciences

Année 2005-2006
MIAS 1
Logique et Nombres

Examen du vendredi 25 janvier 2003
Durée : 2 heures

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

On considère la suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence

$$a_{n+1} = a_n\,(a_n + 2)$$

où $a_0 \in \mathbb{N}$ est donné.

1 - On suppose dans cette question que a_0 est impair. En utilisant une récurrence sur n, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est impair.

2 - On suppose dans cette question que a_0 est pair. En utilisant une récurrence sur n, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est divisible par 2^{n+1}.

3 - On suppose dans cette question que $a_0 = 2$. Montrer, en utilisant une récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 3^{2^n} - 1$.

Exercice 2

On considère sur $\mathbb{R}^2$, la relation $\mathcal{R}$ définie par : $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y')$ si et seulement si

$$\exists\,(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \qquad (x = x' + n \quad \wedge \quad y = (-1)^n\,y' + m)\,.$$

Rappel : $\vee =$ "ou", $\wedge =$ "et".

1 - Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$.

2 - Écrire, à l'aide des quantificateurs, la proposition$\neg\ ((x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y'))$.

Exercice 3

Déterminer, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$:

1 - Le reste de la division euclidienne de 5^n par 7.

2 - Le reste de la division euclidienne de $943^{6n} + 943^{4n} + 943^{2n} + 2$ par 7.

Exercice 4

1 - Résoudre dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ l'équation

$$x^2 - \dot{3}\,x + \dot{2} = \dot{0}.$$

2 - En utilisant la question précédente, déterminer l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{Z}$ pour lesquels le nombre $n^2 - 3\,n$ a un chiffre des unités égal à 8.

ARITHMÉTIQUE ET GROUPES
Université Paris XII
UFR de Sciences

Année 2005-2006
MIAS 1
Logique et Nombres

Examen du Vendredi 23 Janvier 2004
Durée : 2 heures

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111.

Exercice 2

La proposition $P \wedge Q \Longrightarrow (\neg P) \vee Q$ est elle vraie ? (On utilisera les tables de vérité).

Exercice 3

Soit E un ensemble. Pour tout sous-ensemble A de E, on note ${}^cA$ le complémentaire de A dans E. Si A et B sont deux sous-ensembles de E, on note $A - B = A \cap {}^cB$.

1 - Donner la fonction indicatrice de $A - B$ en fonction des fonctions indicatrices de A et de B.

2 - En utilisant les fonctions indicatrices, montrer que, si A, B et C sont des sous-ensembles de E, alors

$$A \cap {}^c(A - B) \cap {}^c(A - C) = A \cap B \cap C.$$

Exercice 4

Les fonctions définies ci-dessous sont-elles surjectives ? injectives ? bijectives ? Justifier vos réponses.

1 - Soit $f : \mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\}) \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par $f(n, m) = \frac{n}{m}$.

2 - Soit $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n, m) = 2^n\, 3^m$.

Exercice 5

Soit n un entier, $n \geq 1$.

1 - On suppose que n se décompose en $n = p\,q$ où $p \geq 2$, $q \geq 2$ et $p \neq q$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(n-1)!$ par n.

2 - On suppose que n se décompose en $n = p^2$ où $p \geq 2$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(n-1)!$ par n.

3 - On suppose dans cette question que $n \geq 3$ est un nombre premier. Que peut on dire du reste de la division euclidienne de $(n-1)!$ par n.

ARITHMÉTIQUE ET GROUPES
Université Paris XII
UFR de Sciences

Année 2005-2006
MIAS 1
Logique et Nombres

Examen du 8 Septembre 2000
Durée : 1 heure 30

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 : Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^{3^n} + 1$ est divisible par 3^{n+1}.

Exercice 2 : Soient trois ensembles A, B, C tels que

$$A \cup B \subset A \cup C \qquad \text{et} \qquad A \cap B \subset A \cap C.$$

Que peut on dire des deux ensembles B et C ?

Exercice 3: On considère le nombre

$$N = 25^{456} + 27^{564} + 29^{645}$$

Est ce que N est un multiple de 3 ? un multiple de 5 ? un multiple de 7 ?

Exercice 4 : Si x et y sont deux entiers, on note $x \wedge y$ le pgcd de x et de y. Déterminer une solution du système

$$\begin{cases} x \wedge y &= 21 \\ x^2 + x\,y + y^2 &= 5733 \end{cases}$$

dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 5 : On veut résoudre, dans $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$, l'équation $\dot{x}^3 - \dot{1} = \dot{0}$.

1 - Montrer que $x \in \mathbb{Z}$ vérifie $x^3 - 1 \equiv 0 \quad [21]$ si et seulement si ($x^2 - 1 \equiv 0 \quad [3]$ et $x^3 - 1 \equiv 0 \quad [7]$).

2 - Déterminer l'ensemble des solutions de $x^3 - 1 \equiv 0 \quad [3]$ ainsi que l'ensemble des solutions de $x^3 - 1 \equiv 0 \quad [7]$.

3 - Déterminer $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $3\,a + 7\,b = 1$.

4 - Déterminer l'ensemble des solutions de $\dot{x}^3 - \dot{1} = 0$ dans $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$.

Exercice 6 : Déterminer toutes les solutions $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ du système

$$\begin{cases} x - y &= 1 \qquad [6] \\ 3x + 2y &= 2 \qquad [7] \end{cases}$$

ARITHMÉTIQUE ET GROUPES
Université Paris XII
UFR de Sciences

Année 2005-2006
MIAS 1
Logique et Nombres

Examen du Mardi 11 Septembre 2001
Durée : 2 heures

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 : Soit $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a \equiv 1 \quad [3]$. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^{3^n} - 1$ est divisible par 3^{n+1}.

Exercice 2 : Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont elles VRAIES ou FAUSSES ?

(i) f est surjective si et seulement si $\forall B \subset \mathbb{R}$, $\exists A \subset \mathbb{R}$ tel que $f(A) = B$.

(ii) f est surjective si et seulement si $\forall A \subset \mathbb{R}$, $\exists B \subset \mathbb{R}$ tel que $f(A) = B$.

(iii) f est injective si et seulement si $\forall A \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

(iv) f est injective si et seulement si $\forall A \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

Exercice 3 : Déterminer le reste de la division euclidienne de

$$1 + 22 + 33 + \ldots + 2000^{2000} + 2001^{2001}$$

par 3.

Exercice 4 : Déterminer toutes les solutions du système

$$\begin{cases} 3\,x - 4\,y & \equiv & 3 & [7] \\ 2\,x - y & \equiv & 2 & [5] \end{cases}$$

dans $\mathbb{Z}^2$.

Exercice 5 : Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère dans $\mathbb{R}^2$ la relation

$$(x,y)\,\mathcal{R}_a\,(x',y') \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\exists (n,m) \in \mathbb{Z}^2 \qquad x = x' + n + m\,a \quad \text{et} \quad y = y' + m\big)\,.$$

1- Montrer que $\mathcal{R}_a$ est une relation d'équivalence.

2- Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et a' pour que

$$\mathbb{R}^2/\mathcal{R}_a = \mathbb{R}^2/\mathcal{R}_{a'}.$$

ARITHMÉTIQUE ET GROUPES
Université Paris XII
UFR de Sciences

Année 2005-2006
MIAS 1
Logique et Nombres

Examen du Mercredi 11 Septembre 2002
Durée : 2 heures

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 : Montrer en utilisant une récurrence sur k que, pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ et pour tout $k = 0, \ldots, n-1$ on a

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \, C_n^j = (-1)^k \, C_{n-1}^k.$$

Rappel : $C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$ et par convention $0! = 1$.

Exercice 2 : On dit qu'un ensemble $F \subset \mathbb{R}$ est fermé si

$$\forall (x_n)_{n\geq 0}, \quad x_n \in F, \quad \left(\exists x \in \mathbb{R} \quad x = \lim_{n\to\infty} x_n\right) \Longrightarrow (x \in F).$$

1 - Nier l'assertion "F est un fermé de $\mathbb{R}$".

2 - Les ensembles suivants sont-ils des fermés de $\mathbb{R}$? $F_1 =]0,1]$, $F_2 = [0,1]$, $F_3 = \{\frac{1}{n} \ : \ n \geq 1\} \cup \{0\}$, $F_4 = \{\frac{1}{n} \ : \ n \geq 1\}$. Justifier votre réponse.

Exercice 3 : Déterminer l'exposant de 7 dans la décomposition en facteurs premiers de 100! et de 1 000!.

Exercice 4 : On considère le nombre

$$N = 1999^{2005} + 2001^{2003} + 2003^{2001} + 2005^{1999}.$$

1 - Déterminer le reste de la division euclidienne de N par 7,et par 8.

2 - Déterminer le reste de la division euclidienne de N par 56.

Exercice 5 : Résoudre dans $\mathbb{Z}/29\mathbb{Z}$ l'équation

$$x^2 + \dot{23}\, x - \dot{16} = \dot{0}.$$

ARITHMÉTIQUE ET GROUPES
Université Paris XII
UFR de Sciences

Année 2005-2006
MIAS 1
Logique et Nombres

Examen du mardi 8 septembre 2003
Durée : 2 heures

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1

Pour tout $n \geq 1$ on note

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j \times (j+1)} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \ldots + \frac{1}{n \times (n+1)}$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$ on a $S_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Exercice 2

On dit qu'un réel x appartient à l'adhérence d'un ensemble $F \subset \mathbb{R}$ si :

$$\forall \delta > 0, \qquad \exists y \in F, \qquad\qquad |x - y| \leq \delta.$$

1 - Nier l'assertion "x appartient à l'adhérence de l'ensemble F".

2 - Soit x un élément de F, est ce que x appartient à l'adhérence de F ?

3 - On note $\overline{F}$ l'ensemble des points qui appartiennent à l'adhérence de ensemble F. Déterminer $\overline{F}$ dans le cas où : $F = \mathbb{Z}$, $F = \{\frac{1}{n} : n \geq 1\}$, $F = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

Exercice 3

Déterminer l'exposant de 11 dans la décomposition en facteurs premiers de $100\,!$, de $1000\,!$ et de $10\,000\,!$.

Exercice 4

1 - Énoncer le Petit Théorème de Fermat.

2 - Soit $n \geq 1$. Montrer que 2, 3 et 5 divisent $n\,(n^4 - 1)$.

3 - Énoncer le Théorème de Bezout.

4 - Soit $n \geq 0$. Montrer que les entiers $n + 1$ et $2\,n^2 + n$ sont premiers entre eux.

Université Paris XII **DEUG-MIAS 1**
UFR de Sciences **Logique et Nombres**

Examen du vendredi 3 septembre 2004
Durée : 1 heure 30

Les documents et les calculatrices sont interdits.

Exercice 1 Vérifier que, pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$, l'entier $(a+1)^5 - a^5 - 1$ est divisible par $5\,a$. En utilisant une récurrence, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $6^{5^n} - 1$ est divisible par 5^{n+1}.

Exercice 2 Les fonctions définies ci-dessous sont-elles surjectives ? injectives ? bijectives ? Justifier vos réponses.

1 - Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = \dfrac{(-1)^n}{4}(2\,n + 1 + (-1)^{n+1})$.

2 - Soit $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(n,m) = 2\,n + 3\,m$.

Exercice 3 Déterminer l'exposant de 7 dans la décomposition en facteurs premiers de $100\,!$, $1\,000\,!$ et $10\,000\,!$.

Exercice 4 On considère sur $\mathbb{R}^2$, la relation $\mathcal{R}$ définie par : $(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y')$ si et seulement si

$$\exists\,(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \qquad (x,y) = (x'+n, (-1)^n\,(y'+m))\,.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 Déterminer toutes les solutions $n \in \mathbb{Z}$ de l'équation

$$n^2 + n + 1 \equiv 0 \qquad [7]$$