L'isopérimétrie ou la recherche de la forme optimale

Pascal Romon

le 26 mars 2004

Qu'est-ce que le problème isopérimétrique ?

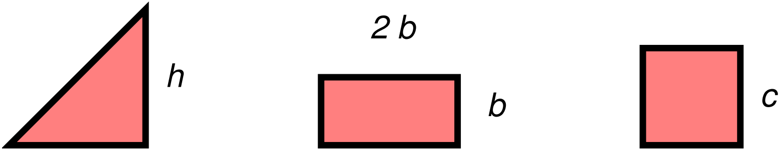
Parmi les domaines du plan de périmètre égal (**iso–périmètre**), trouver celui qui borde l'aire la plus grande (problème de *Didon*).

Existe-t-il ? Est-il unique ?

Qu'est-ce que le problème isopérimétrique ?

Parmi les domaines du plan de périmètre égal (**iso–périmètre**), trouver celui qui borde l'aire la plus grande (problème de *Didon*).

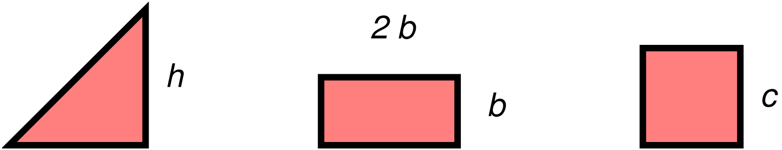
Existe-t-il ? Est-il unique ?



Qu'est-ce que le problème isopérimétrique ?

Parmi les domaines du plan de périmètre égal (**iso–périmètre**), trouver celui qui borde l'aire la plus grande (problème de *Didon*).

Existe-t-il ? Est-il unique ?

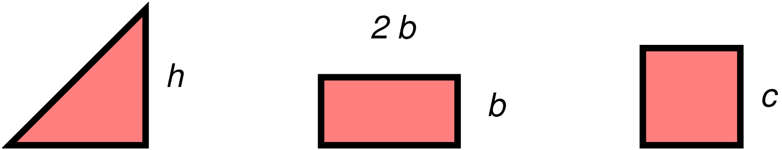


	triangle	rectangle	carré
A	$h^2/2$		
p	$h(2+\sqrt{2})$		
A quand $p=4$			

Qu'est-ce que le problème isopérimétrique ?

Parmi les domaines du plan de périmètre égal (**iso–périmètre**), trouver celui qui borde l'aire la plus grande (problème de *Didon*).

Existe-t-il ? Est-il unique ?

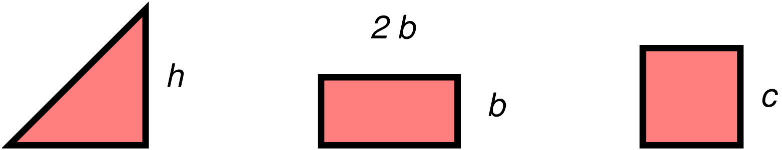


	triangle	rectangle	carré
A	$h^2/2$		
p	$h(2+\sqrt{2})$		
A quand $p = 4$	$\frac{4}{3+2\sqrt{2}} \simeq 0,69$		

Qu'est-ce que le problème isopérimétrique ?

Parmi les domaines du plan de périmètre égal (**iso–périmètre**), trouver celui qui borde l'aire la plus grande (problème de *Didon*).

Existe-t-il ? Est-il unique ?

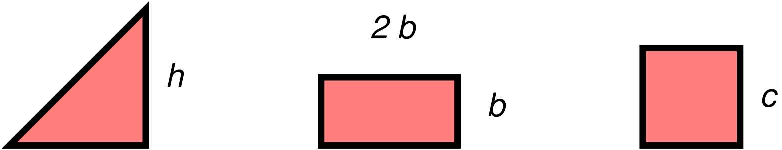


	triangle	rectangle	carré
A	$h^2/2$	$2b^2$	
p	$h(2+\sqrt{2})$	$6b$	
A quand $p=4$	$\frac{4}{3+2\sqrt{2}} \simeq 0,69$		

Qu'est-ce que le problème isopérimétrique ?

Parmi les domaines du plan de périmètre égal (**iso–périmètre**), trouver celui qui borde l'aire la plus grande (problème de *Didon*).

Existe-t-il ? Est-il unique ?

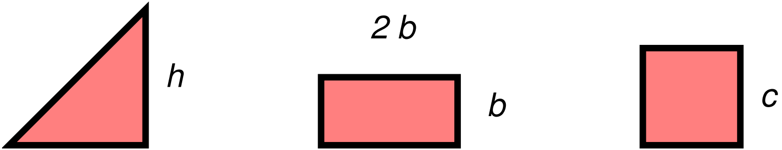


	triangle	rectangle	carré
A	$h^2/2$	$2b^2$	
p	$h(2+\sqrt{2})$	$6b$	
A quand $p=4$	$\frac{4}{3+2\sqrt{2}} \simeq 0,69$	$\frac{8}{9} \simeq 0,89$	

Qu'est-ce que le problème isopérimétrique ?

Parmi les domaines du plan de périmètre égal (**iso–périmètre**), trouver celui qui borde l'aire la plus grande (problème de *Didon*).

Existe-t-il ? Est-il unique ?

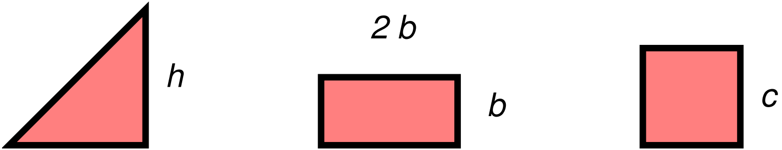


	triangle	rectangle	carré
A	$h^2/2$	$2b^2$	c^2
p	$h(2+\sqrt{2})$	$6b$	$4c$
A quand $p=4$	$\frac{4}{3+2\sqrt{2}} \simeq 0,69$	$\frac{8}{9} \simeq 0,89$	

Qu'est-ce que le problème isopérimétrique ?

Parmi les domaines du plan de périmètre égal (**iso–périmètre**), trouver celui qui borde l'aire la plus grande (problème de *Didon*).

Existe-t-il ? Est-il unique ?



	triangle	rectangle	carré
A	$h^2/2$	$2b^2$	c^2
p	$h(2+\sqrt{2})$	$6b$	$4c$
A quand $p=4$	$\frac{4}{3+2\sqrt{2}} \simeq 0,69$	$\frac{8}{9} \simeq 0,89$	1

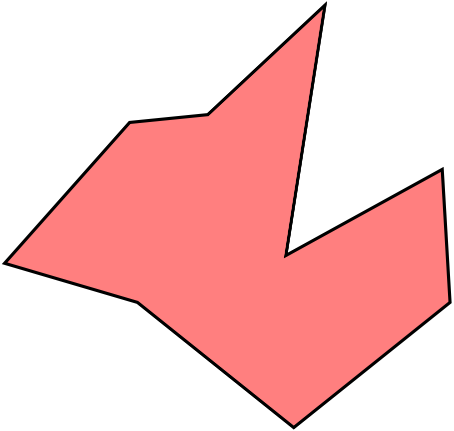
- Problème équivalent : quel est le domaine du plan d'aire A fixée, ayant le périmètre p le plus petit possible ?

- Problème équivalent : quel est le domaine du plan d'aire A fixée, ayant le périmètre p le plus petit possible ?
- Interprétation physique : quand on mélange deux liquides (*eau et huile, détergents*), l'interface doit minimiser une énergie en général proportionnelle à la longueur (*tension superficielle*).

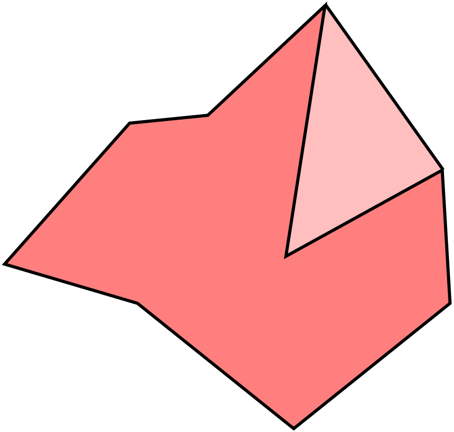
Le cas du plan

Dans le plan, le domaine isopérimétrique est le **disque**, quelle que soit l'aire prescrite (ou le périmètre). Il existe un très grand nombre de démonstrations différentes de ce résultat. Nous allons donner une idée de preuve en utilisant des polygones.

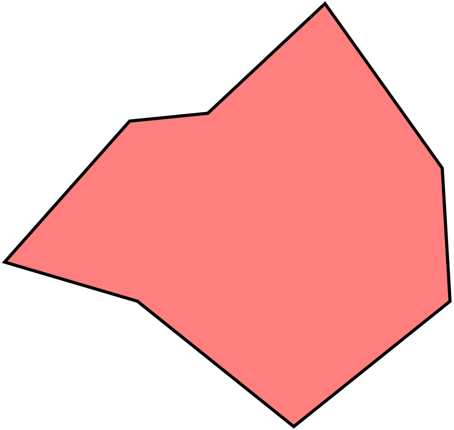
Étape 1 : un polygone convexe est meilleur qu'un polygone concave.



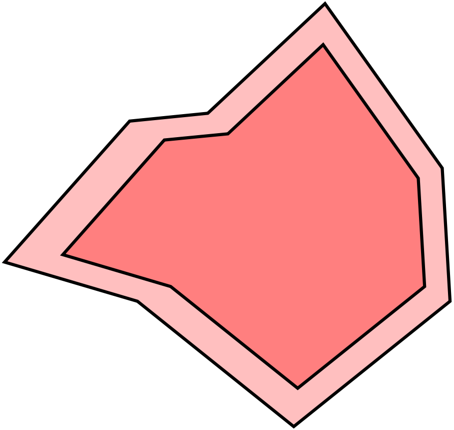
Étape 1 : un polygone convexe est meilleur qu'un polygone concave.



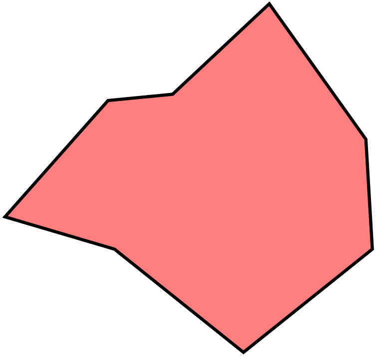
Étape 1 : un polygone convexe est meilleur qu'un polygone concave.



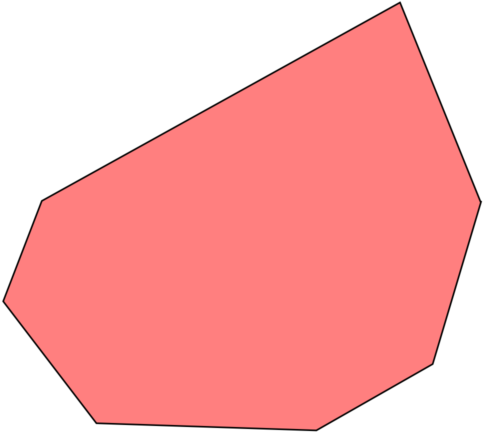
Étape 1 : un polygone convexe est meilleur qu'un polygone concave.



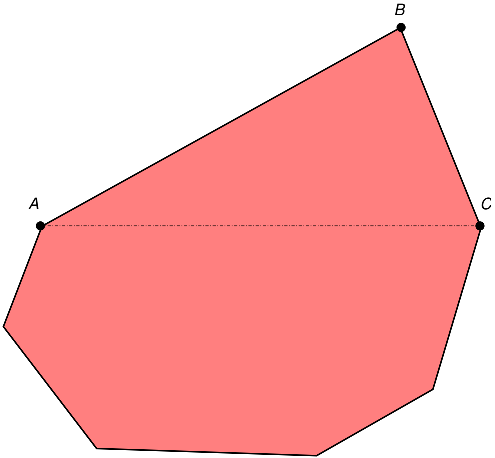
Étape 1 : un polygone convexe est meilleur qu'un polygone concave.



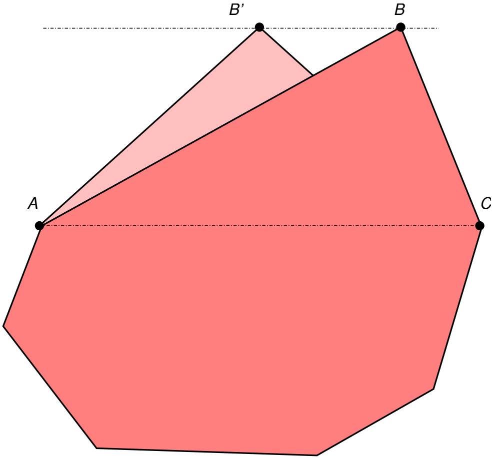
Étape 2 : un polygone équilatère est meilleur qu'un polygone aux côtés non égaux :



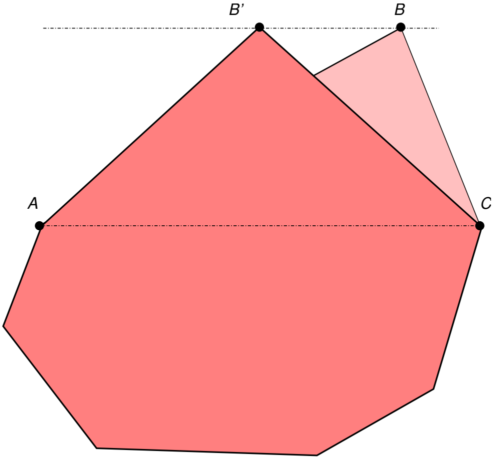
Étape 2 : un polygone équilatère est meilleur qu'un polygone aux côtés non égaux :



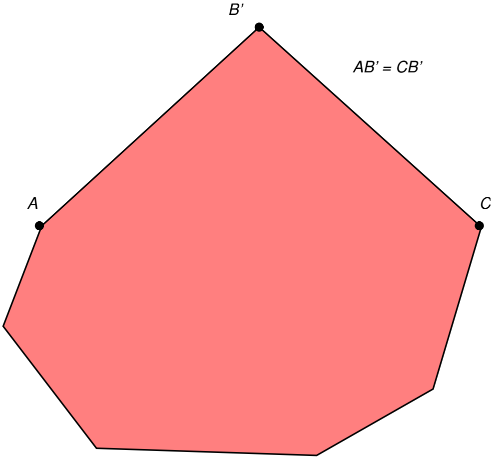
Étape 2 : un polygone équilatère est meilleur qu'un polygone aux côtés non égaux :



Étape 2 : un polygone équilatère est meilleur qu'un polygone aux côtés non égaux : $AB' + B'C \leq AB + BC$ car $(AB'C)$ est **isocèle**.

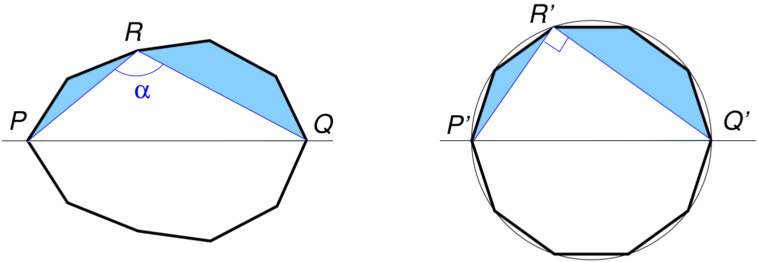


Étape 2 : un polygone équilatère est meilleur qu'un polygone aux côtés non égaux : $AB' + B'C \leq AB + BC$ car $(AB'C)$ est **isocèle**.

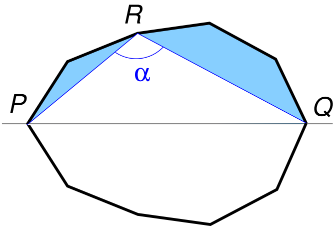


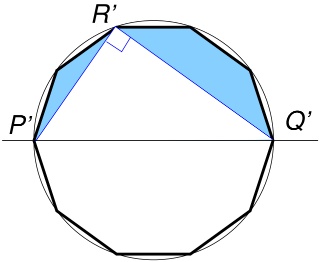
Étape 3 : des angles égaux augmentent l'aire.

Étape 3 : des angles égaux augmentent l'aire. Si le polygone équilatère possède n côtés avec n pair, un diamètre PQ le sépare en deux sous-polygones de même aire. Alors pour tout autre point R, (PQR) est rectangle en R, sinon on peut déformer.

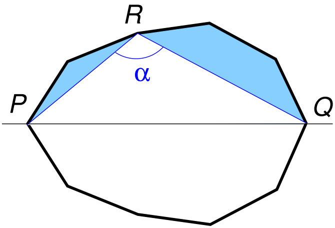


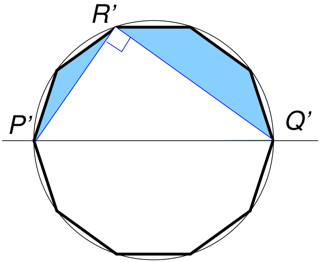
Étape 3 : des angles égaux augmentent l'aire. Si le polygone équilatère possède n côtés avec n pair, un diamètre PQ le sépare en deux sous-polygones de même aire. Alors pour tout autre point R, (PQR) est rectangle en R, sinon on peut déformer. En effet, $PR = P'R'$ et $QR = Q'R'$, mais
$\text{Aire}(PQR) = \frac{1}{2}\, PR\, QR \sin\alpha \leq \text{Aire}(P'Q'R')$.





Étape 3 : des angles égaux augmentent l'aire. Si le polygone équilatère possède n côtés avec n pair, un diamètre PQ le sépare en deux sous-polygones de même aire. Alors pour tout autre point R, (PQR) est rectangle en R, sinon on peut déformer. En effet, $PR = P'R'$ et $QR = Q'R'$, mais $\text{Aire}(PQR) = \frac{1}{2} PR\, QR \sin\alpha \leq \text{Aire}(P'Q'R')$.





Si n est impair on coupe chaque côté en deux côtés égaux ...

Étape 4 : pour un polygone régulier (équilatère à angles égaux), plus il y a de côtés, plus le périmètre est petit (*à volume constant*).

Étape 4 : pour un polygone régulier (équilatère à angles égaux), plus il y a de côtés, plus le périmètre est petit (*à volume constant*).

- Un polygone régulier à n côtés d'aire 1 a pour périmètre $p_n = 2\sqrt{n \tan \frac{\pi}{n}}$.

Étape 4 : pour un polygone régulier (équilatère à angles égaux), plus il y a de côtés, plus le périmètre est petit (*à volume constant*).

- Un polygone régulier à n côtés d'aire 1 a pour périmètre $p_n = 2\sqrt{n \tan \frac{\pi}{n}}$.
- $n \mapsto p_n$ est décroissante avec n, et tend vers $2\sqrt{\pi}$ qui est le périmètre du cercle d'aire 1. Le cercle est d'ailleurs la limite des polygones réguliers quand n tend vers l'infini.

Étape 4 : pour un polygone régulier (équilatère à angles égaux), plus il y a de côtés, plus le périmètre est petit (*à volume constant*).

- Un polygone régulier à n côtés d'aire 1 a pour périmètre $p_n = 2\sqrt{n \tan \frac{\pi}{n}}$.
- $n \mapsto p_n$ est décroissante avec n, et tend vers $2\sqrt{\pi}$ qui est le périmètre du cercle d'aire 1. Le cercle est d'ailleurs la limite des polygones réguliers quand n tend vers l'infini.

La démonstration est-elle complète ?

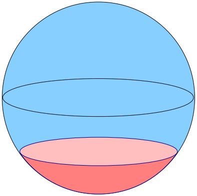
Généralisations

Résultat fondamental [Almgren 1976] : dans une région bornée et pour toute aire, il existe toujours un domaine isopérimétrique (non nécessairement unique) ; il est *régulier* (si la dimension ≤ 7). La

géométrie *locale* des solutions est en théorie bien comprise : il s'agit de courbes (ou surfaces, etc) à **courbure** constante. La géométrie globale est plus difficile.

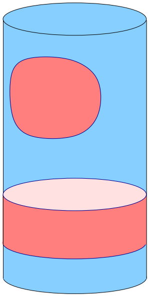
Exemples de solutions isopérimétriques dans des situations comparables.

Exemples de solutions isopérimétriques dans des situations comparables.



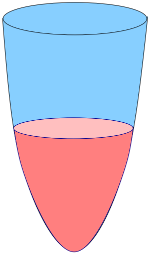
- Sur la sphère : calottes sphériques.

Exemples de solutions isopérimétriques dans des situations comparables.



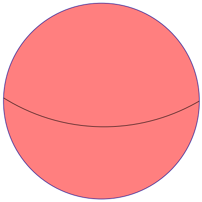
- Sur la sphère : calottes sphériques.
- Sur le cylindre : disques, *puis* cylindres de hauteur finie.

Exemples de solutions isopérimétriques dans des situations comparables.



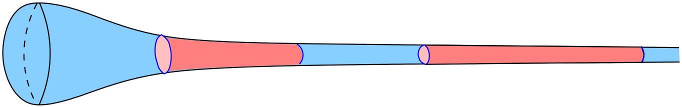
- Sur la sphère : calottes sphériques.
- Sur le cylindre : disques, *puis* cylindres de hauteur finie.
- Sur le paraboloïde : calottes [résultat de 1996 !].

Exemples de solutions isopérimétriques dans des situations comparables.



- Sur la sphère : calottes sphériques.
- Sur le cylindre : disques, *puis* cylindres de hauteur finie.
- Sur le paraboloïde : calottes [résultat de 1996 !].
- Dans l'espace (dimension 3 et plus) : boules rondes.

Exemple sans solution du problème isopérimétrique : surface de révolution.

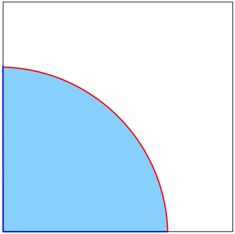


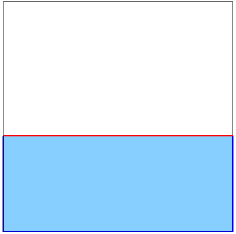
Les problèmes à bords

Il existe un problème analogue (dit *problème à bords*) : chercher le plus petit périmètre **bord non compris** pour une aire donnée.

Les problèmes à bords

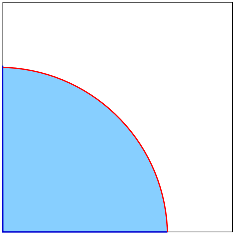
Il existe un problème analogue (dit *problème à bords*) : chercher le plus petit périmètre **bord non compris** pour une aire donnée.
Cas du carré :

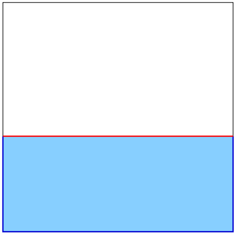




Les problèmes à bords

Il existe un problème analogue (dit *problème à bords*) : chercher le plus petit périmètre **bord non compris** pour une aire donnée.
Cas du carré :





Les solutions dans le carré sont obtenus avec des quarts de disque ou des rectangles.

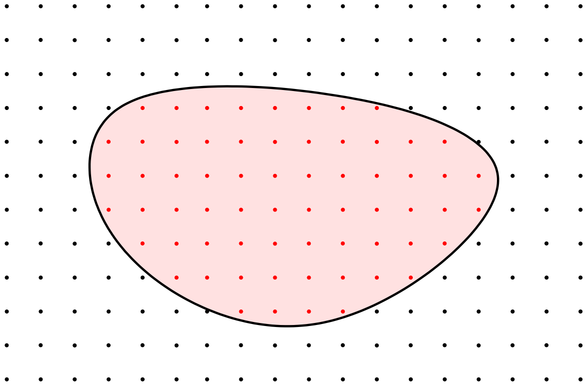
Application : inégalité isopérimétrique dans le carré (de côté 1). Pour un domaine D, d'aire A et de périmètre p,

$$p \geq 4\,A\,(1 - A)$$

et l'égalité n'étant atteinte que pour un rectangle horizontal d'aire $A = 1/2$.

Corollaire : le nombre de points à coordonnées entières contenus dans un convexe K est estimé à partir du périmètre $p(K)$ et de l'aire $A(K)$ par

$$N \geq A(K) - \frac{1}{2}\,p(K)\,.$$

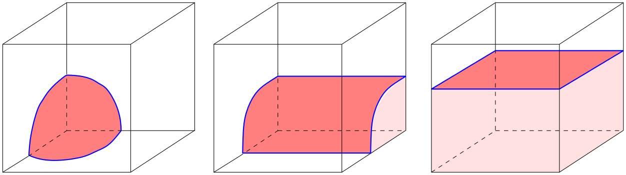


Résultats généraux :

- il y a toujours une solution (non nécessairement unique) ; elle est régulière (au moins jusqu'en dimension 7),
- les courbes solutions rencontrent **perpendiculairement** le bord (quand elles le rencontrent).

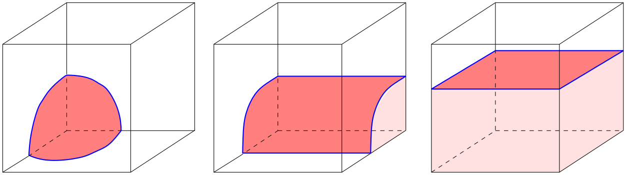
Dans le **cube**, on minimise la *surface* à *volume* prescrit, et les solutions possibles sont (en fonction du volume) :

Dans le **cube**, on minimise la *surface* à *volume* prescrit, et les solutions possibles sont (en fonction du volume) :

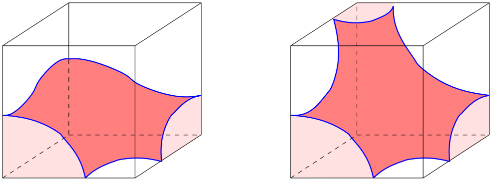


1/8 de sphère *1/4 de cylindre* *un carré*

Dans le **cube**, on minimise la *surface* à *volume* prescrit, et les solutions possibles sont (en fonction du volume) :



1/8 de sphère *1/4 de cylindre* *un carré*



Lawson *Schwarz*

À l'heure actuelle, on ne sait toujours pas quelle est la solution isopérimétrique dans le cube, à volume donné. Mais on peut exclure toute autre solution que les 5 types précédents.

À l'heure actuelle, on ne sait toujours pas quelle est la solution isopérimétrique dans le cube, à volume donné. Mais on peut exclure toute autre solution que les 5 types précédents.

Demi-volume : la surface la plus petite séparant le cube en deux volumes égaux est un carré parallèle à une de faces [Hadwiger 1972].

À l'heure actuelle, on ne sait toujours pas quelle est la solution isopérimétrique dans le cube, à volume donné. Mais on peut exclure toute autre solution que les 5 types précédents.

Demi-volume : la surface la plus petite séparant le cube en deux volumes égaux est un carré parallèle à une de faces [Hadwiger 1972]. Pour des petits volumes, les morceaux de sphères sont optimaux.

À l'heure actuelle, on ne sait toujours pas quelle est la solution isopérimétrique dans le cube, à volume donné. Mais on peut exclure toute autre solution que les 5 types précédents.

Demi-volume : la surface la plus petite séparant le cube en deux volumes égaux est un carré parallèle à une de faces [Hadwiger 1972]. Pour des petits volumes, les morceaux de sphères sont optimaux. *Conjecture* : les surfaces isopérimétriques dans le cube sont des morceaux de sphères, de cylindres ou de plans (ce qui exclut les surfaces de type Lawson ou Schwarz).

Interprétation physique et milieux périodiques

Il est naturel de s'intéresser aux motifs répétitifs :

Interprétation physique et milieux périodiques

Il est naturel de s'intéresser aux motifs répétitifs :

- Solutions (mathématiques) périodiques dans l'espace pour le problème isopérimétrique,

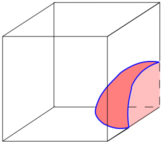
Interprétation physique et milieux périodiques

Il est naturel de s'intéresser aux motifs répétitifs :

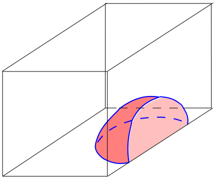
- Solutions (mathématiques) périodiques dans l'espace pour le problème isopérimétrique,
- modélisation physico-chimique d'un milieu (approximativement) infini et/ou naturellement périodique (cristaux liquides).

Obtention de solutions périodiques à partir de solution du problème dans le cube (par réflexion) :

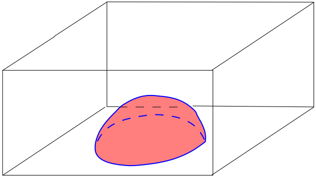
Obtention de solutions périodiques à partir de solution du problème dans le cube (par réflexion) : 1/8 de sphère



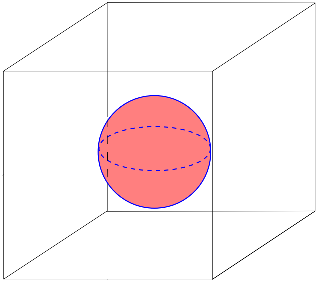
Obtention de solutions périodiques à partir de solution du problème dans le cube (par réflexion) : 1/4 de sphère



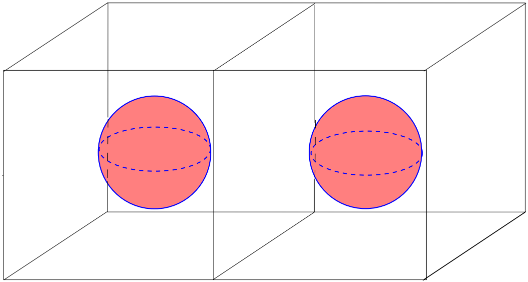
Obtention de solutions périodiques à partir de solution du problème dans le cube (par réflexion) : 1/2 sphère



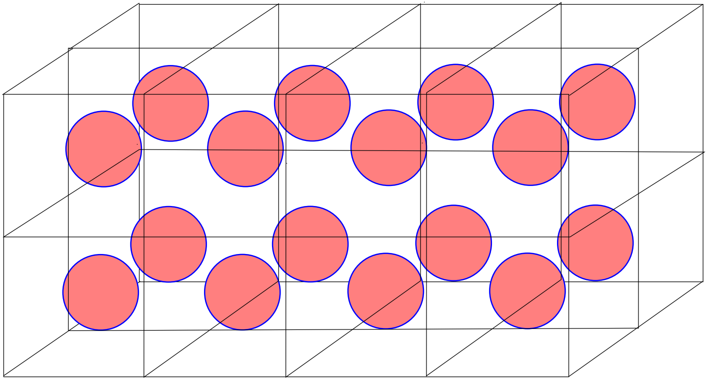
Obtention de solutions périodiques à partir de solution du problème dans le cube (par réflexion) : 1 sphère



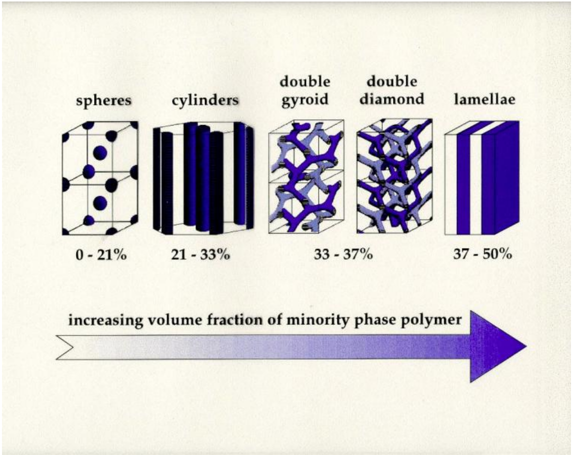
Obtention de solutions périodiques à partir de solution du problème dans le cube (par réflexion) : 2 sphères



Obtention de solutions périodiques à partir de solution du problème dans le cube (par réflexion) : 16 sphères



Exemple de partition dans un réseau périodique, selon le ratio de deux composants [Thomas].



Références :

Almgren Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints, *Memoirs of the AMS 165*.

Howard, Hutchings & Morgan The isoperimetric problem on surfaces, *American Mathematical Monthly*, May 1999.

Thomas The Geometry of Intermaterial Dividing Surfaces in Block Copolymers *http ://www.msri.org/publications/*.

Le Lorrain Didon montrant Carthage à Énée.

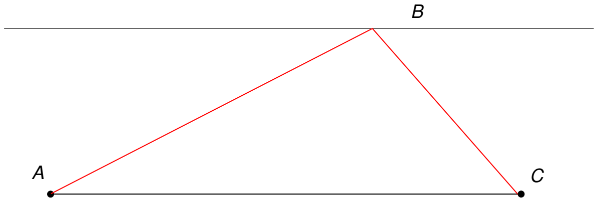
Compléments à la démonstration de l'isopérimétrie dans le plan, *via* les polygones.

- L'existence d'une solution n'est pas prouvée ! (ni pour les polygones, ni pour les contours en général).
- Cas des domaines non connexes.

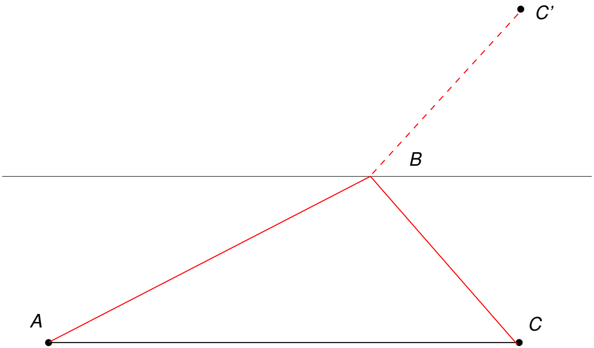
Retour

Un triangle isocèle minimise le trajet AC passant par une droite parallèle à (AC).

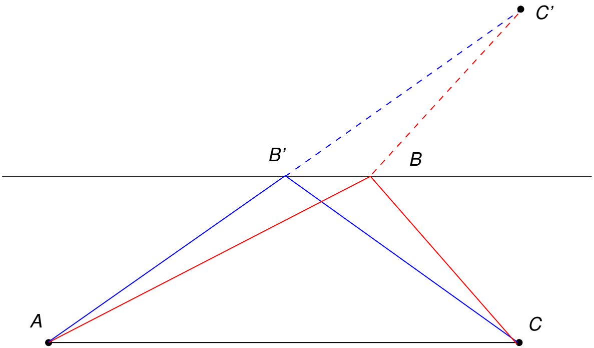
n triangle isocèle minimise le trajet AC passant par une droite parallèle à (AC).



n triangle isocèle minimise le trajet AC passant par une droite parallèle à (AC).
En effet, $BC = BC'$



n triangle isocèle minimise le trajet AC passant par une droite parallèle à (AC).
En effet, $BC = BC'$ et le trajet le plus court entre A et C' est la ligne droite, passant par B'.



Retour