Pincement de la première valeur propre du laplacien pour les hypersurfaces et rigidité

Julien Roth*

Résumé

Robert C. Reilly a obtenu des majorations de la première valeur propre du laplacien pour les hypersurfaces de l'espace euclidien. De plus, il a montré que le cas d'égalité dans ces majorations est atteint uniquement pour les sphères géodésiques. Dans cet exposé, nous nous intéressons au problème de pincement pour ces majorations. Nous montrons que si le cas d'égalité est presque atteint, alors l'hypersurface est proche d'une sphère, en un sens que nous préciserons. Nous déduisons ensuite des résultats pour les hypersurfaces presque ombiliques ainsi qu'une nouvelle caractrisation des sphères géodésiques.

1 Introduction et préliminaires

Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte sans bord, connexe et orientée. Nous supposerons de plus que M est immergée isométriquement dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$, c'est-à-dire, g est la métrique induite sur M par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^{n+1}$.

La seconde forme fondamentale de l'immersion est le 2-tenseur symétrique B défini par

$$B(X,Y) = \left\langle \overline{\nabla}_X \nu, Y \right\rangle,$$

où ν est un champ normal unitaire, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\overline{\nabla}$ sont respectivement la métrique et la connexion riemannienne de $\mathbb{R}^{n+1}$. La courbure moyenne de l'immersion est

$$H = \frac{1}{n} \mathrm{Trace}\,(B).$$

La variété riemannienne (M, g) étant compacte, le spectre du laplacien est discret et positif. La première valeur propre est nulle, de multiplicité 1

*Lors de cette note, l'auteur était soutenu par le CNRS et les fonctions propres correspondantes sont les fonctions constantes. Nous noterons alors par $\lambda_1(M)$ la première valeur propre non nulle du laplacien. Dans [Rei77], R.C. Reilly a obtenu la majoration suivante de cette première valeur propre en fonction de la courbure moyenne. Précisément, nous avons :

$$\lambda_1(M) \leqslant \frac{n}{\mathrm{Vol(M)}} \int_M H^2 dv_g, \tag{1}$$

avec égalité si et seulement si M est une hypersphère géodésique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Une question naturelle se pose alors : *que dire de M si le cas d'égalité est presque atteint ? L'hypersurface M est-elle proche d'une sphère ? En quel sens ?*

B. Colbois et J.F. Grosjean ont répondu à la question suivante dans [CG07].

Dans cet article, nous donnons une généralisation du résultat de Colbois et Grosjean pour des majorations plus générales de la première valeur propre du laplacien faisant intervenir les courbures moyennes d'ordres supérieurs (ces inégalités sont également dues également à Reilly). Nous en déduirons par la suite des corollaires géométriques (Sections 4 et 5)

2 Préliminaires

Nous commençons cette section de préliminaires par quelques rappels sur les courbures moyennes d'ordres supérieurs. Il s'agit de quantités géométriques extrinsèques définies à partir de la seconde forme fondamentale et qui généralisent la notion de courbure moyenne. Nous avons vu précédemment que la courbure moyenne est définie comme la trace de la seconde forme fondamentale B (à un coefficient près) :

$$H = \frac{1}{n}\mathrm{Trace}\,(B) = \frac{1}{n}\sigma_1(k_1, \cdots, k_n),$$

où σ_1 est le premier polynôme symétrique et $k_1, \cdots, k_n$ les courbures principales de l'immersion. Les courbures moyennes d'ordres supérieurs sont alors définies de manière analogue pour $k \in \{1, \cdots, n\}$ par

$$H_k = \frac{1}{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}\sigma_k(k_1 < \cdots < k_n),$$

où σ_k est le k-ième polynôme symétrique.

Un point particulièrement important est de remarquer que pour les hypersurfaces de l'espace euclidien, la seconde courbure moyenne H_2 est en fait, à une constante multiplicative près, la courbure scalaire. Précisément, nous avons :

$$H_2 = \frac{1}{n(n-1)}\mathrm{Scal}\,.$$

Cette remarque est une conséquence de la formule de Gauss, dont voici la version tracée :

$$\mathrm{Ric} = nHB - B^2. \tag{2}$$

Cette remarque revêtira tout son intérêt dans les Sections 4 et 5 de cet article, lorsque nous donnerons des applications de notre théorème de pincement.

Avant de donner les majorations de Reilly, nous finissons ces rappels sur les courbures moyennes H_k par ces deux dernières propriétés. Tout d'abord la formule de Hsiung-Minkowski :

$$\int_M \Big(H_{k+1}\left\langle X,\nu\right\rangle - H_k\Big)dv_g = 0, \tag{3}$$

où X est le vecteur position de l'immersion.

Enfin, si H_k est une fonction strictement positive, alors pour tout $j \in \{1,\cdots,k\}$, les fonctions H_j est aussi strictement positive et

$$0 < H_k^{1/k} \leqslant H_{k-1}^{1/k} \leqslant \cdots H_2^{1/2} \leqslant H. \tag{4}$$

Finalement, voici les majorations obtenues par Reilly en fonctions des courbures moyennes d'ordres supérieurs :

$$\lambda_1(M)\left(\int_M H_{k-1}dv_g\right)^2 \leqslant nV(M)\int_M H_k^2, \tag{5}$$

avec également égalité si et seulement si (M^n,g) est une hypersphère géodésique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

En utilisant l'inégalité de Hölder, nous obtenons des estimations similaires avec la norme L^{2p} ($p \geqslant 1$) de H_k :

$$\lambda_1(M)\left(\int_M H_{k-1}dv_g\right)^2 \leqslant nV(M)^{2-1/p}||H_k||_{2p}^2. \tag{6}$$

Comme pour les inégalités (1) et (5), le cas d'égalité est caractérisé par les hypersphères géodésiques.

Dans la Section 3, nous nous intéressons au pincement associé à cette inégalité (6), puis dans les Sections 4 et 5, nous déduirons des applications intéressantes de ce résultat de pincement dans le cas $k=2$, c'est-à-dire, avec H et H_2.

3 Pincement de la première valeur propre

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour énoncer le résultat de pincement associé aux inégalités de Reilly (6).

Théorème 3.1 *[Rot08] Soient $(M^n, g))$ une hypersurface connexe, compacte sans bord et orientée $\mathbb{R}^{n+1}$. Supposons que $V(M) = 1$ et $H_k > 0$. Alors, pour $p \geqslant \frac{n}{2k}$, il existe une constante C dépendant uniquement de n et $||H||_\infty$ telle que si la condition de pincement*

$$0 \geqslant \lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^2 - \frac{n}{V(M)^{1/p}} ||H_k||_{2p}^2 > -C \qquad (P_C)$$

est satisfaite, alors M est difféomorphe à $\mathbb{S}^n$.

Plus précisément, il existe un difféomorphisme F de M la sphère $\mathbb{S}^n \left(\sqrt{\frac{n}{\lambda_1}} \right)$ qui est une quasi-isométrie. C'est-à-dire, pour tout $\theta \in]0, 1[$, il existe une constante C_θ dépendant uniquement de θ, n et $||H||_\infty$ telle que la condition de pincement pour C_θ implique

$$\left| |dF_x(u)|^2 - 1 \right| \leq \theta,$$

pour tout vecteur unitaire $u \in T_x M$.

Remarque 1 *Par homothétie, nous obtenons le résultat pour $V(M)$ quelconque, avec dépendence du volume pour C_θ.*

Nous ne donnerons ici qu'un schéma de preuve. La preuve complète pourra être trouvée dans [Rot08]. Nous obtenons le difféomorphisme en donnant explicitement une application entre M et $\mathbb{S}^n \left(\sqrt{\frac{n}{\lambda_1}} \right)$ qui sera une quasi-isométrie (et donc un difféomorphisme). L'application est la suivante :

$$\begin{array}{rccl} F : & M & \longrightarrow & S\left(0, \sqrt{\dfrac{n}{\lambda_1(M)}}\right) \\ & x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{n}{\lambda_1(M)}} \dfrac{X_x}{|X_x|}. \end{array}$$

Un simple calcul de la différentielle de F nous amène à :

$$\left| |dF_x(u)|^2 - 1 \right| \quad \leqslant \quad \underbrace{\left| \frac{n}{\lambda_1(M)} \frac{1}{|X|^2} - 1 \right|}_{\alpha} + \underbrace{\frac{n}{\lambda_1(M)} \frac{1}{|X|^4} \langle u, X \rangle^2}_{\beta}.$$

Il ne reste plus maintenant qu'à montrer que sous l'hypothèse de pincement, les deux termes de droite α etβ proche de 0. Plus précisément, nous allons montrer que $|X| \simeq \sqrt{\frac{n}{\lambda_1}}$ et $|X^T| \simeq 0$. Pour celà, nous procédons en deux temps, nous montrons qu'ils sont petits en norme L^2, puis en norme L^∞ grâce à un processus d'itération.

3.1 Une approche L^2 du problème

La preuve du Théorème 3.1 s'effectue en deux temps. La première étape consiste à montrer que si la condition de pincement (P_C) est satisfaite, alors M est proche d'une sphère en un sens L^2. Pour cela, commençons par un premier lemme qui donne un estimation de la norme L^2 du vecteur position. Afin d'alléger les notations, nous supposerons à partir de maintenant que le volume de la variété M est égal à 1.

Lemme 3.2 *Si la condition de pincement (P_C) est satisfaite pour $C < \frac{n}{2}||H_k||_{2p}^2$, alors :*

$$\frac{n\lambda_1(M)\left(\int_M H_{k-1}\right)^4}{\left(C + \lambda_1(M)\left(\int_M H_{k-1}\right)^2\right)^2} \leqslant ||X||_2^2 \leqslant \frac{n}{\lambda_1(M)} \leqslant A_1,$$

où A_1 est une constante positive ne dépendant que de n, $||H||_\infty$ et $||H_k||_{2p}$.

Preuve : Si (P_C) est satisfaite, on a alors :

$$\lambda_1(M)\left(\int_M H_{k-1}dv_g\right)^2 \geqslant n||H_k||_{2p}^2 - C.$$

Si l'on suppose de plus que $C < \frac{n}{2}||H_k||_{2p}$, on obtient alors

$$\lambda_1(M)\left(\int_M H_{k-1}dv_g\right)^2 \geqslant \frac{n}{2}||H_k||_{2p}^2,$$

et donc

$$\frac{n}{\lambda_1(M)} \leqslant \frac{2\left(\int_M H_{k-1}\right)^2}{||H_k||_{2p}^2} \leqslant \frac{2||H||_\infty^{2(k-1)}}{||H_k||_{2p}^2}.$$

D'autre part, de la caractérisation variationnelle de $\lambda_1(M)$, nous avons :

$$\lambda_1(M)\int_M |X|^2 dv_g \leqslant \int_M \left(\sum_{i=1}^{n+1} |dX_i|^2\right) = n,$$

où les fonctions X_i sont les fonctions composantes de l'immersions, définies par $X = \sum_{i=1}^{n+1} X_i \partial_i$, où $\{\partial_1, \cdots, \partial_{n+1}\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$. De ce fait, nous avons $||X||_2^2 \leqslant \dfrac{n}{\lambda_1(M)}$, et par conséquent :

$$||X||_2^2 \leqslant A_1(n, ||H||_\infty, ||H_k||_{2p}).$$

Pour le membre de gauche de l'inégalité, nous avons :

$$\begin{aligned}
\lambda_1(M) \int_M |X|^2 \left(\int_M H_{k-1} \right)^4 &\leqslant n \left(\int_M H_{k-1} \right)^4 \\
&\leqslant n \left(\int_M H_k \langle X, \nu \rangle \right)^4 \\
&\leqslant n \left(\int_M H_k^2 \right)^2 \left(\int_M |X|^2 \right)^2.
\end{aligned}$$

On en déduit donc :

$$\lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^4 \leqslant n ||H_k||_{2p}^2 \left(\int_M |X|^2 \right),$$

d'où avec la condition de pincement :

$$||X||_2^2 \geqslant \frac{n\lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^4}{\left(C + \lambda_1(M) \left(\int_M H_{k-1} \right)^2 \right)^2}.$$

$\square$

À partir de maintenant, nous noterons X^T la projection orthogonale du vecteur position X sur M. Autrement dit, si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base orthonormée de T_xM, alors

$$X^T = \sum_{i=1}^{n} \langle X, e_i \rangle e_i = X - \langle X, \nu \rangle \nu.$$

Dans le lemme suivant, nous montrons que la condition de pincement (P_C) implique que la norme L^2 de X^T est proche de 0.

Lemme 3.3 *La condition de pincement (P_C) avec $C < \frac{n}{2} ||H_k||_{2p}^2$ implique*

$$||X^T||_2^2 \leqslant A_2 C,$$

où A_2 est une constante positive ne dépendant que de n, $||H||_\infty$ et $||H_k||_{2p}$.

Preuve : Nous venons de voir que

$$\lambda_1(M)\int_M |X|^2 dv_g \quad\leqslant\quad n,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\lambda_1(M)\int_M |X|^2 dv_g \left(\int_M H_{k-1} dv_g\right)^2 \quad &\leqslant\quad n\left(\int_M H_{k-1} dv_g\right)^2 \\
&\leqslant\quad n\left(\int_M H_k \langle X,\nu\rangle\, dv_g\right)^2 \\
&\leqslant\quad ||H_k||_2^2 \int_M \langle X,\nu\rangle^2 \\
&\leqslant\quad ||H_k||_{2p}^2 \int_M \langle X,\nu\rangle^2
\end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que

$$\begin{aligned}
n||H_k||_{2p}^2 ||X^T||_2^2 \quad &\leqslant\quad n||H_k||_{2p}^2 \left(\int_M \left(|X|^2 - \langle X,\nu\rangle^2\right) dv_g\right) \\
&\leqslant\quad n||H_k||_{2p}^2 \int_M |X|^2 dv_g - \lambda_1(M)\left(\int_M H_{k-1} dv_g\right)^2 \int_M |X|^2 dv_g \\
&\leqslant\quad \left[n||H_k||_{2p}^2 - \lambda_1(M)\left(\int_M H_{k-1} dv_g\right)^2\right] ||X||_2^2 \\
&\leqslant\quad C||X||_2^2 \leqslant A_1 C.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$||X^T||_2^2 \leqslant \frac{A_1 C}{n||H_k||_{2p}^2} = A_2 C.$$

$\square$

Rappelons que nous voulons montrer que la fonction α est inférieure à ε, c'est-à-dire

$$\left|\left||X| - \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\right|\right|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Pour cela, nous allons d'abord avoir besoin d'une majoration de la norme L^2 de la fonction $\varphi := |X|\left(|X| - \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\right)^2$. Nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.4 *La condition de pincement* (P_C) *avec* $C < \frac{n}{2}||H_k||_{2p}^2$ *implique*

$$||\varphi||_2 \leqslant A_4 ||\varphi||_\infty^{3/4} C^{1/4}.$$

Preuve : Nous admettons la preuve (un peu technique) de ce lemme. On pourra la trouver dans son intégralité dans l'article [Rot08].

3.2 De L^2 vers L^∞

Dans la Section 3.1, nous avons, sous l'hypothèse de pincement, pu rendre les quantités α et β petites en norme L^2. Nous allons maintenant les rendre petites en norme L^∞ grâce à un processus d'itération. Voici le résultat qui va nous le permettre, il est dû à Colbois et Grosjean [CG07].

Proposition 3.5 *Soit* $(M^n, g) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *et soit* ξ *une fonction réelle continue sur* M *telle que* ξ^k *est lisse pour tout* $k \geqslant 2$. *Supposons que* $V(M) = 1$ *et qu'il existe* $0 \leqslant l < m \leqslant 2$ *tels que*

$$\frac{1}{2}\xi^{2k-2}\Delta\xi^2 \leqslant \operatorname{div}\omega + (\alpha_1 + k\alpha_2)\xi^{2k-l} + (\beta_1 + k\beta_2)\xi^{2k-m},$$

où ω *est une* 1*-forme et* α_1, α_2, β_1 *et* β_2 *des constantes positives ou nulles. Alors, pour tout* $\eta > 0$, *il existe une constante positive* L *dépendant de* n, α_1, α_2, β_1, β_2, $||H||_\infty$ *et* η *telle que si* $||\xi||_\infty > \eta$, *alors*

$$||\xi||_\infty \leqslant L||\xi||_2.$$

De plus, L *est bornée lorsque* $\eta \longrightarrow +\infty$ *et si* $\beta_1 > 0$, *alors* $L \longrightarrow +\infty$ *si* $||H||_\infty \longrightarrow +\infty$ *ou* $\eta \longrightarrow 0$.

Grâce à cette proposistion et aux lemmes de la section précédente, nous donnons les résultats suivants sans preuve (voir [Rot08]) :

Lemme 3.6 *Pour* $p \geqslant 2$ *et tout* $\eta > 0$, *il existe* $K_\eta(n, ||H||_\infty, ||H_k||_{2p})$ *tel que si* (P_{K_η}) *est vraie, alors* $||\varphi||_\infty \leqslant \eta$. *De plus,* $K_\eta \longrightarrow 0$ *lorsque* $||H||_\infty \longrightarrow \infty$ *ou* $\eta \longrightarrow 0$.

Lemme 3.7 *Pour* $p \geqslant 2$ *et tout* $\eta > 0$, *il existe* $K_\eta(n, ||H||_\infty, ||H_k||_{2p})$ *tel que si* (P_{k_η}) *est vraie, alors* $||X^T||_\infty \leqslant \eta$.

Du Lemme 3.6, nous allons déduire que $\left| |X| - \sqrt{\frac{n}{\lambda_1}} \right| \leqslant \varepsilon$. En effet, soit $\varepsilon > 0$ et considérons la fonction $f(t) := t\left(t - \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\right)^2$. Posons $\varepsilon_0 :=$

$\min\left(\varepsilon, \frac{2}{3||H||_\infty}\right)$ et

$$\eta(\varepsilon) := \inf\left\{ f\left(\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} - \varepsilon_0\right), f\left(\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} + \varepsilon_0\right), \frac{1}{27||H||_\infty^3} \right\}.$$

Par définition, pour ε suffisamment petit, $\eta(\varepsilon) > 0$, et donc, par le Lemme 3.6, il existe $K_{\eta(\varepsilon)}$ tel que pour tout $x \in M$,

$$f(|X|) \leqslant \eta(\varepsilon). \tag{7}$$

Nous allons montrer que soit

$$\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} - \varepsilon \leqslant |X| \leqslant \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} + \varepsilon$$

soit

$$|X| < \frac{1}{3}\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}$$

En étudiant la fonction f, il est facile de voir que f a un unique maximum local en $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}$. De plus, grâce à la définition de $\eta(\varepsilon)$ et la majoration de $\lambda_1(M)$ en fonction de H, nous avons

$$\eta(\varepsilon) < \frac{4}{27||H||_\infty^3} \leqslant \frac{4}{27}\left(\frac{n}{\lambda_1(M)}\right)^{3/2} = f\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\right).$$

Comme nous avons supposé $\varepsilon_0 < \frac{2}{3||H||_\infty} \leqslant \frac{2}{3}\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}$, nous avons donc

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} < \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} - \varepsilon_0,$$

ce qui, combiné avec (7) donne bien l'alternative annoncée ci-dessus pour $|X|$.

D'autre part, le Lemme 3.2 assure qu'il existe un point $y_0 \in M$ tel que :

$$|X(y_0)|^2 \geqslant \frac{n\lambda_1(M)\left(\int_M H_{k-1}\right)^4}{\left(K_{\eta(\varepsilon)} + \lambda_1(M)\left(\int_M H_{k-1}\right)^2\right)^2}.$$

Comme $K_{\eta(\varepsilon)} < \frac{n}{2}||H_k||_{2p}^2$, la condition $(P_{K_{\eta(\varepsilon)}})$ implique

$$K_{\eta(\varepsilon)} < \frac{n}{2}||H_k||_{2p}^2 \leqslant \lambda_1(M)\left(\int_M H_{k-1}\right)^2 \leqslant 2\lambda_1(M)\left(\int_M H_{k-1}\right)^2.$$

Nous en déduisons alors que

$$|X(y_0)| \geqslant \frac{1}{3}\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}.$$

La variété M étant connexe, nous en déduisons que pour tout $x \in M$,

$$\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} - \varepsilon \leqslant |X| \leqslant \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} + \varepsilon,$$

ce qui prouve que sous une hypothèse de pincement suffisamment forte, le terme α peut être rendu aussi petit que l'on veut.

Concernant le terme β, c'est le Lemme 3.7 qui nous permet de conclure. Rappelons que

$$\left||dF_x(u)|^2 - 1\right| \leqslant \left|\frac{n}{\lambda_1(M)}\frac{1}{|X|^2} - 1\right| + \frac{n}{\lambda_1(M)}\frac{1}{|X|^4}\left\langle u, X\right\rangle^2, \tag{8}$$

pour tout vecteur unitaire $u \in T_xM$. Or,

$$\left|\frac{n}{\lambda_1(M)}\frac{1}{|X|^2} - 1\right| = \frac{1}{|X|^2}\left|\frac{n}{\lambda_1(M)} - |X|^2\right| \leqslant \varepsilon\frac{\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} + |X|}{|X|^2} \leqslant \varepsilon\frac{2\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} + \varepsilon}{\left(\sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}} - \varepsilon\right)^2}$$

Rappelons que nous avons $\dfrac{n}{A_1} \leqslant \lambda_1 \leqslant ||H||_\infty^2$. Si l'on suppose $\varepsilon < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{||H||_\infty}}$, alors le membre de droite peut être majoré par une constante ne dépendant que de n, $||H||_\infty$ et $||H_k||_{2p}$, et l'on a

$$\left|\frac{n}{\lambda_1(M)}\frac{1}{|X|^2} - 1\right| \leqslant \varepsilon\gamma(n, ||H||_\infty, ||H_k||_{2p}). \tag{9}$$

D'autre part, comme $C_\varepsilon \longrightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, il existe ε tel que $C_\varepsilon \leqslant K_\eta$ (où K_η est la constante du Lemme 3.7) et ainsi, $||X^T||_\infty \leqslant \eta$. De plus, comme précédemment, il existe une constante δ dépendant de n, $||H||_\infty$ et$||H_k||_{2p}$ telle que

$$\frac{n}{\lambda_1(M)}\frac{1}{|X|^4}\left\langle u, X\right\rangle^2 \leqslant \frac{n}{\lambda_1(M)}\frac{1}{|X|^4}||X^T||_\infty^2 \leqslant \eta^2\delta(n, ||H||_\infty, ||H_k||_{2p}). \tag{10}$$

Ainsi, par (8), (9) et (10), nous déduisons que (P_{C_ε}) implique

$$\left||dF_x(u)|^2 - 1\right| \leqslant \varepsilon\gamma + \eta^2\delta.$$

Choisissons alors $\eta = \sqrt{\frac{\theta}{2\delta}}$. On peut supposer que ε est suffisamment petit pour que $\varepsilon\gamma \leqslant \dfrac{\theta}{2}$. Dans ce cas, nous avons

$$\Big| |dF_x(u)|^2 - 1 \Big| \leqslant \theta.$$

Il suffit maintenant de fixer $\theta \in]0,1[$ et ainsi, F est un difféomorphisme local de M dans $S\left(0, \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\right)$. Comme $S\left(0, \sqrt{\frac{n}{\lambda_1(M)}}\right)$ est simplement connexe pour $n \geqslant 2$, F est un difféomorphisme global. $\square$

4 Hypersurfaces presque Einstein et presque ombiliques

Dans cette section, nous allons donner quelques applications du Théorème 3.1 aux hypersurfaces presque-Einstein et presque-ombiliques de l'espace euclidien.

Nous partons du constat suivant fait pas Thomas :

Théorème 4.1 *[Tho36] Une hypersurface de l'espace euclidien qui est d'Einstein (à courbure scalaire positive) est une sphère géodésique.*

Récemment, J.F. Grosjean [Gro02] a redémontré ce résultat grâce à une majoration de la première valeur propre du laplacien. En effet, il a d'abord montré que si la courbure scalaire de M est strictement positive, alors la première valeur propre du laplacien satisfait :

$$\lambda_1(M) \leqslant \frac{1}{n-1} ||\mathrm{Scal}\,||_\infty,$$

avec égalité uniquement pour les sphères géodésiques. Si de plus, (M, g) est d'Einstein, par exemple, $\mathrm{Ric} = (n-1)\mathrm{Id}$, alors d'une part, le théorème de Lichnerowicz assure que $\lambda_1 \geqslant n$ et d'autre part,

$$\lambda_1(M) \leqslant \frac{1}{n-1} ||\mathrm{Scal}\,||_\infty = n. \tag{11}$$

Par conséquent, $\lambda_1(M) = n$, nous sommes dans le cas d'égalité de la majoration (11) et du théorème de Lichnerowicz-Obata, ce qui implique que $M = \mathbb{S}^n$.

Cette approche permet de penser qu'un résultat de pincement sur la première valeur propre du laplacien pourrait permettre de montrer qu'une hypersurface presque Einstein de $\mathbb{R}^{n+1}$ est proche d'une sphère en un sens à préciser.

En fait, nous obtenons deux résultats avec des proximités différentes. Le premier résultat est obtenu par un résultat de pincement de la première valeur propre du laplacien pour l'inégalité de Lichnerowicz. Le théorème suivant se déduit immédiatement du théorème de [Aub]

Théorème 4.2 *[Rot08] Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte sans bord, connexe, orientée, immergée isométriquement dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et soit $p > \frac{n}{2}$. Alors, pout tout $k > 0$, il existe un $\eta(k, n, ||K||_{2p})$ (où K est la courbure sectionnelle de M) tel que si (M^n, g) est η-presque-Einstein, c'est-à-dire,*

$$||\mathrm{Ric} - kg||_\infty \leqslant \eta,$$

alors M est homéomorphe à $\mathbb{S}^n$.

Voici un second théorème avec une conclusion plus forte, mais obtenu avec le résultat de pincement sur la majoration extrinsèque de la première valeur propre (Théorème 3.1).

Théorème 4.3 *[Rot08] Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte sans bord, connexe, orientée, immergée isométriquement dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Alors, pour tout $k > 0$, il existe un $\varepsilon(k, n, ||H||_\infty) > 0$ tel que si (M^n, g) est ε-presque-Einstein, c'est-à-dire,*

$$||\mathrm{Ric} - kg||_\infty \leqslant \varepsilon,$$

alors M est difféomorphe et quasi-isométrique à $\mathbb{S}^n\left(\sqrt{\frac{n-1}{k}}\right)$.

Preuve : Comme M est ε-presque-Einstein, nous savons que $\mathrm{Ric} \geqslant k - \varepsilon$. Afin de simplifier les calculs, nous supposerons $k = n-1$. Par le Théorème de Lichnerowicz, nous pouvons majorer la première valeur propre du laplacien :

$$\lambda_1(M) \geqslant \frac{n(n-1-\varepsilon)}{n-1} = n - \frac{n\varepsilon}{n-1}.$$

De ce fait, nous avons pour $p \geqslant \frac{n}{4}$

$$\begin{aligned}
\lambda_1(M)\left(\int_M H\right)^2 - n||H_2||_{2p}^2 &\geqslant \left(n - \frac{n\varepsilon}{n-1}\right)\left(\int_M H_2^{1/2}\right)^2 - n||H_2||_{2p}^2 \\
&\geqslant \left(n - \frac{n\varepsilon}{n-1}\right)\inf\{H_2\} - n\mathrm{Sup}\{H_2\} \\
&\geqslant \left(n - \frac{n\varepsilon}{n-1}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon}{n-1}\right) - n\left(1 + \frac{\varepsilon}{n-1}\right) \\
&\geqslant \frac{n\varepsilon^2}{(n-1)^2} - \frac{3n\varepsilon}{n-1} = -\beta_n(\varepsilon),
\end{aligned}$$

où β_n est une fonction positive telle que $\beta_n(\varepsilon) \longrightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Si ε est suffisamment petit pour que $\beta_n(\varepsilon) \leqslant C$ où C est la constante du Théorème 3.1, alors M est difféomorphe et quasi-isométrique à $\mathbb{S}^n$. Choisir un tel ε est possible, et nous en déduisons qu'il existe un ε dépendant uniquement de n et $||H||_\infty$ tel que si $||\mathrm{Ric} - (n-1)||_\infty \leqslant \varepsilon$, alors M est difféomorphe et quasi-isométrique à $\mathbb{S}^n$. $\square$

On déduit maintenant facilement un résultat analogue pour les hypersurfaces presque ombiliques. Précisément, nous avons :

Corollaire 4.4 *Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte sans bord, connexe, orientée, immergée isométriquement dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit $\theta \in]0,1[$. Si (M^n, g) est presque-ombilique, c'est-à-dire, $||B - kg||_\infty \leqslant \varepsilon$ pour une constante positive k, avec ε assez petit dépendant de n, k et θ alors M est difféomorphe et θ-quasi-isométrique à $\mathbb{S}^n\left(\frac{1}{k}\right)$*

Preuve : La preuve se déduit immédiatement de la formule de Gauss (2) et du Théorème 4.3. $\square$

5 Un résultat de rigidité pour les sphères

Le célèbre théorème d'Alexandrov [Ale56] assure qu'une hypersurface compacte plongée dans $\mathbb{R}^{n+1}$ dont la courbure moyenne est compacte est une sphère. Ce résultat n'est plus vrai pour les surfaces immergées. En effet, les tores de Wente (voir [Wen86]) sont des exemples de surfaces compactes à courbure moyenne compacte dans $\mathbb{R}^3$ qui ne sont pas des sphères géodésiques. D'autres exemples, de dimension et de genre supérieurs, sont connus (voir [JP05] par exemple).

Pour les surfaces immergées de courbure moyenne constante, une condition supplémentaire est requise pour conclure. En effet, le théorème de Hopf [Hop83] dit qu'une sphère immergée dans $\mathbb{R}^3$ à courbure moyenne constante est une sphère géodésique. Cependant, même ce résultat n'est plus vrai en dimension supérieure (voir [HTY83]).

Dans cette section, nous donnons un nouveau résultat de rigidité pour les sphères, valable en toute dimension. Tout d'abord, il est facile de voir qu'une hypersurface compacte de $\mathbb{R}^{n+1}$ dont la courbure moyenne et la courbure scalaire sont toutes deux constantes est une sphère (car totalement ombilique). Ici, nous obtenons un résultat similaire avec une hypothèse moins forte sur la courbure scalaire.

Théorème 5.1 *[Rot] Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte sans bord, connexe, orientée, immergée isométriquement dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit h une constant strictement positive. Alors, il existe $\varepsilon(h) > 0$ tel que si*

(1) $H = h$ *et*

(2) $|\mathrm{Scal} - s| \leqslant \varepsilon$,

pour une constante s, alors s satisfait $|s - n(n-1)h| \leqslant \varepsilon$ et M est une sphère géodésique de rayon $\frac{1}{h}$.

Ce théorème est une consèquence directe du résultat suivant :

Théorème 5.2 *[Rot] Soit (M^n, g) une variété riemannienne compacte sans bord, connexe, orientée, immergée isométriquement dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Soit h une constant strictement positive. Alors, pour tout $\theta \in]0,1[$ il existe $\varepsilon(h,\theta) > 0$ tel que si*

(1) $|H - h| \leqslant \varepsilon$ *et*

(2) $|\mathrm{Scal} - s| \leqslant \varepsilon$,

pour une constante s, alors s satisfait $|s - n(n-1)h| \leqslant \varepsilon$ et M difféomorphe et θ-quasi-isométrique à $\mathbb{S}^n\left(\frac{1}{h}\right)$.

Preuve : Tout d'abord, montrons que h et s sont liés.

Lemme 5.3 *Si $|H - h| \leqslant \varepsilon$ et $|\mathrm{Scal} - s| \leqslant \varepsilon$, alors les deux constantes h et s satisfont*

$$h = \frac{1}{n(n-1)} s + A\varepsilon,$$

où A est une constante dépendant seulement de n et h.

Par hypothèse, nous avons $H(x) = h + f_1(x)\varepsilon$ et $\mathrm{Scal}\,(x) = h + f_2(x)\varepsilon$, avec f_1 et f_2 deux fonctions satisfaisant $|f_1(x)| \leqslant 1$ et $|f_2(x)| \leqslant 1$. Or par la formule de Hsiung-Minkowski (3), nous avons

$$\begin{aligned}
0 &= \int_M \left(h + \varepsilon f_1(x) - \left(\frac{1}{n(n-1)} s + \varepsilon f_2(x) \right) \langle X, \nu \rangle \right) dv_g \\
&= h\mathrm{Vol(M)} + \varepsilon \int_M f_1(x) dv_g - \frac{1}{n(n-1)} \int_M s \langle X, \nu \rangle \, dv_g \\
&\quad - \frac{\varepsilon}{n(n-1)} \int_M f_2(x) \langle X, \nu \rangle \, dv_g \\
&= A_1\varepsilon + h\mathrm{Vol(M)} - \frac{s}{n(n-1)h} \int_M h \langle X, \nu \rangle \, dv_g \\
&= A_1\varepsilon + h\mathrm{Vol(M)} - \frac{s}{n(n-1)h} \int_M (H(x) - \varepsilon f_1(x)) \langle X, \nu \rangle \, dv_g \\
&= A_2\varepsilon + h\mathrm{Vol(M)} - \frac{s}{n(n-1)h} \int_M H \langle X, \nu \rangle \, dv_g
\end{aligned}$$

Mais, nous savons que $\int_M H \langle X, \nu \rangle \, dv_g = \mathrm{Vol(M)}$, ce qui implique

$$A_2\varepsilon + h - \frac{s}{n(n-1)h} = 0.$$

Finalement, on déduit $s = n(n-1)h^2 + A\varepsilon$, où A est une constante dépendant seulement n de h. □

Il reste maintenant à conclure la preuve. Il nous suffit de montrer que M est presque ombilique afin d'appliquer le Corollaire 4.4. Pour cela, nous allons utiliser une nouvelle fois la formule de Gauss. Nous avons :

$$\begin{aligned}
|B - H\mathrm{Id}\,|^2 &\leqslant n(n-1)H^2 - \mathrm{Scal} \\
&\leqslant n(n-1)\,(h + \varepsilon f_1(x))^2 - (s + \varepsilon f_2(x)) \\
&\leqslant n(n-1)h^2 - s + \varepsilon h(x) \\
&\leqslant A'\varepsilon.
\end{aligned}$$

Or, comme la courbure moyenne est presque constante, nous en déduisons :

$$|B - h\mathrm{Id}\,|^2 \leqslant A''\varepsilon,$$

et nous pouvons conclure en choisissant ε suffisamment petit. □

Preuve du Théorème 5.1. Pour $\varepsilon(n, h)$ suffisamment petit, nous savons par le

Théorème précédent que M est difféomorphe et quasi-isométrique à $\mathbb{S}^n\left(\frac{1}{h}\right)$. Mieux, nous connaissons explicitement un difféomorphisme, celui donné dans la preuve du Théorème 3.1. Or, ce difféomorphisme F étant de la forme $G \circ \phi$, nous en déduisons alors que l'immersion ϕ de M dans $\mathbb{R}^{n+1}$ est nécessairement injective, ce qui en fait un plongement. Comme M est supposée à courbure moyenne constante, le théorème d'Alexandrov nous assure que M est une sphère géodésique de rayon correspondant, c'est-à-dire, $\mathbb{S}^n\left(\frac{1}{h}\right)$. $\square$

Remarque 2 *Nous pouvons formuler un second résultat analogue au Théorème 5.1, en inversant les rôles de H et* Scal*, c'est-à-dire, H presque constante et* Scal *constante. En effet, la preuve est la même à l'exception du fait qu'on utilise le théorème d'Alexandrov pour la courbure scalaire dû à A. Ros [Ros87]. Ceci donne une réponse partielle à la conjecture de Yau disant que toute hypersurfaces compacte de l'espace euclidien de courbure scalaire constante et une sphère géodésique.*

Remerciements

L'auteur souhaite remercier Gérard Besson pour son invitation au séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie de l'institut Fourier dont l'exposé a donné lieu à cette note.

Références

[Ale56] A.D. Alexandrov, *Uniqueness theorems for the surfaces in the large I*, Vesnik Leningrad Univ. **11** (1956), 5–17.

[Aub] E. Aubry, *Diameter pinching in almost positive Ricci curvature*, To appear.

[CG07] B. Colbois and J.F. Grosjean, *A pinching theorem for the first eigenvalue of the Laplacian on hypersurfaces of the Euclidean space*, Comment. Math. Helv. **82** (2007), 175–195.

[Gro02] J.F. Grosjean, *Upper bounds for the first eigenvalue of the Laplacian on compact manifolds*, Pac. J. Math. **206** (2002), no. 1, 93–111.

[Hop83] H. Hopf, *Differential geometry in the large*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1000, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[HTY83] W.J. Hsiang, Z.U. Teng, and W.C. Yu, *New examples of constant mean curvature immersions of (2k-1)-spheres into euclidean 2k-space*, Ann. Math. (2) **117** (1983), no. 3, 609–625.

[JP05] M. Jleli and F. Pacard, *An end-to-end construction for compact constant mean curvature surfaces*, Pac. J. Math. **221** (2005), no. 1, 81–108.

[Rei77] R.C. Reilly, *On the first eigenvalue of the Laplacian for compact submanifolds of Euclidean space*, Comment. Math. Helv. **52** (1977), 525–533.

[Ros87] A. Ros, *Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvatures*, Revista Mat. Iberoamer. **3** (1987), 477–483.

[Rot] J. Roth, *Sphere rigidity in the euclidean space*, Preprint JAD 00733.

[Rot08] ______, *Pinching of the first eigenvalue of the Laplacian and almost-Einstein hypersurfaces of Euclidean space*, Ann. Glob. Anal. Geom. **33** (2008), no. 3, 293–306.

[Tho36] T.Y. Thomas, *On closed space of constant mean curvature*, Amer. J. Math. **58** (1936), 702–704.

[Wen86] H. Wente, *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*, Pac. J. Math. **121** (1986), no. 1, 193–243.

Julien Roth
Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquée
Université Paris-Est Marne-la-Vallée
5 boulevard Descartes
Cit Descartes - Champs-sur-Marne
77454 Marne-la-Valle cedex 2
email : `julien.roth@univ-mlv.fr`