Université Paris XII, UFR Sciences et Technologie 2010-2011
Licence, Semestre 2 Algèbre dans $\mathbb{R}^n$
R. Hadiji, S. Seuret

Feuille n°1 : Systèmes linéaires

1. Les deux systèmes suivants sont-ils équivalents ?

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

2. On considère les quatre systèmes linéaires suivants :

$$(S_1) : \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + y - z = -3 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 5 \\ x - 3y + 11z = 2 \\ -3x + 4y - 18z = 1 \end{cases}$$

$$(S_3) : \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 5x + 2y - z = 7 \\ -3x - 4y + 3z = -1 \end{cases} \qquad (S_4) : \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 6y + 2z + 5t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 13 \end{cases}$$

1. Donner la matrice de chacun de ces systèmes.
2. Donner le système homogène associé à chacun de ces systèmes.
3. Mettre (S_1), (S_2), (S_3) et (S_4) sous forme échelonnée.
4. Résoudre (S_1), (S_2), (S_3) et (S_4).

3. Donner la matrice des systèmes suivants, puis résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(S_1) : \begin{cases} 10x + 7y + 8z + 7t = 32 \\ 7x + 5y + 6z + 5t = 23 \\ 8x + 6y + 10z + 9t = 33 \\ 7x + 5y + 9z + 10t = 31 \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} 7x + 5y + 6z + 5t = 23 \\ 8x + 6y + 10z + 9t = 33 \\ 10x + 7y + 8z + 7t = 32 \end{cases}$$

4. Donner la matrice des systèmes suivants, puis résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$(S_1) : \begin{cases} 3z_1 + 4z_2 = 6 \\ (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = -5 + 3i \end{cases} \qquad (S_2) : \begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ z_2 + z_3 = -1 \\ z_1 + z_3 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

5. Trouver trois réels a, b et c tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1,2,3\}, \quad \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}.$$

6. Gérard, Simone, Thérèse et Robert font leur marché.

- Gérard achète 3 kilos de bananes, 1 kilo de pommes, 1/2 kilo de tomates et 1 kilo de pommes de terre. Il doit payer 9 euros.
- Simone achète 1 kilo de bananes, 1 kilo de pommes, 1 kilo de tomates et 1 kilo de pommes de terre. Elle doit payer $7,5$ euros.
- Thérèse achète 2 kilos de bananes et 1 kilo de pommes. Elle doit payer 5 euros.
- Robert achète 1 kilo de tomates et 5 kilos de pommes de terre. Il doit payer 8 euros.

Déterminer le prix d'un kilo de bananes, d'un kilo de pommes, d'un kilo de tomates et d'un kilo de pommes de terre.

7. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants en discutant suivant la valeur du paramètre complexe m.

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{rcrcl} (m-1)x & & +y & = & 3 \\ x & + & (m-1)y & = & 5 \end{array} \right. \qquad (S_2) : \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & +y & +mz & = & m \\ x & +my & -z & = & 1 \\ x & +y & -z & = & 1 \end{array} \right.$$

8. Résoudre les systèmes (S) suivants (en discutant suivant la valeur des paramètres réels a et b pour le second système) :

$$(S_1) : \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{array} \right. \qquad (S_2) : \left\{ \begin{array}{c} x_2 = ax_1 + b \\ x_3 = ax_2 + b \\ \vdots \\ x_n = ax_{n-1} + b \\ x_1 = ax_n + b \end{array} \right.$$

9. Déterminer tous les triplets (x, y, z) de réels strictement positifs tels que

$$xyz = 1, \quad x^2y = e \quad \text{et} \quad xy^3z = e^{-1}.$$

Feuille n°2 : Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

1. Parmi les ensembles suivants, déterminer ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = 0\}, \qquad F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ xy = 0\}$$
$$F_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = x + y\}, \qquad F_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = x^2\}.$$

2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(2,3,-1)$ et $(1,-1,-2)$, et G le sous-espace vectoriel engendré par $(3,7,0)$ et $(5,0,-7)$.

Montrer que $F = G$.

3. Soit $(\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p)$ une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Montrer que les vecteurs

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1,\ \vec{y}_2 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2,\ \vec{y}_3 = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3, \ldots, \vec{y}_p = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3 + \cdots + \vec{x}_p$$

sont linéairement indépendants. Réciproque ?

4. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u}_1 = (1,-2,1), \quad \vec{u}_2 = (1,-3,1), \quad \vec{u}_3 = (2,-4,3).$$

Forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$? Si oui, calculer dans cette base les coordonnées du vecteur $\vec{u} = (a,b,c)$.

5. On considère les vecteurs de $\mathbb{C}^3$:

$$\vec{u}_1 = (1-i, i, 1+i), \quad \vec{u}_2 = (-1,1,3), \quad \vec{u}_3 = (1-i, i, i).$$

Montrer que $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$ et calculer les coordonnées du vecteur $(1+i, 2, i)$ dans cette base.

6. Dans $\mathbb{C}^3$, on considère les vecteurs $\vec{u} = (0,3,i)$, $\vec{v} = (-1,h,5+i)$ et $\vec{w} = (k,1,h)$. Déterminer l'ensemble des couples $(h,k) \in \mathbb{C}^2$ pour lesquels la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est libre.

7. Les trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$:

$$\vec{V}_1 = (2,3,-1,4), \quad \vec{V}_2 = (1,-2,3,-2), \quad \vec{V}_3 = (3,0,2,3)$$

forment-ils une famille libre ? Compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^4$.

8. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^5$ suivants :

$$\vec{u}_1 = (1,2,0,1,1), \quad \vec{u}_2 = (0,1,1,1,1), \quad \vec{u}_3 = (1,4,1,2,1).$$

1. Montrer que la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre.

2. Soit $\vec{v} = (a,b,c,d,e)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a,b,c,d,e) pour que $\vec{v}$ appartienne au sous-espace vectoriel F engendré par la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

9. Soit F l'ensemble des triplets (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $x + 2y - z = 0$.

1. L'ensemble F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

2. Soient $\vec{u} = (2,-1,0)$ et $\vec{v} = (0,1,2)$. Montrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est libre et qu'elle engendre F.

3. Soit $\vec{s} = (1,1,3)$. Vérifier que $\vec{s} \in F$ et exprimer $\vec{s}$ en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

4. Soit G l'ensemble des triplets (x,y,z) tels que $x+2y-z = 1$. L'ensemble G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

10. Donner une base de l'ensemble F des solutions du système linéaire :

$$\begin{cases} x + y - z + 2t = 0 \\ 3x - 8y + z - t = 0 \\ 5x - 6y - z + 3t = 0 \end{cases}$$

11. Soit $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Démontrer l'identité du parallélogramme :

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 + \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2.$$

Interprétation géométrique ?

12. Donner un exemple de base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ ayant pour premier vecteur $\vec{e}_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,-1,1)$.

13. Soit $\vec{u} = (x,3,3)$, $\vec{v} = (2,x,0)$ et $\vec{w} = (1,0,x)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur x pour que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit libre.

2. Peut-on trouver x tel que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit orthogonale ?

14. Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de norme 1 de $\mathbb{R}^n$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{u} = -\frac{1}{2}$. Calculer $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$. Interprétation géométrique ?

15. Montrer que pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on a

$$\left|x + y + z + t\right| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}.$$

Déterminer l'ensemble des quadruplets (x,y,z,t) pour lesquels on a égalité.

Université Paris XII, UFR Sciences et Technologie — 2010-2011
LICENCE, SEMESTRE 2 — Algèbre dans $\mathbb{R}^n$
R. Hadiji, S. Seuret

Feuille n°3 : Matrices

1. Ecrire: **a)** une matrice 3×2; **b)** une matrice 1×5; **c)** une matrice 3×1.

2. Calculer
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 3\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Calculer les produits de matrices :
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Soit N un entier positif et soit A une matrice **carrée** de taille n. On définit par récurrence
$$A^2 = A\,A, \quad A^3 = A\,A^2, \quad \dots \quad A^N = A\,A^{N-1}$$
Calculer A^N si

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
- A est la matrice carrée de taille $n \geq 2$ telle que
$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 1 + i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. Soient A et B deux matrices triangulaires supérieures de taille n. Montrer que AB est aussi une matrice triangulaire supérieure de taille n.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}$, $B \in \mathcal{M}_{m,l}$ et $C \in \mathcal{M}_{l,k}$. Soient p et s deux entiers tels que $1 \leq p \leq n$ et $1 \leq s \leq k$. Montrer que
$$(\,(AB)\,C)_{ps} = \sum_{r=1}^{l}\left(\sum_{q=1}^{m}(A)_{pq}(B)_{qr}\right)(C)_{rs}$$
et
$$(\,A\,(BC)\,)_{ps} = \sum_{q=1}^{m}(A)_{pq}\left(\sum_{r=1}^{l}(B)_{qr}\,(C)_{rs}\right).$$
En déduire que $A(BC) = (AB)C$.

7. Soit A une matrice carrée de taille 4 et soit b une matrice 4×1,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Trouver x, une matrice 4×1 telle que $Ax = b$.

8. Calculer le rang de la famille de vecteurs $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$, où

$$\vec{v}_1 = (2,1,3,1), \quad \vec{v}_2 = (1,2,0,1), \quad \vec{v}_3 = (-1,1,-3,0), \quad \vec{v}_4 = (0,3,-3,1).$$

9. Soit a un nombre réel. Calculer les rangs des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

en fonction de a.

10. Calculer les matrices inverses de

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. Trouver les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la matrice

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible.

12. Soient A et B deux matrices carrées de taille 2. On pose $X = AB - BA$. Montrer que $x_{11} + x_{22} = 0$. Généraliser aux matrices carrées de taille n.

13. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Construire une famille finie de matrices élémentaires E_1, E_2, E_3 ... E_L telle que la matrice $U = E_L \dots E_2\, E_1\, A$ soit triangulaire supérieure.

Université Paris XII, UFR Sciences et Technologie — 2010-2011
LICENCE, SEMESTRE 2 — Algèbre dans $\mathbb{R}^n$
R. Hadiji, S. Seuret

Feuille n°4 : Matrices (2)

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer l'ensemble des matrices B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$.

2. On définit deux suites complexes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par leur premier terme $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$, et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n + 2y_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = x_n + y_n.$$

1. Trouver une matrice A telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$
2. En déduire la valeur de x_n et de y_n en fonction de n.

3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Par la méthode du pivot de Gauss, montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. Montrer que $A^3 - 6A = 9I_3$ et retrouver la valeur de A^{-1}.

4. Soit $A_{23} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice élémentaire associée aux permutations des lignes 2 et 3. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A_{23}B$ et BA_{23}. Que remarquez-vous ?
2. Plus généralement, soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et A_{kl} la matrice élémentaire associée aux permutations des lignes k et l. Calculer $A_{kl}M$ et MA_{kl}.
3. Reprendre le calcul de EM et de ME pour E matrice élémentaire quelconque.

5. Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$\vec{X}_1 = (x+1, x-1, x-3), \quad \vec{X}_2 = (1, x-1, -1), \quad \vec{X}_3 = (x+1, -x-1, 1),$

où x est un paramètre réel. On pose $F = \mathrm{Vect}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$.

1. Calculer, selon la valeur de x, la dimension de F.
2. Pour $x = 1$, déterminer une base de F et une équation de F.

6. Soit a un paramètre réel. On pose

$$\vec{X}_1 = (1,1,1,1), \quad \vec{X}_2 = (-a, 2, 3, a) \quad \text{et} \quad \vec{X}_3 = (a^2, 4, 9, a^2).$$

Calculer le rang de $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$ en fonction de la valeur de a.