TD1: Les nombres complexes

Exercice 1. Montrer que $(1+2i)(2-3i)(2+i)(3-2i)$ est un nombre réel.

Exercice 2. Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Calculer $\overline{j}$, j^2, j^3, j^n, avec $n \in \mathbb{N}^*$, $1+j+j^2$.

b) Dans le plan complexe représenter j, j^2 et j^3.

Exercice 3. Calculer $1 - i + i^2 + \ldots + (-1)^n i^n$ et $(1+i)^n + (1-i)^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4.

a) Ecrire sous la forme $a+ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les complexes $\frac{3+6i}{3-4i}$ et $\frac{i+5}{(i+3)^2}$.

b) Ecrire sous forme trigonométrique les complexes $\frac{1+i}{1-i}$ et $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.

Exercice 5.

a) Linéariser $\cos x \ \sin^2 5x$ (linariser = transformer en somme de cosinus et sinus).

b) Exprimerer $\cos 5x$ et $\sin 5x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{2}$.

Exercice 7.

a) Trouver les racines carrées de $-3+4i$ et $46 - 14\sqrt{3}i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^8 = 256$ et $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$.

Exercice 8. On pose pour $(a, h) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} U &= \cos\ a + \cos(a+h) + \cos(a+2h) + \ldots + \cos(a+(n-1)h) \\ V &= \sin\ a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \ldots + \sin(a+(n-1)h). \end{aligned}$$

a) Calculer U et V à l'aide du complexe $U + iV$.

b) Calculer $\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11}$.

c) Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$:

$$1 + \frac{\cos x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \cdots + \frac{\cos nx}{\cos^n x}.$$

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10. Donner les racines sixièmes de $8i$ en calculant les racines carrées des racines cubiques. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Exercice 11.
Dans cet exercice, Z désigne le nombre complexe

$$\cos\frac{2\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5}.$$

a) Vérifier que $Z^5 - 1 = 0$. En déduire la relation :

$$1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 = 0.$$

b) (1) Exprimer Z, Z^2, Z^3, Z^4 sous forme trigonométrique.
   (2) Démontrer les égalités :

$$Z + Z^4 = 2\cos\frac{2\pi}{5} \quad \text{et } Z^2 + Z^3 = 2\cos\frac{4\pi}{5}$$

c) Utiliser les résultats des questions 1 et 2 pour trouver une relation entre $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$, puis montrer que $\cos\frac{2\pi}{5}$ est racine de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$; en déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

Exercice 12. Racines n-ièmes de l'unité Soit $n \geq 2$. On considère les solutions z complexes de l'équation

$$(E) \quad z^n - 1 = 0.$$

a) Montrer que toute solution z de (E) est de module 1. En déduire que z est de la forme $e^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta = \frac{k2\pi}{n}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

b) On pose $\omega_k = e^{\mathrm{i}\frac{k2\pi}{n}}$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que ω_k ne prend au plus que n valeurs lorsque k parcourt $\mathbb{Z}$.

c) Montrer que ω_k ne prend exactement que n valeurs distinctes. En déduire le

Théorème 1 *Les racines n-ièmes de l'unité sont au nombre de n, elles s'écrivent sous la forme $e^{\mathrm{i}\frac{k2\pi}{n}}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n-1$.*

Exercice 13. Racines n-ièmes d'un nombre complexe. Soit $n \geq 1$ et Z un nombre complexe non nul. On appelle racine n-ième de Z tout nombre complexe z tel que $z^n = Z$. Montrer en utilisant l'exercice précédent le théorème suivant :

Théorème 2 *Tout nombre complexe non nul $Z = |Z|e^{\mathrm{i}\varphi}$ admet n racines n-ièmes qui s'expriment sous la forme trigonométrique :*

$$\sqrt[n]{|Z|}e^{\mathrm{i}\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)},$$

où k est un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n-1$.

Exercice 14. D'autres exercices

a) Linéariser les expressions suivantes (On rappelle que linéariser signifie transformer ces expressions en somme de termes de la forme $a_n \cos nx + b_n \sin nx$.):

$$\begin{aligned}
&\cos^4 x \sin x,\\
&\sin^2 x \cos^3 x,\\
&\cos^4 x \sin^3 x,\\
&3\cos^3 x \sin^3 x - 2\cos^4 x \sin^2 x.
\end{aligned}$$

b) Résoudre les équations

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2}\cos x + \sqrt{3}\sin x - 1 = 0,\\
&2\cos x + 5\sin x + 2 = 0,\\
&\cos x + \sin x = 1,\\
&\sqrt{3}\cos x + \sqrt{13}\sin x = 2.
\end{aligned}$$

TD 1 bis : La formule de Cardan.
Il était une fois dans le Nord ... de l'Italie.

Au commencement, Cardan et les algébristes italiens du XVI^e siècle n'hésitent pas à employer le symbole $\sqrt{-a}$ avec a réel strictement positif.

En étudiant l'équation du troisième degré $x^3 + px = q$, Cardan trouve, lorsque *p est positif*, la *racine réelle* de l'équation sous la forme :

$$\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}$$

Il est facile de voir que ce nombre est réel et qu'il est bien solution de l'équation $x^3 + px = q$. De plus, l'étude des variations de la fonction $x \mapsto x^3 + px - q$ montre que celle-ci ne s'annule qu'une seule fois (lorsque $p > 0$).

Pour l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$ dont 4 est l'unique racine réelle, comme le montre l'étude de la fonction $x \mapsto x^3 - 15x - 4$, la formule de Cardan donne :

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}},$$

ce qui fait apparaître des nombres "impossibles" ou "imaginaires".

C'est Bombelli qui montre l'égalité $4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}}$, en procédant ainsi :

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121} \quad \text{et } (-2 - \sqrt{-1})^3 = -2 + \sqrt{-121},$$

par utilisation de rôles de calcul connues dans $\mathbb{R}$; ce qui conduit à

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} - \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-1} = 4.$$

À l'aide des nombres imaginaires et de la formule de Cardan, il "trouve" la racine réelle de $x^3 - 15x - 4 = 0$.

- Première manière

  Soit l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ o a, b, c, d sont des nombres complexes tels que $a \neq 0$. On pose $z = x + \dfrac{b}{3a}$. Montrer qu'on se ramène ainsi à la résolution d'une équation du type

  $$(E) \quad z^3 + pz + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{C}.$$

  Montrer que (E) admet au moins une racine réelle lorsque p et q sont réels.

  Soit z vérifiant (E), on pose $z = u + v$ avec $3uv + p = 0$. Montrer que u^3 et v^3 sont les racines y_1 et y_2 d'une équation du second degré que l'on formera. Comment faut-il associer les racines cubiques de y_1 et y_2 pour que leur somme soit racine de (E) ? Retrouver les formules de Cardan lorsque p et q sont réels.

- Vers la théorie des groupes ...

  Soient α, β et γ les racines de (E). Montrer que le complexe $z = (\alpha + \mathrm{j}\beta + \mathrm{j}^2\gamma)^3$, où $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ne prend que deux valeurs z_1 et z_2 lorsque l'on permute α, β et γ de toutes les manières possibles.

  Former l'équation du second degré admettant z_1 et z_2 pour racines. En déduire une méthode de résolution de (E). Effectuer les calculs lorsque p et q sont réels.

TD 2 : Axiomes de $\mathbb{N}$, raisonnement par récurrence.

Exercice 1. On veut montrer qu'étant donnée une boite de crayons de couleurs, ils sont tous de la même couleur. Que pensez-vous du raisonnement suivant :

On procède par récurrence sur n le nombre de crayons. Le résultat est vrai pour $n = 1$. On suppose que le résultat est vrai pour n crayons. Soit une boite de $n+1$ crayons notés $c_1, \ldots, c_{n+1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, les n crayons $c_1, \ldots, c_n$ sont tous de la même couleur et les n crayons $c_2, \ldots, c_{n+1}$ sont tous de la même couleur. Donc, les crayons $c_1, \ldots, c_{n+1}$ sont de la même couleur. Ce qui démontre le résultat pour tout n.

Exercice 2. Démontrer, en utilisant une récurrence que

a) $$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

b) $$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

c) $$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Exercice 3. Montrer en utilisant une récurrence que pour tout $a, n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} k\,(k+1)\ldots(k+a) = \frac{n\,(n+1)\ldots(n+a+1)}{a+2}$$

Exercice 4.* En utilisant les exercices 2 et 3, montrer que, pour tout entier n supérieur à 1, il existe P_n, polynôme de degré $n+1$, tel que

$$\forall k \geq 1, \qquad P_n(k) = 1^n + 2^n + \ldots + k^n.$$

On pourra s'inspirer des deux exercices précédents: l'exercice 1 pour initialiser la récurrence avec n=1 ou n=2, puis l'exercice 2 pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$.

Exercice 5. La formule du binôme. Pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, on note

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Montrer en utilisant une récurrence que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^k\, b^{n-k}.$$

Exercice 6. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

a) $2^{2\times 3^n} - 1$ est divisible par 3^{n+1}.

b) $5^{3^n} + 1$ est divisible par 3^{n+1}.

Exercice 7. Soit E un ensemble fini.

a) Montrer que toute injection $E \to E$ est bijective.

b) Montrer que toute surjection $E \to E$ est bijective.

Exercice 8. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$1.1 + 2.2! + 3.3! + 4.4! + \ldots + (n-1).(n-1)! + n.n! = (n+1)! - 1.$$

TD 3 : Groupes.

Exercice 1. Montrer que l'ensemble des nombres rationnels de la forme $\frac{1+2p}{1+2q}$, où p et $q \in n\mathbb{Z}$, est un sous-groupe multiplicatif de $(\mathbb{Q}^*, .)$.

Exercice 2. Étude de lois.

Étudier les ensembles munis d'une loi de composition interne $(E, \star)$ suivants :

a) $E = \mathbb{R}_+$, $\star$ définie par : $\forall (x,y) \in E^2, \quad x \star y = (x + y + |x - y|)/2;$

b) $E = \mathbb{R}$, $\star$ définie par : $\forall (x,y) \in E^2, \quad x \star y = x + y - xy;$

c) $E = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $\star$ définie par : $\forall (x,y) \in E^2, \quad x \star y = x + y - xy;$

d) $E = \mathbb{R}$, $\star$ définie par : $\forall (x,y) \in E^2, \quad x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$

Exercice 3. Centre d'un groupe.

Le centre d'un groupe G est l'ensemble, noté $Z(G)$, des éléments de G qui commutent avec tout élément de G.

Démontrer que $Z(G)$ est un sous-groupe du groupe G.

Exercice 4. Soit $E = \{1, 2, 3\}$.

a) Trouver tous les éléments de S_3.

b) Trouver 2 bijections σ et τ dans S_3 tels que $\sigma \circ \tau \neq \tau \circ \sigma$ et en déduire que S_3 est un groupe non commutatif.

Exercice 5. Montrer que si dans un groupe $(G, .)$, les éléments a et b commutent, alors $\forall p \in \mathbb{Z}$, a^p et b^p commutent.

Exercice 6. Déterminer les tables de tous les groupes 1, 2, 3, 4 ou 5 éléments.

Exercice 7. Soient $(G_1, *)$ et $(G_2, \$)$ deux groupes, et l'ensemble produit $G = G_1 \times G_2$. Tout élément x de G s'écrit donc $x = (x_1, x_2)$, où $x_1 \in G_1$ et $x_2 \in G_2$. Considérons l'application % définie par

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \rightarrow & G \\ (x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)) & \mapsto & x * y = (x_1 * y_1, x_2 \$ y_2). \end{array}$$

a) Montrer que l'ensemble $G = G_1 \times G_2$ muni de la loi % est un groupe.

b) Définir maintenant, pour tout $n \geq 1$, une loi de composition interne sur $\mathbb{R}^n$ qui prolonge l'addition classique sur $\mathbb{R}$.

(on peut faire de même sur $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{C}^n$, ...)

Exercice 8. Considérons l'ensemble des nombres relatifs $\mathbb{Z}$ munis de la loi $*$ définie par

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ (x, y) & \mapsto & x * y = x - y. \end{array}$$

a) La loi $*$ est-elle associative? commutative?

b) Montrer qu'il existe un élément e *neutre à droite*, c'est-à-dire que e vérifie

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad a * e = a \quad \text{(et pas } e * a = a\text{)}.$$

c) e est-il élément neutre dans $(\mathbb{Z}, *)$?

Exercice 9. Soit $(G, \cdot)$ un groupe, et f l'application $f : G \to G,\ x \mapsto x^{-1}$.

a) Démontrer que f est une application bijective.

b) Démontrer que f est un isomorphisme du groupe G si et seulement si le groupe G est abélien.

c) On suppose que, pour tout x de G, $x^2 = e$. Démontrer que G est abélien.

Exercice 10. Soient $(A, .)$ et $(B, *)$ deux groupes et f un morphisme de $(A, .)$ dans $(B, *)$. Montrer (ou re-démontrer) que

a) $f(e_A) = e_B$

b) $\forall x \in A,\ f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

Exercice 11. Image directe ou réciproque d'un sous-groupe. Soit f un morphisme du groupe G vers le groupe H.

a) Démontrer que l'image directe par f de tout sous-groupe de G est un sous-groupe de H.

b) Démontrer que l'image réciproque par f de tout sous-groupe de H est un sous-groupe de G.

c) Que peut-on en déduire concernant l'image et le noyau d'un morphisme de groupes ?

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ l'application qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe e^{ix}.

a) Montrer que f est un morphisme de groupes pour des groupes qu'on précisera?

b) Trouver le noyau et l'image de f. L'application f est-elle injective?

Exercice 13. * (plus dur mais très important et classique)
Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

a) Montrer l'existence de $\alpha = \inf\{x \in \mathbb{R}_+^* : x \in G\}$.

b) Si $\alpha > 0$, montrer que $\alpha \in G$, puis que $G = \alpha\mathbb{Z}$.

c) * Si $\alpha = 0$, montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14. * Soit $(G, .)$ un groupe et (a, b) deux éléments de G. On suppose que

$$(1)\quad ab^2 = b^3a \quad \text{et} \quad (2)\quad ba^2 = a^3b.$$

a) Montrer en utilisant selement (1) que $a^2b^8a^{-2} = b^{18}$.

b) En déduire, toujours en utilisant (1), que $a^3b^8a^{-3} = b^{27}$.

c) En utilisant (2), montrer alors que $a^3b^8a^{-3} = b^{18}$.

d) Conclure que $a = b = 1$.

TD 4 : Anneaux, Corps

Exercice 1. L'anneau $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$.

Soit E un ensemble. Démontrer que $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif. Est-il intègre ?

Exercice 2. Anneau de Boole.

Soit $(A, +, \cdot)$ un *anneau de Boole* c'est-à-dire un anneau dont tout élément est *idempotent* pour la multiplication, soit $\forall a \in A, \quad a^2 = a$.

a) Démontrer que $\forall (x, y) \in A^2, \quad xy = -yx$.

b) Démontrer que $\forall x \in A, \quad x + x = 0$.

c) Démontrer que tout anneau de Boole est commutatif.

d) Démontrer que $\forall (x, y) \in A^2, \quad xy(x + y) = 0$.

e) Démontrer que si A possède plus de deux éléments alors il n'est pas intègre. Quel est alors l'ensemble de ses diviseurs de zéros ?

f) Montrer que A peut être de cardinal 1 ou 2. Peut-il être de cardinal 3 ?

Exercice 3. Soit E un ensemble non vide. On considère l'ensemble $F(E, \mathbb{R}) = \{f : E \to \mathbb{R}\}$ (ensemble des applications de E dans $\mathbb{R}$).

a) Montrer que $F(E, \mathbb{R})$ muni des lois $+$ et $\cdot$ définies par
$$f + g = x \mapsto f(x) + g(x), \quad \text{et } f \cdot g : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$
est un anneau.

b) Pour $a \in E$ fixé, on pose $M_a = \{f : E \to \mathbb{R}, \quad f(a) = 0\}$. Montrer que M_a est un idéal de $F(E, \mathbb{R})$.

c) Soit I un idéal de $F(E, \mathbb{R})$ contenant M_a. Montrer que si $I \neq F(E, \mathbb{R})$ alors pour toute fonction g de I, on a $g(a) = 0$.

Exercice 4. Éléments nilpotents d'un anneau.

Un élément x d'un anneau $(A, +, \cdot)$ est dit *nilpotent* s'il existe au moins un entier naturel non nul n tel que $x^n = 0$.

a) Démontrer que si x et y sont nilpotents et commutent alors xy et $x + y$ sont nilpotents.

b) Démontrer que l'ensemble des éléments nilpotents d'un anneau commutatif est un idéal de cet anneau.

c) Montrer que si x est nilpotent, alors $1 - x$ est inversible.

d) Un corps admet-il des éléments nilpotents?

Exercice 5. Soit $(A, +, *)$ un anneau commutatif. On notera 0 son élément neutre pour $+$ et 1 son élément neutre pour $*$.

Soit I un idéal de $(A, +, *)$. On appelle *radical de I*, et on note $Rad(I)$, le sous-ensemble de A défini par
$$Rad(I) = \big\{x \in A : \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x^n \in I\big\}.$$

$Rad(I)$ est donc l'ensemble des éléments x de A tels qu'une puissance de x est dans I.

a) Montrer que $I \subset Rad(I)$. En déduire que $0 \in Rad(I)$.

b) Soit $x \in Rad(I)$. Montrer que $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, n' \geq n$, $x^{n'} \in I$.

c) Montrer que si $x \in Rad(I)$ and $x' \in Rad(I)$, alors $-x \in Rad(I)$ et $x + x' \in Rad(I)$.

d) En déduire que $(Rad(I), +)$ forme un sous-groupe de $(A, +)$.

e) Montrer que $Rad(I)$ est un idéal de $(A, +, *)$.

f) Soient I et J deux idéaux de $(A, +, *)$. Montrer que si $I \subset J$, $Rad(I) \subset Rad(J)$.

g) Question Bonus: Montrer que pour tout idéal I de $(A, +, *)$, $Rad(Rad(I)) = Rad(I)$.

h) Y a-t-il un rapport avec l'exercice 4?

Exercice 6. L'ensemble des éléments inversibles d'un anneau est un groupe.
Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau. Soit

$$U(A) = \{x \in A : \ \exists x' \in A \text{ tel que } xx' = x'x = 1_A\},$$

l'ensemble des éléments inversibles pour la loi $\cdot$ de A (encore appelé l'ensemble des unités de A). Montrer que $U(A)$ est stable pour la loi $\cdot$ de A et que muni de la loi induite, $U(A)$ est un groupe.

Exercice 7. Tout anneau intègre fini est un corps.
Démontrer ce théorème.
Indication: *Pour a élément non nul de A, considérer l'application de A vers A, $x \mapsto ax$ et prouver qu'elle est bijective.*

Exercice 8. Définition non ordinaire d'un corps.
Soit $(A, +, \cdot)$ un magma tel que $(A, +)$ soit un groupe abélien et $\cdot$ une loi de composition interne sur A associative, commutative et distributive par rapport l'addition de A.
On suppose en outre qu'il existe un seul élément e de A tel que, pour tout x de A, $e + x \neq ex$.
On se propose de démontrer que $(A, +, \cdot)$ est un corps.
On note 0 l'élément neutre du groupe additif A et on introduit la loi $\star$ définie sur A par $a \star b = a + b - ab$.

a) Prouver que $\star$ est une loi de composition interne sur A, commutative et associative et que A possède un élément neutre pour $\star$.

b) Prouver que $e \neq 0$ et que $\forall x \in A, \quad e \star x = e = x \star e$.

c) Démontrer que $(A, +, \cdot)$ est un corps.

Exercice 9. Déterminer tous les automorphismes du corps $(\mathbb{Q}, +, .)$.

Exercice 10. Soit $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un automorphisme du corps $(\mathbb{R}, +, .)$.

a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\sigma(x) \geq 0$.

b) En déduire que σ est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer σ.

Exercice 11. On définit sur $\mathbb{R}$ deux lois \$ et # par $x\$y = x + y - 1$ et $x\#y = x + y - xy$.

a) Montrer que $(\mathbb{R}, \$, \#)$ forme un corps.

b) Pourquoi ce résultat est-il troublant (si on considère les éléments neutres des deux lois de composition interne)?

TD 5 : Relations d'ordre, relations d'équivalence, ensembles quotients.

Exercice 1. Quelles sont les propriétés vérifiées par la relation "être orthogonales" entre droites du plan?

Exercice 2. Montrer que la relation "être parallles" entre les droites du plan est une relation d'quivalence. Trouver les classes d'quivalence de cette relation.

Exercice 3. Montrer que la relation "être concentriques" entres cercles de $\mathbb{R}^2$ est une relation d'quivalence. Trouver les classes d'quivalence de cette relation.

Exercice 4. Deux éléments x et y d'un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\prec$ sont comparables si l'on a $x \prec y$ ou $y \prec x$.

Quand tous les éléments sont comparables, l'ordre est dit total; sinon on dit qu'il est partiel.

a) Montrer que l'inclusion définit un ordre partiel sur $\mathcal{P}(E)$.

b) Montrer que la relation $\leq$ est un ordre total sur $\mathbb{Z}$.

c) Montrer que, la relation $x \,|\, y$ (si x divise y, $x, y \in \mathbb{N}^\star$) est un ordre partiel sur $\mathbb{N}$.

Exercice 5. Ordre lexicographique. Soient $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On dit que $X \leq Y$ si

$$x_1 < y_1 \qquad \text{ou} \qquad (x_1 = y_1 \quad \text{et} \quad x_2 \leq y_2)$$

a) Montrer que l'on définit ainsi une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. Cet ordre est-il total ?

b) Soit $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer l'ensemble des points $Y \in \mathbb{R}^2$ tels que $X \leq Y$.

Exercice 6.* Ordre lexicographique. Soient $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On dit que $X \leq Y$ si

$$(\exists i \in \{1, \ldots, n\} \, (\forall k < i \, x_k = y_k) \quad \text{et} \quad x_i < y_i) \qquad \text{ou} \qquad X = Y.$$

Montrer que l'on définit ainsi une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^n$. Cet ordre est-il total ?

Exercice 7.* Soit E un ensemble. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$ on note $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$.

a) Montrer que, pour tout $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, on a

$$(B - C \subset A \quad \text{et} \quad C - D \subset A) \quad \Longrightarrow \quad B - D \subset A$$

b) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que la relation $\mathcal{R}_A$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$B \, \mathcal{R}_A \, C \quad \Longleftrightarrow \quad B \triangle C \subset A,$$

est une relation d'équivalence.

c) Pour tout $B \in \mathcal{P}(E)$, préciser la classe de B modulo $\mathcal{R}_A$.

Exercice 8.* Soit $\mathcal{P}$ le sous ensemble de $\mathbb{C}$ défini par

$$z = x + iy \in \mathcal{P} \quad \text{si} \quad x > 0 \quad \text{et} \quad y = x^2$$

a) Dessiner $\mathcal{P}$ ainsi que l'image de $\mathcal{P}$ par l'application $z \longrightarrow i\,z$.

b) Soit C_R le cercle de centre 0 et de rayon R. Combien de points appartiennent à $C_R \cap \mathcal{P}$?

c) On définit sur $\mathbb{C}^\star = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ la relation $\mathcal{R}$ par : $z\mathcal{R}z'$ s'il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z\,e^{i\theta} \in \mathcal{P}$ et $z'\,e^{i\theta} \in \mathcal{P}$. Quelles sont les propriétés de $\mathcal{R}$?

Exercice 9. Le but de cet exercice est de démontrer le **théorème de Lagrange:** Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini et soit $(H, \cdot)$ un sous-groupe de G. Alors $card(H)|card(G)$: Le cardinal de H divise le cardinal de G. Nous rappelons que le cardinal $card(E)$ d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments de E.

a) Soit R une relation définie sur $G \times G$ par

$$xRy \text{ si et seulement si } x \cdot y^{-1} \in H.$$

Montrer que R est une relation d'équivalence.

b) Soit $x \in G$. Montrer que la classe d'équivalence de x selon R est en fait Hx (on rappelle que Hx désigne $Hx := \{h \cdot x : h \in H\}$.) En déduire que toute classe d'équivalence $\mathcal{C}$ de G par R est de la forme $\mathcal{C} = Hx$, pour un $x \in G$.

c) Soit $x \in G$ fixé, soit $\varphi(y) := y \cdot x^{-1}$. Montrer que $\varphi : Hx \to H$ est une bijection. En déduire que pour tout $x \in G$, $card(Hx) = card(H)$.

d) En utilisant que G est la réunion des classes d'équivalence, montrer le théorème de Lagrange.

TD 6 : Relations d'équivalence dans $\mathbb{Z}$, congruences.

Exercice 1. On considère le nombre

$$N = 28^{361} + 17^{1024} + 15^{321}.$$

Est ce que N est un multiple de 3 ? un multiple de 5 ? un multiple de 7 ?

Exercice 2. On considère le nombre

$$N = 25^{456} + 27^{564} + 29^{645}$$

Est ce que N est un multiple de 3 ? un multiple de 5 ? un multiple de 7 ?

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation

$$x^2 + x + 1 \equiv 0 \quad [7]$$

Exercice 4. Écrire les tables d'addition et de multiplication dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Exercice 5.

1. Par quel chifffre se termine $17^{17^{17}}$?
2. Quels sont les deux derniers chiffres de $19^{19^{19}}$?

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les systèmes

$$a) \quad \begin{cases} 2x + 3y \equiv 1 & [5] \\ x - 2y \equiv 3 & [5] \end{cases}$$

$$b) \quad \begin{cases} x + 2y \equiv 2 & [6] \\ 2x - 2y \equiv -2 & [6] \end{cases}$$

$$c) \quad \begin{cases} x + y \equiv 1 & [5] \\ 2x - y \equiv 3 & [10] \end{cases}$$

$$d) \quad \begin{cases} 3x - 2y = 3 & [6] \\ 2x - y = 4 & [3] \end{cases}$$

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations

$$a) \quad x^4 - 2x^2 + 1 \equiv 0 \quad [16]$$

$$b) \quad x^3 - 1 = 0 \quad [21]$$

$$c) \quad x^2 - 1 = 0 \quad [35]$$

Exercice 8. Montrer que dans $\mathbb{N}$, tout cube est congru à -1, 0, ou 1 modulo 9.

TD 7 : Bases et décomposition en facteurs premiers.

Exercice 1. Quels entiers s'écrivent ab en base 10 et $ab0$ en base 3 ?

Exercice 2. Soit p un entier ≥ 2. On rappelle que tout réel $x \in [0,1[$ s'écrit comme limite d'une unique suite

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k p^{-k}$$

avec $a_k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, les entiers a_k n'étant pas toujours égaux à $p-1$ à partir d'un certain rang.

La suite a_k est dite "périodique à partir d'un certain rang" si

$$\exists l, m \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq l \qquad a_{m+k} = a_k$$

Montrer que si a_k est périodique à partir d'un certain rang, alors x est rationnel.

Exercice 3. Soit $n = a_1 a_2 a_3 ... a_p$ un nombre entier écrit en base 10.

Montrer que la somme des chiffres de n modulo 9 est égale à n modulo 9.

Exercice 4.* Démontrer qu'il n'existe pas de bijection de $[0,1]$ sur $\mathbb{N}$.

(Par l'absurde: On supposera qu'il existe une bijection ϕ de $[0,1]$ sur $\mathbb{N}$. On considèrera alors la suite $\phi(0), \phi(1), \ldots$ et l'on construira un réel de $[0,1]$ dont toutes les décimales diffèrent de celles des éléments de cette suite).

Exercice 5.

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $n-4$ divise $3n+24$.

2.* Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. Supposons que $73 | (100.a + b)$. Montrer que $73 | (a^2 + b^2)$.

Exercice 6. Soient a et b dans $\mathbb{N}^\star$. Montrer que

$$\alpha = \min\{n \in \mathbb{N}^\star \,:\, b \quad \text{divise} \quad an\} \qquad \text{divise} \quad b.$$

Indication : décomposer a et b en facteurs premiers.

Exercice 7. Chercher l'exposant de 3 dans la décomposition en facteurs premiers de 100!.

Exercice 8. Par combien de zéros se termine le nombre 2007!?

(commencer par se demander pourquoi 2007! se termine par des zéros, puis essayer de comprendre comment dénombrer ces zéros)

Exercice 9.* Soit p un nombre premier et n un entier. Trouver une formule pour l'exposant de p dans $n!$.

(On pourra utiliser l'entier k défini comme étant l'unique entier vérifiant $p^k \leq n < p^{k+1}$.)

Exercice 10. On veut montrer que, si $2^n + 1$ est premier, alors $n = 2^k$.

a) On suppose que $2^n + 1$ est premier et que $n > 1$. Montrer que nécessairement n est pair.

b) On suppose que $2^n + 1$ est premier et que $n > 2$. Montrer que nécessairement n est un multiple de 4.

c)* On suppose que $2^n + 1$ est premier et que $n > 2^{k-1}$. Montrer que $n = 2^k$.

Exercice 11. * On appelle "ensemble triadique de Cantor", l'ensemble K des points de $[0, 1]$ qui sécrivent en base 3 uniquement avec des 0 et des 2.

a) Montrer que le complémentaire de K est un ouvert de $\mathbb{R}$.

b) Montrer que le complémentaire de K est dense dans $[0, 1]$. C'est à dire que

$$\forall x \in [0,1] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \notin K \qquad |x - y| \leq \varepsilon$$

TD 8 : PGCD et PPCM.

Si x et y sont deux entiers, on note $x \wedge y$ le pgcd de x et de y et $x \vee b$ le ppcm de x et de y.

Exercice 1. Montrer que si $a, b \in \mathbb{N}^\star$, $a\,b = (a \vee b) \cdot (a \wedge b)$.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes

$$a) \qquad \begin{cases} a + b = 255 \\ a \wedge b = 17 \end{cases}$$

$$b) \qquad \begin{cases} a\,b & = & 12950 \\ a \vee b & = & 2590 \end{cases}$$

Exercice 3. Montrer que

$$a \wedge b = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (a - b) \wedge (ab) = 1$$

Exercice 4.* Calculer $(a + b) \wedge (a \cdot b)$ en fonction de $a \wedge b$.

Exercice 5. Calculer $n \vee (n + 1) \vee (n + 2)$.

Exercice 6. Montrer que

$$\begin{aligned} a \wedge (\vee_{i=1}^n b_i) &= \vee_{i=1}^n (a \wedge b_i) \\ a \vee (\wedge_{i=1}^n b_i) &= \wedge_{i=1}^n (a \vee b_i) \end{aligned}$$

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 7344 \\ x \wedge y & = & 12 \end{cases}$$

Exercice 8. Déterminer une solution du système dans $\mathbb{N}^2$

$$\begin{cases} x \wedge y & = & 14 \\ x^4 - y^4 & = & 576240 \end{cases}$$

Exercice 9. Déterminer une solution du système dans $\mathbb{Z}^2$

$$\begin{cases} x \wedge y & = & 21 \\ x^2 + x\,y + y^2 & = & 5733 \end{cases}$$

TD 9: Polynômes

Exercice 1. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tels que

$$P(X+1) - P(X-1) = X^2 + 1.$$

Exercice 2. Effectuer la division de $A \in \mathbb{C}[X]$ par $B \in \mathbb{C}[X]$ dans les cas suivants :

1. $A = X^4 - 1, \quad B = X + 2,$
2. $A = X^4 + iX^3 - iX^2 + X + 1, \quad B = X^2 - iX + 1,$
3. $A = X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 2, \quad B = X^2 + (1-i)X + 1 + i.$

Exercice 3. Sans effectuer la division, déterminer le reste de la division de

$$A(X) = (\cos a + X \sin a)^n \quad \text{par} \quad B(X) = X^2 + 1.$$

Exercice 4. Déterminer le pgcd D de $A = X^3 + X^2 + X + 1$ et $B = X^4 + X^3 + X + 1$, et trouver deux polynômes U et V tels que $AU + BV = D$.
Calculer le ppcm de A et B.

Exercice 5. Trouver tous les polynômes de degré ≤ 3 tels que

$$P(0) = 1, \ P(1) = 2, \ P(2) = -1, \ P(3) = -2.$$

Exercice 6. Les restes des divisions euclidiennes d'un polynôme A par $X - a$ et par $X - b$ sont α et β, respectivement. Quel est le reste de la division de A par $(X-a)(X-b)$? (on suppose que $a \neq b$).

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer que P est divisible par $(X-a)^2$ si et seulement si $P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$.

Exercice 8. Soit P un polynôme non constant et $m \geq 1$. On suppose que a est racine de P de multiplicité exactement m.

Montrer que a est racine de P' de multiplicité exactement $m - 1$.

Exercice 9. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, et $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à zéros tous simples. Montrer que tous les zéros de $P^2 + \alpha^2$ dans $\mathbb{C}$ sont simples.

Exercice 10. Montrer que si $n \geq 2$ le polynôme

$$P(X) = (1 - X^n)(1 + X) - 2nX^n(1 - X) - n^2X^n(1 - X)^2$$

est divisible par $(1 - X)^3$.

Exercice 11. Déterminer a et b pour que

$$P(X) = aX^{n+1} + bX^n + 1$$

admette la racine double $x = 1$. Quel est alors le quotient de $P(X)$ par $(X-1)^2$?

Exercice 12. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$P = X^5 + 8X^4 + 26X^3 + 44X^2 + 40X + 16$$

après avoir vérifié qu'il admet -2 pour racine.

Exercice 13. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme

$$P(X) = X^4 - 2X^2 \cos\phi + 1$$

où ϕ est un réel donné.

Exercice 14. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $A = X^6 + 1$.

Exercice 15. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ n'ayant pas de racine réelle. On suppose que $P(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe A et B dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.