Université Paris XII Val de Marne
Topologie, Fonctions de Plusieurs Variables

Licence 2
Année 2006-2007
R. Hadiji, S. Seuret

TD 1: Normes dans les espaces vectoriels normés.

Exercice 1
Montrer que chacune des applications suivantes est une norme sur l'espace vectoriel E associé :

1. $E = \mathbb{R}^2$ et $N : (x_1, x_2) \mapsto \sup(\mid x_1 \mid, \mid x_2 \mid)$

2. $E = \mathbb{R}^2$ et $N : (x_1, x_2) \mapsto (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}}$

3. $E = \mathbb{R}^2$ $a > 0$, $b > 0$ et $N_{a,b} : (x_1, x_2) \mapsto (a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2)^{\frac{1}{2}}$

4. $E = M_n(\mathbb{R})$ et $N : (m_{i,j})_{(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)} \mapsto \sup\limits_{1 \leq i \leq n} \left(\sum\limits_{1 \leq j \leq n} \mid m_{i,j} \mid \right)$

5. $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et $N : f \mapsto \int\limits_0^1 \mid f(t) \mid dt$

6. $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et $N : f \mapsto \sup\limits_{t \in [0,1]} \mid f(t) \mid$

7. $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et $N : f \mapsto \left(\int\limits_0^1 \mid f(t) \mid^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$

Exercice 2
On s'intéresse à l'espace $\mathbb{R}^n$, pour $n \geq 1$.

1. Montrer que $\| \,.\, \|_1$: $(x_1, x_2, .., x_n) \mapsto \sum\limits_{i=1}^{i=n} \mid x_i \mid$, $\| \,.\, \|_2$: $(x_1, x_2, .., x_n) \mapsto \left(\sum\limits_{i=1}^{i=n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$,
   $\| \,.\, \|_\infty$: $(x_1, x_2, .., x_n) \mapsto \sup\limits_{1 \leq i \leq n} \mid x_i \mid$,
   sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

2. Cas $n = 2$:
   Représenter graphiquement dans le plan euclidien muni d'un repère (O, i, j) les boules fermées de centre O et de rayon 1 pour les normes $\| \,.\, \|_1$, $\| \,.\, \|_2$, $\| \,.\, \|_\infty$.

3. Cas n quelconque:
   Montrer que les normes $\| \,.\, \|_1$, $\| \,.\, \|_2$, $\| \,.\, \|_\infty$ sont équivalentes deux à deux.

Exercice 3
Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ et $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... + a_p X^p$ un élément de E.
On considère

$$\begin{aligned} \| P \|_\infty &= \sup_{0 \leq k \leq p} | a_k | \\ \| P \|_1 &= \sum_{k=0}^{k=p} | a_k | \\ \| P \|_2 &= \sqrt{\sum_{k=0}^{k=p} | a_k |^2} \end{aligned}$$

1. Montrer que $\| . \|_\infty$, $\| . \|_1$, $\| . \|_2$ sont des normes sur E.

2. Établir des inégalités de comparaison entre $\| . \|_\infty$, $\| . \|_1$, $\| . \|_2$.

3. On considère la suite de polynômes dans $\mathbb{R}[X]$,donnée par:

$$p_n = 1 + X + \frac{1}{n} X^2 + ... + \frac{1}{n} X^{n+2}$$

   Étudier la limite de $\| p_n - (1 + X) \|_1$ et $\| p_n - (1 + X) \|_\infty$. Montrer que p_n tend vers $1 + X$ au sens de la norme ∞ mais pas au sens de la norme 1.

4. Montrer que les normes $\| . \|_\infty$, $\| . \|_1$, $\| . \|_2$ ne sont pas équivalentes deux à deux.

Exercice 4
$E = \mathbb{R}^2$. On considère les applications $N_2(x, y) = \sup_{t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} | x \cdot \cos(t) + y \cdot \sin(t) |$
et $N_\infty(x, y) = \sup_{t \in [0,1]} | xt + (1 - t)y |$

1. Montrer que N_2 et N_∞ sont deux normes.

2. Identifier N_2 et N_∞ comme deux normes usuelles sur $\mathbb{R}^2$.

R. Hadiji, S. Seuret

TD 2: Topologie dans $\mathbb{R}^n$: Ouverts, Fermés

Exercice 1
Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que pour toute partie A, B de E on a:

1. $\overline{A} = A \Leftrightarrow A$ fermé.
2. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
3. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
5. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Trouver un cas où l'inclusion est stricte.

Exercice 2
Trouver un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$ tel que A, $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$, $\overline{\overset{\circ}{A}}$, $\overset{\circ}{\overline{A}}$ soient tous distincts.

Exercice 3
Indiquer si les ensembles suivants D sont, pour les normes usuelles, ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés:

1. Dans $\mathbb{R}^2$ avec D_1 et D_2 deux ouverts de $\mathbb{R}$ donnés: $D = \{(x, y) \in D_1 \times D_2\}$
2. Dans $\mathbb{R}^3$: $D = \{(x, y, z)/x^2 + y^2 < z\}$
3. Dans $\mathbb{R}$ avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite convergente vers l: $D = \{l\} \cup \{u_n, n \in \mathbb{N}^*\}$
4. Dans $\mathbb{R}^2$: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in \mathbb{Q} \bigcap [0, 1], y \in \mathbb{Q} \bigcap [0, 1]\}$.

Exercice 4

1. On considère, pour n un entier non nul, $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$, $B_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, $C_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$, $D_n =]\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{10n}[$.

   Que dire des ensembles $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$, $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty} C_n$ et $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty} D_n$?
2. Soit B_n la boule fermée de $\mathbb{R}^2$ de centre $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ et de rayon $R_n = \frac{r}{n}$. On note $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Quel sont les valeurs de r pour lesquelles A est fermé?

Exercice 5

1. Indiquer si $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy = 1\}$ et $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x < 1, xy = 1\}$ et sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés.

2. Supposons que A et B sont deux ouverts d'un espace vectoriel normé E. Qu'en est-il de $C = \{c \in E : \ \exists (a, b) \in A \times B : c = a + b\}$?

Exercice 6

Montrer qu'un espace vectoriel normé n'admet qu'un seul sous-espace vectoriel ouvert.

Exercice 7

Reprendre les ensembles de l'exercice 1 et déterminer leur intérieur, leur adhérence,leur frontière.

Exercice 8

Soit (E, d) un espace métrique complet. Une application $f : E \to E$ est dite contractante s'il existe une constante $k \in (0, 1)$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

1. Montrer que f possède un unique point fixe noté y.

2. Soit a un point de E, on construit la suite (x_n) par récurrence de la facon suivante: $x_0 = a$ et $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que si f est contractante, la suite (x_n) converge et que sa limite est y.

3. Dans le cas où f est une fonction dérivable sur un intervalle I de R avec $|f'(x)| \leq K < 1$, montrer qu'elle est contractante sur I.

   Etudier par exemple $u_{n+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos(u_n)$.

Exercice 9 (plus dur)

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application injective et on définit l'application $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ par $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$.

1. Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{R}$.

2. Dans le cas où $f(x) = \arctan(x)$, montrer qu'il existe une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d)$ qui est divergente dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle.

Exercice 10 (plus dur) (Théorème des segments emboités)
Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments emboités non vides de $[0,1]$, c'est-à-dire que $\forall n \geq 0$, $S_{n+1} \subset S_n$ et $S_n \neq \emptyset$.

Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_n$ est non-vide.

Exercice 11
Montrer que le graphe $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y = f(x)\}$ d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est fermé.

Exercice 12 (plus dur) (Théorème de Bolzano-Weierstrass)
Montrer que toute partie infinie bornée de $\mathbb{R}$ admet un point d'accumulation.

(rappeler la définition d'un point d'accumulation)

Exercice 13 (Théorème de Baire)
L'intersection d'une suite d'ouverts denses de $[0,1]$ est encore dense dans $[0,1]$.

Exercice 14
Dans $\mathbb{R}$, la réunion d'une suite de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Exercice 15 (plus dur)
Pour tout ensemble $A \subset \mathbb{R}$, on note A' l'ensemble de ses points d'accumulation.

1. Montrer que A' est un fermé.
2. Trouver un ensemble A tel que $A' = \{0\}$.
3. Trouver un ensemble A tel que $A'^{(n)} = \{0\}$.

Licence 2
Année 2006-2007
R. Hadiji, S. Seuret

TD 3: Compacité, Connexité et Continuité.

Exercice 1
Indiquer si les ensembles qui suivent sont compacts ou non:

1. Dans $\mathbb{R}$: $X_1 = \{n : \ n \geq 1\}$.
2. Dans $\mathbb{R}$: $X_2 = \{(-1)^n : \ n \geq 1\}$, $\quad X_3 = \left\{\frac{(-1)^n}{n}, n \geq 1\right\}$.
3. Dans $\mathbb{R}^d$: $X_4 = \bigcap\limits_{n\geq 1} B(0, 1 + \frac{1}{n})$
4. Dans $\mathbb{R}^2$: $X_5 =]0,1[\times[3,4]$
5. Dans $\mathbb{R}^2$: $X_6 = ([0,1] \times [0,1]) \bigcup \overline{B}((2,2), \frac{1}{2})$
6. Dans $\mathbb{R}^2$: $X_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x^2 + 6y^2 < 6\}$
7. Dans $\mathbb{R}^2$: $X_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 3\}$ (examen septembre 2000)

Exercice 2
Soient A et B deux sous-ensembles d'un espace vectoriel normé E.

1. On suppose que A et B sont compacts.
   Montrer que $A + B = \{c \in E : \ \exists (a, b) \in A \times B : c = a + b\}$ est un ensemble compact.
2. On suppose que A est fermé et B est compact.
   Montrer que $A + B$ est fermé.

Exercice 3
Soit f une application d'un e.v.n E dans un e.v.n F.

1. Montrer que f est continue ssi $\forall A \subset E : f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.
2. Montrer que si f est continue et si D est une partie dense de E, alors $f(D)$ est dense dans $f(E)$.

Exercice 4 Vrai ou faux :
$f : (x, y) \mapsto f(x, y)$. Pour étudier la limite de $f(x, y)$ quand (x, y) tend vers (a, b), je fixe x et je fais tendre y vers b puis j'étudie la limite quand x tend vers a avec y fixé.

Exercice 5
Trouver une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que
- $f(0, 0) = 0$,
- quelle que soit la droite D passant par $(0, 0)$, $f_{|D}$ est continue en 0,
- f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 6 Vrai ou faux :

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
   La continuité de f en $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dépend de la norme choisie pour la démontrer.

2. Même question pour $f : E \to \mathbb{R}$ en $x_0 \in E$ où E un espace vectoriel de dimension infinie.

Exercice 7 (plus dur)
Soit F une partie compacte d'un espace vectoriel E muni d'une norme N. On considère $f : F \to F$ telle que:

$$\forall (x, y) \in F^2 \text{ avec } x \neq y : N(f(x) - f(y)) < N(x - y)$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in F$ tel que $f(x_0) = x_0$.

(Indication: on pourra étudier l'application $g : x \mapsto N(f(x) - x)$ et considérer $\inf_{x \in F}(g(x))$.)

Exercice 8
Soit $E = C([0; 2\pi], \mathbb{C})$ espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$ muni de la norme $\| f \| = \sup\limits_{t \in [0, 2\pi]} |f(t)|$.

Montrer, en utilisant la suite $f_n(x) = \exp(inx)$, que la boule fermée de rayon 1 de E n'est pas compacte. Que peut-on en conclure ?

Exercice 9
Soit E un ensemble de $\mathbb{R}^n$, pour $n \geq 1$.
Montrer que (E est connexe) ssi ($\forall f : E \to \{0, 1\}$ continue, f est constante).

Exercice 10
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Notons $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < y\}$.

1. Montrer que A est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.

2. Pour $(x, y) \in A$, posons $g(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Montrer que $g(A) \subset f'(\mathbb{R}) \subset \overline{g(A)}$.

3. Montrer que $f'(\mathbb{R})$ est un intervalle.

Université Paris XII Val de Marne
Topologie, Fonctions de Plusieurs Variables

Licence 2
Année 2006-2007
R. Hadiji, S. Seuret

TD 4: Continuité dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $h(x,y) = f(x) + g(y)$. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que si f est continue en a et si g est continue en b, alors h est continue en (a,b).
2. On suppose que h est continue en (a,b). L'application f est-elle continue en a ? L'application g est-elle continue en b ?

Exercice 2
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que:

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^4 y}{x^4 + y^6} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) = 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3
Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{|y|}{x^2} \exp(-\dfrac{\sqrt{|y|}}{x^2}) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) = 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Soit t un réel, et g_t la restriction de f à l'ensemble des couples (x,y) tel que $y = tx$. Calculer la limite de g_t au point $(0,0)$.
2. Soit t un réel, et h la restriction de f à l'ensemble des couples (x,y) tel que $y = x^2$. Calculer la limite de h au point $(0,0)$.
3. Conclure.

Exercice 4
Étudier la continuité des applications suivantes:

1. Soit p un entier, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec:

$$\begin{cases} f(x,y) = (x+y)^p \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) = 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec:

$$\left\{\begin{array}{lclcl} f(x,y) & = & \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4} & \text{si} & (x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) & = & 0 & \text{si} & (x,y) = (0,0) \end{array}\right.$$

Exercice 5

1. Peut-on prolonger par continuité l'applications f définie sur l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xy > 0$ par

$$f(x,y) = \frac{(1-\cos(xy))^{\frac{1}{2}}}{y}.$$

2. (plus dur) Peut-on prolonger par continuité au point $(\frac{\pi}{2}, 0)$ l'application f définie par

$$f(x,y) = \frac{\cos^3(x)}{\cos^2(x) + y^2\sin^2(x)}.$$

Exercice 6
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec:

$$\left\{\begin{array}{lclcl} f(x,y) & = & (x^2+y^2)\exp(-\dfrac{y^2}{x^2}) & \text{si} & x \neq 0 \\ f(x,y) & = 0 & & \text{si} & x = 0 \end{array}\right.$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. On pose $A = \{(x,y) \in R^2, f(x,y) \leq 1\}$. Montrer que A est fermé.
3. (A faire plus tard) Montrer que A n'est pas compact.
4. Que peut-on dire de f sur l'ensemble $D = \{(x,y) \in R^2, x^2+y^2 \leq 1\}$.
   Admet-elle un maximum? un minimum? (On ne calculera pas les dérivées partielles de f.

Exercice 7 (plus dur)
Déterminer l'ensemble de continuité de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que:

$$\left\{\begin{array}{lclcl} f(x,y) & = & x^4 & \text{si} & y > x^2 \\ f(x,y) & = & y^2 & \text{si} & y \leq x^2 \end{array}\right.$$

Université Paris XII Val de Marne | Licence 2
Topologie, Fonctions de Plusieurs Variables | Année 2006-2007
R. Hadiji, S. Seuret

TD 5: Fonctions de classe C^1 et dérivées partielles.

Exercice 1

Pour chaque fonction qui va suivre, calculer aux points où elles existent les dérivées partielles et indiquer le domaine où la fonction est continue, de classe C^1.

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec:

$$\begin{cases} f_1(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f_1(x,y) = 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. (plus dur) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ f_2(x,y) = x^2 \mid y \mid$$

3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ avec:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ f_3(x,y) = \mid x - y \mid$$

4. $f_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec:

$$\begin{cases} f_4(x,y) = \left((x^2+y^2) \sin \dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}, \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)} \right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ f_4(x,y) = (0,0) & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par:

$$\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3, \ g(t,x,y) = f(tx,ty)$$

Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$ et calculer $\dfrac{\partial g}{\partial t}(t,x,y)$, $\dfrac{\partial g}{\partial t}(7,2,3)$, $\dfrac{\partial g}{\partial t}(0,4,1)$.

Exercice 3

Soit $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $r(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$.

Calculer pour tout $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2}$.

Exercice 4

Posons $f(x,y) = 0$ si $(x,y) = (0,0)$ et $f(x,y) = \frac{xy^3}{(x^2+y^2)}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Exercice 5
Soit $C \subset \mathbb{R}^2$. On dit que C est *un cône positif* si

$$\forall (x,y) \in C, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^\star : \lambda.(x,y) = (\lambda x, \lambda y) \in C.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et C un cône positif ouvert.
On dit qu'une fonction $f : C \to \mathbb{R}$ est *homogène de degré* α si

$$\forall \lambda > 0, \forall (x,y) \in C : f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x,y)$$

1. Soit C un cône positif ouvert et $f : C \to \mathbb{R}$ de classe C^1.
   Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si
$$\forall (x,y) : x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \alpha f(x,y).$$
2. Calculer $\left[x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}\right](x^2+y^2)^\alpha$.

Exercice 6

1. Soit $F(x,y) = f(x+ay) + g(x-ay)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et f,g de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

   Déterminer $a^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.
2. Soit $F(x,t) = \dfrac{e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{t}}}{\sqrt{t}}$. Comparer $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$.

Exercice 7 (plus dur)
On se propose de résoudre mathématiquement l'équation aux dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ (E_1)

1. Donner des exemples de fonctions qui sont solutions de classe C^1 de E_1.
2. On considère maintenant une solution f de classe C^1 de E_1 et on fixe $y \in \mathbb{R}$. On définit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g : x \mapsto g(x) = f(x,y)$.

   Montrer que g est dérivable et calculer sa dérivée.
3. A l'aide de la fonction g et de sa dérivée démontrer que $f(x,y) = f(0,y)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

   En déduire que toute solution de E_1 est de la forme $f(x,y) = h(y)$ où h est une fonction de classe C^1.
4. Résoudre de même les équations $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

Exercice 8
La fonction f définie sur $\mathbb{R}^4$ par $f(x,y,z,t) = \frac{x^3+y^3-z^3-t^3}{x^2+y^2-z^2-t^2}$ a-elle une limite en $(0,0,0,0)$?

Université Paris XII Val de Marne
Topologie, Fonctions de Plusieurs Variables

Licence 2
Année 2006-2007
R. Hadiji, S. Seuret

TD 6: Différentiabilité

Exercice 1
Soit $a \in R^3$, on définit pour $x \in R^3$, $x \neq 0$, $f(x) = \frac{x-a}{||x-a||}$. Montrer que f est de classe C^1 et calculer sa différentielle Df. Même question pour $g(x) = \ln || x - a ||$.

Exercice 2
Soit p un entier. On considère

$$\begin{cases} f(x,y) & = & \dfrac{[\sin(x+y)]^p}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} & (x,y) \neq (0,0) \\ f(x,y) & = & 0 & \text{si} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Discuter selon les valeurs de p la continuité et différentiabilité de f.
b) Pour quelles valeurs de p la fonction f est elle de classe C^1.

Exercice 3
Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ (c'est à dire tel que $\forall (x,y) \in \Omega^2, \forall t \in [0,1], tx+(1-t)y \in \Omega$). Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (a,b) \in \Omega^2, |f(b) - f(a)| \leq \| a - b \|^2 .$$

Montrer que f est différentiable sur Ω et calculer sa différentielle Df. En déduire que f est constante sur Ω.

Exercice 4

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application différentiable en 0 telle que:

   $$\forall x \in \mathbb{R}^n, (x \neq 0), \forall t \in \mathbb{R}_+^* : f(tx) = tf(x)$$

   Montrer que f est linéaire.

2. Soient $(E, \| \, . \, \|_E), (F, \| \, . \, \|_F), (G, \| \, . \, \|_G)$ des e.v.n et $\phi : E \times F \to G$ une application bilinéaire.
   On suppose que ϕ est continue, c'est à dire il existe $C > 0$ telle que: $\| \phi(x,y) \|_G \leq C \| x \|_E \, . \, \| y \|_F$ pour $(x,y) \in E \times F$.
   Montrer que ϕ est différentiable sur $E \times F$ et calculer sa différentielle Dϕ (on prendra par exemple sur $E \times F$ comme norme $\| \, . \, \|_\infty$: $(x,y) \mapsto \sup(\| x \|_E, \| y \|_F)$.

3. Application: Soit E un espace euclidien. Montrer la différentiabilité et calculer la différentielle DΦ de l'application produit scalaire: $\Phi : E^2 \to \mathbb{R}$ telle que $(x,y) \mapsto x.y$

4. Calculer la différentielle de la norme euclidienne issue de Φ.

TD 7: Points critiques et extrémas.

Exercice 1

1. Déterminer les extrema locaux de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f_1(x,y) = (x+y)^3 - y^2 - 3(x+y)$.

2. Déterminer les extrema locaux de la fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f_2(x,y) = xy^2(1-x-2y)$.

Exercice 2
Soit $D = [-1,1] \times [-3,1] \subset \mathbb{R}^2$ et $f:\ D \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall\ (x,y) \in D, \quad f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) + 3.$$

Déterminer les extrema locaux et globaux de f dans ce domaine D.

Exercice 3
Étudier les extrémas de f sur son ensemble de définition D et expliciter leurs types.

1. $(x,y) \to f_1(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$, avec $D_1 = \mathbb{R}^2$,

2. (plus dur) $(x,y) \to f_2(x,y) = kx^\alpha.y^\beta + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $k > 0$ et $D_2 = (\mathbb{R}_+^*)^2$.

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que: $\lim\limits_{\|(x,y)\| \to \infty} f(x,y) = 0$ et que $f(x_0,y_0) > 0$ en un point (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $K = \{(x,y) : f(x,y) \geq f(x_0,y_0)\}$. Montrer que K est compact. En déduire que la fonction f atteint son supremum sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $f(x,y) = (x^2-y^2)\exp(-(x^2+y^2))$. Déterminer les points où $\mathrm{D}f = 0$. Chercher les extrémas. Sont-ils globaux ?

Exercice 5 (plus dur)
Soit f une application définie sur $[0,1]^2$ par $f(x,y) = \frac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy}$ si $(x,y) \neq (1,1)$ et $f(1,1) = 0$. Montrer que f est continue sur $[0,1]^2$ et déterminer $\sup_{(x,y)\in[0,1]^2} f(x,y)$.

Université Paris XII Val de Marne — Licence 2
Topologie, Fonctions de Plusieurs Variables — Année 2006-2007
R. Hadiji, S. Seuret

TD 8: Intégrales de Riemann dépendant d'un paramètre

Exercice 0

1. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses:

1) $\displaystyle\int_a^b f(t)dt < +\infty \Rightarrow \int_a^b |f(t)|dt < +\infty$ 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt < +\infty \Rightarrow \int_0^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty$

3) $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt < +\infty \Rightarrow \int_a^b f(t)dt < +\infty$ 4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)dt < +\infty$

5) $\displaystyle f \geq 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt < +\infty \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$

2. Considérer la fonction $f : t \in \mathbb{R} \to f(t) = te^{ie^t} \in \mathbb{C}$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)dt < +\infty$ et pourtant $\lim_{t\to+\infty} |f(t)| = +\infty$.

Exercice 1

Calculer pour p et q deux entiers positifs les intégrales

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt \quad \text{et} \quad J_{p,q} = \int_0^1 t^p(\ln t)^q dt.$$

Exercice 2

Calculer pour tout $n \geq 0$ les intégrales

$$U_n = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx \quad \text{et} \quad V_n = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx.$$

Exercice 3 (plus dur)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et quatre réels strictement positifs (a, b, α, β).

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b \frac{f(\beta x) - f(\alpha x)}{x} dx = \int_\alpha^\beta \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx.$
2. En déduire que si f admet une limite l lorsque x tend vers $+\infty$, alors l'intégrale $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx$ existe et calculer sa valeur.

Exercice 4
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction ($\mathbb{R}$ peut être remplacé par n'importe quel espace métrique). Soit $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(\lambda) = \int_a^b f(t)e^{i\lambda t}dt.$$

1. Supposons que $f \in C^1([a,b])$. Montrer que $\lim_{\lambda\to+\infty} F(\lambda) = 0$.
2. Supposons que f soit une fonction en escalier sur $[a,b]$. Montrer que $\lim_{\lambda\to+\infty} F(\lambda) = 0$.
3. En déduire que la limite est encore la même si f est une fonction réglée.(Théorème de Riemann-Lebesgue).

Exercice 5
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}\int_a^b f(t)dt, \quad \text{où } u_n = \int_a^b f(t)\sin^2(nt)dt \text{ pour } n \geq 0.$$

Exercice 6 (plus dur)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)dt, \quad \text{où } v_n = \int_a^b f(t)|\sin(nt)|dt \text{ pour } n \geq 0.$$

Exercice 7
Calculer pour tout $x > a$ ($a > 1$) l'intégrale $\displaystyle\int_a^x \frac{dt}{t(\ln t)^\alpha}$.
Est-ce que cette intégrale converge quand x tend vers $+\infty$? quand a tend vers 1? vers 0?

Exercice 8 (plus dur)
Calculer $I = \displaystyle\int_0^\pi \ln\left(\frac{b+\cos x}{a+\cos x}\right)dx$ pour $1 < a < b$. ($I = \pi\ln\left(\dfrac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$).

Exercice 9
Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On définit le produit de convolution $f * g$ entre f et g par $f * g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que l'intégrale est bien définie).

1. Supposons que $g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer qu'alors $f * g$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, et que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty\|g\|_1$.
2. Supposons que f et g soient dans $L^2(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g$ est définie pour tout x.
3. Supposons f et g continues, et de plus f bornée, $g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. (on pourra d'abord étudier les fonctions $\varphi_n(x) = \int_{-n}^n f(x-t)g(t)dt$, pour $n \in \mathbb{N}$, et montrer qu'elles sont continues.)

Université Paris XII Val de Marne
Topologie, Fonctions de Plusieurs Variables

Licence 2
Année 2006-2007
R. Hadiji, S. Seuret

TD 9: Intégrales généralisées

Exercice 0

Rappeler les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ sont convergentes.

Exercice 1

Étudier la convergence et éventuellement les valeurs des intégrales suivantes:

$$1)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}; \qquad 2)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad 3)\ \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}; \qquad 4)\ \int_0^1 \frac{dx}{\ln x}.$$

Exercice 2

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$ (définie sur $\mathbb{R}^+$) est équivalente à la fonction $x \mapsto \frac{1}{2x}$ quand $x \to +\infty$.
2. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\sqrt{1+x^2})^\alpha}$ converge-t-elle?
3. Calculer, quand c'est possible, la valeur de I_α.

Exercice 3

Étudier les intégrales suivantes:

$$1)\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx; \qquad 2)\ \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx; \qquad 3)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx; \qquad 4)\ \int_0^1 \cos(1/x) dx.$$

Exercice 4

Étudier la convergence éventuelle des intégrales suivantes lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$1)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^\alpha} dx; \qquad 2)\ \int_0^{\pi} \frac{dx}{(1-\cos x)^\alpha}$$

Exercice 5

Étudier la convergence éventuelle des intégrales suivantes:

$$1)\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2}}; \qquad 2)\ \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx; \qquad 3)\ \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(x)} dx$$

$$4)\ \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}}; \qquad 5)\ \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx.$$

Exercice 6

1. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ sont convergentes, et que leur somme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ est nulle.

2. En déduire que pour tout $a > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}\ln a$.

Exercice 7 (plus dur)

Soit $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

1. Vérifier que f est paire.

2. Donner la limite quand x tend vers 1 de la fonction $x \mapsto (1-x)^{3/4} f(x)$.

3. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-1}^1 f(x)dx$ est convergente.

4. Donner une primitive de le fonction $x \mapsto \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}$.

5. Calculer I.

Université Paris XII Val de Marne
Topologie, Fonctions de Plusieurs Variables

Licence 2
Année 2006-2007
R. Hadiji, S. Seuret

TD 10: Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre

Exercice 1

Étudier les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies par $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n dx$ et $v_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln x}{x^2-1}dx$.

Exercice 2 (plus dur)

Soit f une fonction continue au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, et $g(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{\sqrt{(t-a)(x-t)}}dt$.

Étudier l'ensemble de définition de g et sa limite quand x tend vers a.

Exercice 3

Soit $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}dt$.

1. Vérifier que, pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_x^\infty e^{-t^2/2}(1+1/t^2)dt.$.
   En déduire, pour $x > 0$, $1 - \Phi(x) \leq \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.
2. Prouver que $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_x^\infty e^{-t^2/2}\left(1 - \frac{3}{t^4}\right)dt.$
   En déduire que, pour $x > 0$, $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2} \leq 1 - \Phi(x) \leq \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.
3. Prouver que $1 - \Phi(x) \sim \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 4 Le but de cet exercice est de calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt.$

Posons pour $\lambda \geq 0$ $F(\lambda) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}dt$, et $F_n(\lambda) = \displaystyle\int_0^n e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}dt$ pour $n \geq 1$.

1. Rappeler pourquoi les intégrales I, $F(\lambda)$ et $F_n(\lambda)$ existent.
2. Montrer que chaque fonction F_n $(n \geq 1)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, puis en fait est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ (y compris en 0).
3. Posons, pour $t \geq 0$, $g(t) = \frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda^2+1}(\lambda \sin t + \cos t)$. Calculer la dérivée de g sur $\mathbb{R}^+$.
4. En intégrant par parties, montrer que la suite de fonctions $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend uniformément vers F sur $\mathbb{R}^+$.
5. Montrer que F est C^1 sur $\mathbb{R}^+$, mais pas en 0. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\lambda \geq 0$, $F(\lambda) = C - \arctan(\lambda)$.
6. Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} F(\lambda)$. En déduire que $I = \frac{\pi}{2}$.